

## 双子のパラドックス

兄は双子の弟を地球に残し、亜光速（ $0.96c$ ）のロケットで出発し、24光年の距離ところで反転し同じ速度で地球に戻る。再会した双子のどちらが年をとっているか？

結論を先に言うと、弟は50年、兄は14年経過している。このパラドックスを4つの方法で解決する。

お互いに遠ざかっているときまたは近づいているときは、お互いに相手の遅く進む時計を観測すると説明されるが本当にそんなことが観測されるのだろうか。じつはそもそもこの説明と解釈が正確ではない。

長さの収縮と時計の遅れを時空図で説明されてもまず理解できないだろうし、たぶん間違った解釈をするだろう。それは時空図によって私たちは神の視点を持つからである。つまり、兄と弟がお互いに観測するのではなく、また、神の視点で観測するのでもなく、私たちは正しい観測者を配置しなければならぬのである（ガレージのパラドックスでも同じ観測者を配置したように）。

ここからこのパラドックスを4つの方法で解決する。

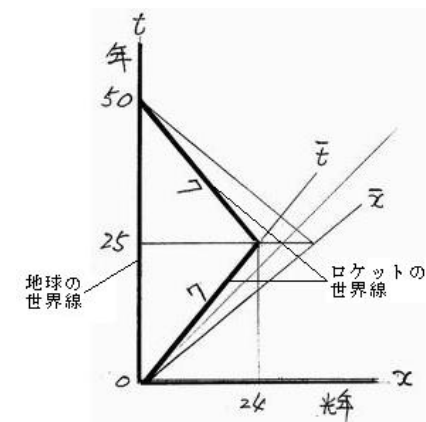
## 双子のパラドックス

### ■ 双子のパラドックス その1

兄は双子の弟を地球に残し、亜光速（ $0.96c$ ）のロケットで出発し、24光年の距離ところで反転し同じ速度で地球に戻る。再会した双子のどちらが年をとっているか？

結論を先に言うと、弟は50年、兄は14年経過している。証明もごく簡単である。しかし、観測される不思議な物理現象をきちんと説明できなければ、パラドックスが生まれる。

ミンコフスキー時空図を正確に書くため、兄は亜光速で飛んでいるロケットに乗り移ることとする。重力が固有時間に影響を与えるので、待っている弟は、固有時間に影響のない重力のない地球近くの宇宙ステーションにいることにする。



ローレンツ変換を計算するまでもなくミンコフスキー時空図から弟の方が年をとるのが早いことが判る。ミンコフスキー時空の三角形の定理（ミンコフスキーの不等式ともいう）は、二辺の和は他辺よりも短いというものである。これはユークリッド幾何と逆である。

## 双子のパラドックス

弟の世界線は  $t$  軸, 兄の世界線は  $\bar{t}$  軸であり, ユークリッド幾何の意味で明らかに兄の方が長いのでミンコフスキー時空の意味では兄の方が短いのである. 世界線の長さは固有時間そのものであるから, 兄の固有時間が弟のそれより短いという結論が時空図から得られるのである.

弟から兄の動きを見れば, 反転までに掛かる時間は,

$$t = \frac{L}{v} = \frac{24 \text{光年(S)}}{0.96c} = 25 \text{年(S)}$$

となるので, 弟の時計で弟から兄を観測すると, 24 光年(S)の距離まで行くのに 25(S)年かかり, 戻って来るのにも 25 年(S)かかり, 50 年(S)が経っている.

兄が自分の動きを見れば, 反転までに掛かる時間は,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.96^2}} = \frac{1}{0.28}$$

$$\bar{t} = \frac{L}{\gamma v} = 0.28 \times 25 \text{年(S)} = 7 \text{年(R)}$$

別の見方をすると, 反転位置が  $0.96c$  で近づいてくるので,

$$L' = \frac{L}{\gamma} = 0.28 \times 24 \text{光年(S)} = 6.72 \text{光年(R)}$$

(観測者の立場を入れ換えたのでプライム付が普通の公式とは逆である)

のところに反転位置があり, 反転までに掛かる時間は,

$$\bar{t} = \frac{6.72 \text{光年(R)}}{0.96c} = 7 \text{年(R)}$$

である. 兄の時計で兄は自分を観測すると, 24 光年(S)の距離が 0.28 倍に縮小されている 6.72 光年(R)を  $0.96c$  の速度で 7 年(R)で到達し反転し, 7 年(R)で帰ってきて 14 年(R)が経っている.

