■　双子のパラドックス（加速度 1.0G のロケットで行く）

姉ダイアナは双子の妹アルテミスを地球に残し，加速度 1.0G のロケットで出発し，100 光年のところで地球と反対側に噴射しながら 1.0G で減速し，200 光年のところで速度が 0 になり反転して，帰りの 100 光年のところで再び地球側に噴射しながら 1.0G で減速し，地球で速度が 0 になる．再会した双子のどちらが年をとっているか？

結論を先に言うと，妹は約 400 年，姉は約 20 年経過している．
亜光速のロケットで往復 400 光年の行程であるから，地球からみて約 400 年かかるのは当然として，ロケットの固有時間が約 20 年しか経過していないのはどのように算出するのか.

◆　近未来で現実的な方法

重力加速度と同じ 1.0G で加速するロケットの中では人間は地球と同じ生活ができる．例えば，質量が 20ton であれば推力は 20tonforce あればよい．これは戦闘機の仕様であり，非現実的な数値ではない．加速度を

$$a = 1.0G \cong 10\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

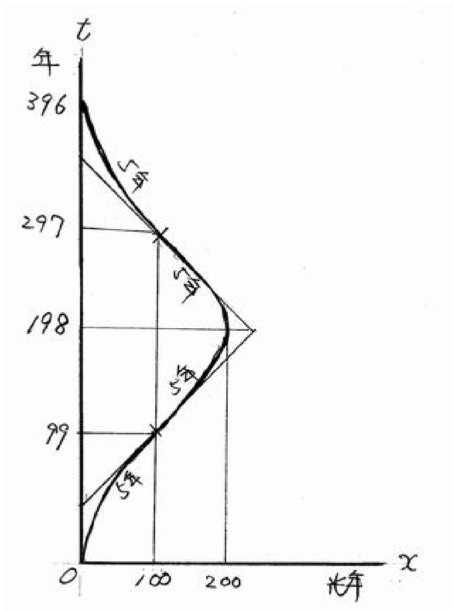
とし，一定とする．

地球を出発し，地球に戻ってくるまで，ずっと加速度を 1.0G に保つ．これを実現するには，行きの行程の半分まで加速し，そこで逆噴射で減速する．行きの全行程のところで速度が 0 になり，そのまま逆噴射を続ける．帰りの行程の半分のところで再び逆噴射で減速する．地球に戻ってきたところで速度が 0 になる．

このミンコフスキー時空図は次のようになる．
双曲線が光子の世界線に漸近するようになる．
ロケットの固有時間は，特殊相対性理論の積分により算出できるのである．
一様加速度の計算はこのＨＰの別の記事を参照してほしい．








◆　地球から 100 光年のところまでかかる時間（地球から見て）

式（ua1.15）を使って，

$$100 \ \mathrm{lightyear} = 100 \times 3 \times 10^8 \mathrm{ms^{-1}} \times 3.16 \times 10^7 \mathrm{s} = 9.46 \times 10^{17} \mathrm{m}$$

$$ct = \sqrt{x^2 + \frac{2c^2 x}{a}}$$

$$= \sqrt{(9.46 \times 10^{17})^2 + \frac{2 \times (3 \times 10^8)^2 \times 9.46 \times 10^{17}}{10}} = 9.37 \times 10^{17} \mathrm{m(time)}$$

$$t = \frac{9.37 \times 10^{17} \mathrm{m}}{3 \times 10^8 \mathrm{ms^{-1}}} = 3.13 \times 10^9 \mathrm{s} \cong 99 \mathrm{year}$$

where　$1 \ \mathrm{year} = 365.24 \times 24 \times 3600 \mathrm{s} = 3.16 \times 10^7 \mathrm{s}$

$$1 \ \mathrm{lightyear} = 3 \times 10^8 \mathrm{ms^{-1}} \times 3.16 \times 10^7 \mathrm{s} = 9.46 \times 10^{15} \mathrm{m} \approx 10^{16} \mathrm{m}$$

◆　地球から 100 光年のところまでかかる時間（ロケットから見て）

時間 $t$ で到達する速度 $\beta$ を求める．式（ua1.13）を使って，

$$\beta = \left(1 + \left(\frac{c}{at}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 + \left(\frac{3\times10^8}{10\times3.13\times10^9}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1 + 9.2\times10^{-5})^{-\frac{1}{2}} \cong 1 - 4.6\times10^{-5} = 0.999954$$

計算機の桁数にもよるが近似式を使った方が正確である．

1.0G で加速しても亜光速に到達可能なことが判る．

速度 $\beta$ に達する固有時間 $\tau$ を求める．式（ua1.16）を使って，

$$\tau = \frac{c}{a}\tanh^{-1}\beta$$

$$= \frac{3\times10^8}{10}\tanh^{-1}0.999954 = 1.6\times10^8\,\mathrm{s} \cong 5\ \mathrm{year}$$

計算機の桁数にもよるが近似式を使った方が正確である．

式（ua1.17）を使って，

$$\tau \cong \frac{c}{2a}\ln 4\left(\frac{at}{c}\right)^2$$

$$= \frac{3\times10^8}{2\times10}\ln\frac{4}{9.21\times10^{-5}} = 1.6\times10^8\,\mathrm{s} \cong 5\ \mathrm{year}$$

固有時間つまりロケットの時計は驚くほど短いことが判る．

全行程の時間は４倍すればよい．

◆　固有時間の遅れは一般相対性理論で説明できるか？

固有時間の遅れは重力のためだというのが一般相対性理論である．そして，加速度による力は重力と同じであるというのも一般相対性理論である．

この双子のパラドックスでは，姉も妹も（地球表面もロケットも）ずっと 1.0G の力を受けているのである．無重力に比べて 1.0G の重力での時間の遅





れの割合はわずか 100 億分の 7 である．この数値はＧＰＳ衛星で証明されている．

つまり, この双子のパラドックスは一般相対性理論では説明できないのである．新たなパラドックスが生まれてしまった．

◆　銀河系の中心まで加速度 1.0G のロケットで 10 年で行く

（このＨＰのサイトの別の記事を参照）

地球から銀河系の中心までは２万～３万光年である．ここでは，

$$x = 2\times10^{20}\,\mathrm{m}$$

とする．約２万光年である．

地球から銀河系中心までかかる時間（地球から見て）は，

$$t = 6.67\times10^{11}\,\mathrm{s} = 2.1\times10^4\ \mathrm{year}$$

速度０から出発しても約２万光年の距離を行くのに約２万年かかるということである．

時間 $t$ で到達する速度 $\beta$ を求めると，

$$\beta = (1 + 2\times10^{-9})^{-\frac{1}{2}} \cong 1 - 10^{-9} = 0.999999999 \quad \text{（9 の数が 9 個）}$$

地球から銀河系中心までかかる時間（ロケットから見て）は，

$$\tau = 3.21\times10^8\,\mathrm{s} = 10\ \mathrm{year}$$

固有時間つまりロケットの時計は驚くほど短く 10 年である．

加速度 1.0G のロケットで，５年で 100 光年まで到達できるが，あと５年で２万光年まで到達できるのである．

加速系と慣性系の固有時間の関係は次式で直接算出できる．

$$\frac{at}{c} = \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \qquad \text{(ua1.19)}$$