これを公式で示すと,

$$t = \gamma \bar{t}$$

となる.

## 双子のパラドックス

再会したときは, 出発から, 兄は 14 年(R)後, 弟は 50 年(S)後である. これはミンコフスキー時空図からみると完全に正しいのである. 「浦島太郎」や「猿の惑星」は本当にあるのである.

しかし, 特殊相対性理論の相対性から, 兄から見ても弟の時計は遅れていて, 兄の方が年をとると結論することもできるように思える. だが, 二人が再会したとき年をとる方が兄だったり弟だったり観測者によって違って見えるようなことはない. 同一時刻, 同一場所であるからである. パラドックスは再会することから生まれるのである.

つまり, 二人は完全に相対的ではないのである. ただ一つ違うのは兄が反転することである. この反転のときに加速され重力が生じる. そこで一般相対性理論により重力がかかる時計は遅れるということになる.

従って, 双子のパラドックスを証明するには一般相対性理論の重力の影響を計算することが必要になる. ただ, 経過年数の計算は, 特殊相対性理論のローレンツ変換とミンコフスキー時空図があればできるのである. その根拠はそれぞれの固有時間が世界線に沿っての積分から算出できるからである.

この類の相対論的な実験がなぜパラドックスになるかという点, 物理の実験として理論に合わないことが観測されるということでは決してない. 相対論は物理の実験としてはあらゆるところで検証が済んでいる.

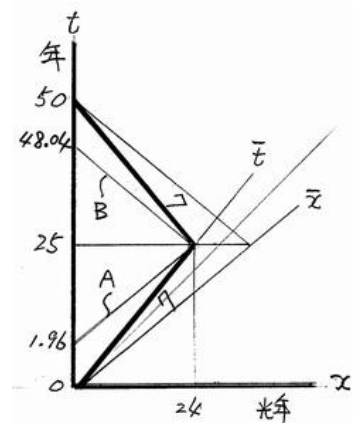
相対論のパラドックスは, 動いているものは縮み, その時計は遅れることの実験の説明が誤解されることから生まれる. 不思議な現象が観測されるのは事実だが, 実験の観測を慎重にやることによりパラドックスは解消する.

双子のパラドックス

■ 双子のパラドックス その2

兄は双子の弟を地球に残し、亜光速 (0.96c) のロケットで出発し、24 光年の距離ところで反転し同じ速度で地球に戻る。再会した双子のどちらが年をとっているか？

出発してから再会するまでずっと自分より相手の方が時計の進みが遅いことがお互いに観測できる。しかし、再会時は、弟は 50 年、兄は 14 年経過している。ミンコフスキー時空図からロケットが反転した瞬間に地球の弟が 1.96 年から 48.04 年に一気に年をとるように見える。本当にそんなことが観測されるのか。これが 1 つめのパラドックスである。



線 A は  $\bar{x}$  軸に平行な反転直前のロケット系の同時線で、線 B は反転直後のロケット系の同時線である。反転直前に地球の時計が 1.96 年であることをロケット系が観測でき、反転直後に地球の時計が 48.04 年であることをロケット系が観測できる。だが、反転時にはロケットが地球の時計を直接観測できないことに注意しなければならない。

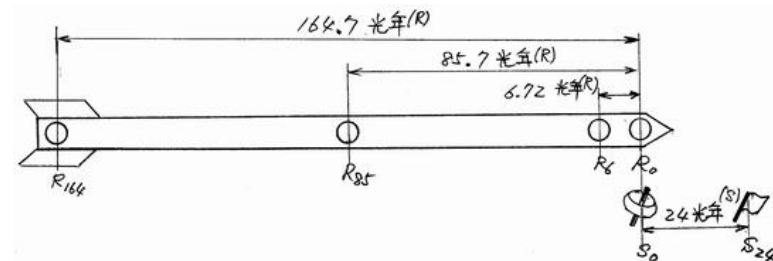
お互いを正確に観測するためには、地球系に固定された多くの観測者とロケット系に固定された多くの観測者を用意しなければならない。観測者をビー

双子のパラドックス

コンと呼ぶことが多い。

地球系の観測者はその慣性系で静止していてすべての観測者は同じ時を刻む(固有時間が同じである)。ロケット系も同様である。自分の時計の記録はあとから持ち寄り皆に知らせることができる。

イメージを鮮明にするために長いロケットを用意する。観測者の名前と位置を図のとおりとする。地球の弟が  $S_0$ 、ロケットの兄が  $R_0$  である。慣性系であることを確実にするため、ロケットは最初から 0.96c で飛んでいて、 $R_0$  が  $S_0$  に一致したときに兄がスーテンションからロケットへ乗り移ることにする。このときすべての観測者の時計を初期化する。



固有長、固有時間の比  $\gamma = \frac{1}{0.28}$

$S_{24}$  が  $R_0$  の通過を見るとき  $S_{24}$  の時計は、 $\frac{24}{0.96} = 25$ 年(S)

$R_0$  が  $S_{24}$  の通過を見るとき  $R_0$  の時計は、 $\frac{24}{\gamma} = 6.72$ 光年(R),  $\frac{6.72}{0.96} = 7$ 年(R)

$S_0$  が  $R_6$  の通過を見るとき  $S_0$  の時計は、 $\frac{6.72}{\gamma} = 1.88$ 光年(S),  $\frac{1.88}{0.96} = 1.96$ 年(S)

$R_6$  が  $S_0$  の通過を見るとき  $R_6$  の時計は、 $\frac{6.72}{0.96} = 7$ 年(R)

(距離の単位を光年とし、 $v = \beta$ ,  $c = 1$ として計算できる)

ロケットの反転は、ロケット系の時計で 7 年(R)に同時に起こる。反転時、 $R_0$  と  $S_{24}$  が、 $R_6$  と  $S_0$  が衝突して時計が停まったとしよう。すべての観測者

双子のパラドックス

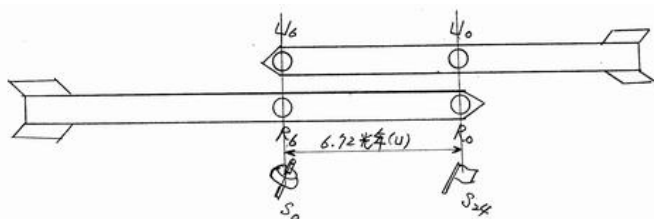
は両方の時計が見れるようになるのだが何年で停まっているのだろうか。これが2つめのパラドックスである。

線 A は  $\bar{t} = 7$  年の同時線だから、既に算出してあるように、

$S_{24}$  と  $R_0$  が会おうとき、25 年(S)と 7 年(R)である。

$S_0$  と  $R_6$  が会おうとき、1.96 年(S)と 7 年(R)である。

衝突したという事象はそれぞれ自分の時計でしか記録できなく、通過する時刻と同じである。つまり、 $R_0$  と  $R_6$  の時計は 7 年、 $S_{24}$  の時計は 25 年、 $S_0$  の時計は 1.96 年で停まっている。ロケット系の時計で 7 年(R)に反転という同時に起こったことが、地球系では 25 年(S)と 1.96 年(S)の違いがあるのである。これで2つめのパラドックスが解決できた。



ロケットを反転させると慣性系ではなくなり説明が複雑になるので、反対方向から  $0.96c$  で飛んでくる UFO へ  $R_0$  から乗り移ることにする。UFO の時計は  $\bar{t} = 7$  年に初期化される。 $\bar{t} = 7$  年に  $R_0$  が会おう UFO の部分を  $U_0$  とする。このとき  $U_0$  の前方 6.72 光年(U)のところにある  $U_6$  は  $S_0$  と会おうが  $R_6$  とは出会わない。ロケットと UFO の相対速度が  $0.96c$  でないからである。

UFO は線 B の同時線上にあるので、

$S_0$  と  $U_6$  が会おうとき、48.04 年(S)と 7 年(U)である。

$S_0$  は、 $R_6$  と  $U_6$  を同時には見れない。

$S_0$  から見て同時に見えるのは、 $U_6$  と  $R_{164}$  である。

$S_0$  が  $R_{164}$  の通過を見ると  $S_0$  の時計は、

双子のパラドックス

$$\frac{164.7 \text{ 光年}}{0.96} = 171.57 \text{ 年(R)}, \quad \frac{171.57 \text{ 年}}{\gamma} = 48.04 \text{ 年(S)}$$

(実は逆算して  $R_{164}$  の位置を決めた)

地球系から観測したロケット系の同時事象と UFO 系の同時事象には大きな隔たりがあり、 $R_6$  が観測する 1.96 年(S)と  $U_6$  が観測する 48.04 年(S)を比較して、 $S_0$  の時計の針が一気に進むことを誰かが観測するという事は特殊相対性理論の範囲では言えない。

ロケットの向きを変えるのではなく、むりやりに逆噴射させて反転したらどうなるのか？反転はロケット系の時計の 7 年(R)で起きる。 $S_{24}$  と  $R_0$ 、 $S_0$  と  $R_6$  が会おうときである。特殊相対性理論では説明できないことが起きる。

$R_6$  は 7 年(R)のとき  $S_0$  の時計が 1.96 年(S)から 48.04 年(S)に一気に変わるのを観測する。

$S_0$  は  $S_0$  の時計で 1.96 年(S)から 48.04 年(S)まで  $R_6$  が  $S_0$  の位置で停まっているのを観測する。このとき  $R_6$  の時計は 7 年(R)のままである。

この現象はブラックホールの地平面で起こる現象と同じである。これは無限大の加速度で反転するから無限大の重力が生じて、それが引き起こす現象だと考えられる。

このようなことは、 $S_0$  と  $R_0$  以外の観測者（一般にはビーコンと呼ばれる）が観測した現象である。パラドックスはビーコンが観測するのである。「その 3」、「その 4」では、地球  $S_0$  とロケット  $R_0$  以外の観測者を用意しないで説明しよう。

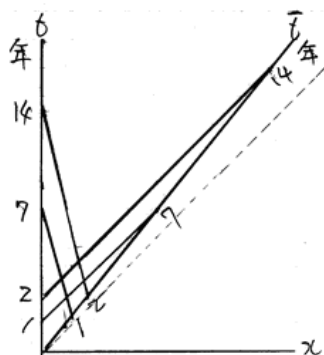
双子のパラドックス

■ 双子のパラドックス その3

兄は双子の弟を地球に残し、亜光速 (0.96c) のロケットで出発し、24 光年の距離ところで反転し同じ速度で地球に戻る。再会した双子のどちらが年をとっているか？

ミンコフスキー時空図より時計の進み・遅れを算出するのではなく、もっと現実的な方法として、光通信、電波通信を利用する方法がある。実際に、月や惑星探査衛星との間で、地球の時計と人工衛星の時計の進み・遅れを調整するイメージで考えてみる。

動いている相手の時計の進みを知るには単純に定期的に光信号を送受信する方法がある。光信号のなかに数字のコードを入れることもできる。この方法で観測すると、ロケットの反転時に地球の時計が一気に進むことは観測できない。これは、パラドックスではない。「その1」や「その2」で説明したことの方にパラドックスがしやすい。



地球の弟 S<sub>0</sub> は自分の時計で 1 年(S)毎に、ロケットの兄 R<sub>0</sub> も自分の時計で 1 年(R)毎に光を発信することにする。受信したら自分の時計の読みを相手に連絡することにする。

双子のパラドックス

S<sub>0</sub> の時計とものさしで、1 年(S)に発信した光信号は、

$$\frac{1}{1-0.96} = 25\text{年}, \quad 25 \times 0.96 = 24\text{光年}$$

だから、25 年(S)に 24 光年(S)のところで R<sub>0</sub> に届く。このことは、あとから 24 光年(S)の位置の S<sub>24</sub> から「R<sub>0</sub> と光が同時に S<sub>24</sub> を通過した」という連絡を受けてはじめて判る。

R<sub>0</sub> のものさしと時計で、

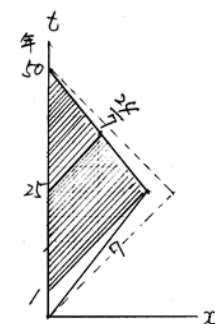
$$24 \times 0.28 = 6.72\text{光年}, \quad \frac{6.72}{0.96} = 7\text{年}$$

だから、6.72 光年(R)の位置の R<sub>0</sub> で 7 年(R)に受信する。ここで R<sub>0</sub> が光信号に「R<sub>0</sub> の受信時は 7 年」というコードを入れて S<sub>0</sub> に送れば、S<sub>0</sub> は連絡を受けたあと S<sub>24</sub> からの連絡と比較して R<sub>0</sub> の時計は遅れていると認識する。

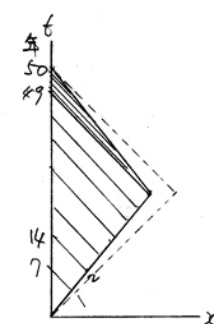
R<sub>0</sub> は自分の行程が 6.72 光年(R)であることと、光が 6.72 年(R)かけて到達したことも知っている。S<sub>0</sub> の光の発信時を R<sub>0</sub> の時計で計算すると、

$$7 - 6.72 = 0.28\text{年(R)}$$

S<sub>0</sub> の時計で 1 年(S)に発信されたことを知っているから、R<sub>0</sub> の観測 (計算) では、S<sub>0</sub> の時計の 1 年(S)が R<sub>0</sub> の時計の 0.28 年(R)となる。驚くべきことにこの計算では R<sub>0</sub> は S<sub>0</sub> の時計が進んでいると認識する。そして R<sub>0</sub> と S<sub>0</sub> の認識に計算上の矛盾がない。



ステーションが発信, ロケットが受信



ロケットが発信, ステーションが受信

## 双子のパラドックス

これらの計算は相対性からお互いに成り立つ。つまり、受信時の連絡を受けると相手の時計は遅れていることが判るが、自分の時計で計算してみると相手の時計は進んでいることになる。相手の時計を覗いて見比べているわけではないことを再三注意する。

もしロケットは反転しないでそのまま飛ぶとしても、2年(S)で発信された光を受信して R<sub>0</sub> の時計で計算すると、0.56年(R)になり 0.28年(R)毎に発信されていると認識する。驚くべきことだが、ロケットが反転してもこの状況は変わらない。具体的にどういうことが観測できるか。

S<sub>0</sub> は 50 回発信する。R<sub>0</sub> は R<sub>0</sub> の時計で S<sub>0</sub> から次のように受信する。

往路 7年(R)で1回

復路 7年(R)の間に 1/7年(R)毎に 49回

R<sub>0</sub> は 14 回発信する。S<sub>0</sub> は S<sub>0</sub> の時計で R<sub>0</sub> から次のように受信する。

49年(S)まで、7年(S)毎に7回 (R<sub>0</sub> の往路)

49年(S)から 50年(S)まで、1/7年(S)毎に7回 (R<sub>0</sub> の復路)

もちろん、受信回数は相手の時計の年数 (相手の年令) と同じである。

前の計算と同じように、反転してもお互いに相手の距離は自分のものさしで判っているので、相手の光の発信時を自分の時計で計算することができ、それはお互いに自分の時計で 0.28年毎に発信されていると計算される。1年毎に発信されていることも知っているのでお互いに相手の時計の進みが速いと認識するのである。

S<sub>0</sub> の時計の 25年(S)で R<sub>0</sub> は反転する。このとき S<sub>0</sub> から発信された光は、12.245年(S)後に反転から 11.755光年(S)のところまで R<sub>0</sub> に届く。

$$12.245 \times 0.96 = 11.755 \text{光年}, \quad 12.245 + 11.755 = 24 \text{光年}$$

R<sub>0</sub> のものさしと時計で、反転から 3.291光年(R)のところまで (7+3.428)年(R)に

## 双子のパラドックス

受信する。

$$11.755 \times 0.28 = 3.291 \text{光年}, \quad \frac{3.291}{0.96} = 3.428 \text{年} = \frac{24}{7} \text{年}$$

(導く式は略、検証のみ)

光は (6.72-3.291)年かけて伝播するので S<sub>0</sub> の光の発信時を R<sub>0</sub> の時計で計算すると、

$$(7+3.428) - (6.72-3.291) = 7 \text{年} = 25 \times 0.28 \text{年(R)}$$

R<sub>0</sub> は S<sub>0</sub> の時計で 25年(S)に発信されたことを知っているから、R<sub>0</sub> の観測 (計算) では、S<sub>0</sub> の時計の 1年が R<sub>0</sub> の時計の 0.28年となる。

R<sub>0</sub> は S<sub>0</sub> の時計が一樣に時を刻むのが観測で判るのである。そして、受信回数が増えるので S<sub>0</sub> の年令が増えるのも観測できる。

相手の光の発信間隔に注目すると、R<sub>0</sub> は自分の時計で相手が 0.28年間隔で 50回発信して 14年分を受信したときに再会する。一方、S<sub>0</sub> は自分の時計の計算で相手が 0.28年間隔で 14回発信して 3.92年分を受信したときに再会する。0.28年間隔というのはあくまでも自分の時計とものさしでの計算であり、自分の時計で 0.28年間隔で受信したのではない。また、固有時間の比でもないので念のため。

「その2」のミンコフスキー時空図から S<sub>0</sub> の 1.96年から 48.04年は情報の空白期間という説明をされることがあるが、「その3」のミンコフスキー時空図では、情報の空白期間もないし、S<sub>0</sub> の時計が 1.96年(S)から 48.04年(S)に一気に進むということを R<sub>0</sub> は観測できない。

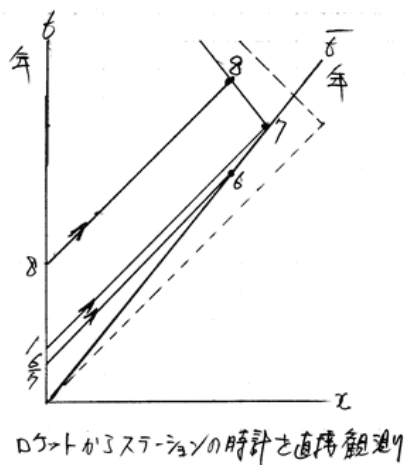
繰り返すが、相対論の観測は自分の目の前の事象を自分の時計で記録するほかではなく、ミンコフスキー時空図を神の目の視点で考えて説明するといくらでもパラドックスをつくってしまうのである。

双子のパラドックス

■ 双子のパラドックス その4

兄は双子の弟を地球に残し、亜光速 (0.96c) のロケットで出発し、24 光年の距離ところで反転し同じ速度で地球に戻る。再会した双子のどちらが年をとっているか？

動いている相手の時計を直接観測するには超高性能な望遠鏡を使えばできる。理論的な望遠鏡なので観測方法をきちんと定義したい。



地球  $S_0$  の時計で 1 年(S) に光信号を発するとはフラッシュをたくようなイメージであるが、同時に数値をコードにして光信号に入れてもよい。しかし、わざわざフラッシュを使わなくても  $S_0$  の時計から光を発しているのだから、そしてその微弱な光をロケット  $R_0$  の超高性能望遠鏡でキャッチすることができ、 $R_0$  から  $S_0$  の時計が読めるのである。

時計から発している光はその時計の絵を固定したまま望遠鏡にキャッチされるので、キャッチされた絵を読めば発信時刻が判るのである。つまり、超高性能望遠鏡から観測できるのは、実は「その3」で説明した光信号と同じ

双子のパラドックス

である。

$R_0$  の反転の直前、 $R_0$  の時計で 7 年(R) のとき  $S_0$  の時計を直接覗くと 1 年(S) と読める。ここで覗くの意味は、 $S_0$  の時計の 1 年(S) の絵が光となって  $R_0$  の望遠鏡に届いたということである。

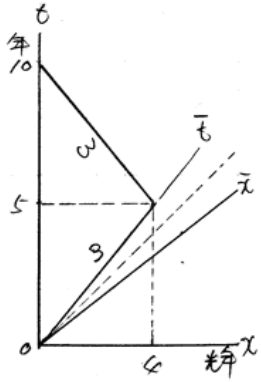
$R_0$  の時計で 6 年(R) のとき望遠鏡で読めるのは 6/7 年(S) である。 $R_0$  の時計で 8 年(R) のとき望遠鏡で読めるのは 8 年(S) である。反転前は 1 年(R) に対して 1/7 年(S) 進むように読める。反転後は 1 年(R) に対して 7 年(S) 進むように読める。9 年(R) のとき 15 年(S)、10 年(R) のとき 22 年(S)、・・・、13 年(R) のとき 43 年(S)、14 年(R) のとき 50 年(S) である。これはそのように読めるのであって固有時間の比ではないので念のため。

つまり、 $R_0$  から  $S_0$  の時計を覗いていると、反転前後で  $S_0$  の時計の針の進む速さが変わるが、「その2」で示した反転の瞬間に  $S_0$  の時計の針が一気に進むというようなことは観測できないのである。

繰り返すが、相対論の観測は自分の目の前の事象を自分の時計で記録するほかはなく、ミンコフスキー時空図を神の目の視点で考えて説明するといくらでもパラドックスをつくらせてしまうのである。

双子のパラドックス

別の時空図の例をあげよう。光速の  $4/5=0.8$  の速さで出発し 4 光年のところで反転し帰ってくる。計算を確認してみるとよい。



$$t = \frac{L}{v} = \frac{4}{0.8} = 5 \text{ 年}$$

$$\bar{t} = \frac{L}{\gamma v} = \sqrt{1-0.8^2} \frac{4}{0.8} = 0.6 \times 5 = 3 \text{ 年}$$

( $L$ の単位を光年とし、 $v = \beta$ ,  $c = 1$ として計算できる)