アインシュタインの総和規約／縮約記法

アインシュタインの総和規約／縮約記法（Einstein summation convention）とは；

上付添字そえじと下付添字の同じ記号に具体的な次元数を代入して和をとること（Σを省略することができる）．上付添字どうし，下付添字どうしの同じ記号では和をとらない．ベクトルや１形式の微分も原則は同じである．

このことは，ケンブリッジ大学の Schutz 教授，Dunsby 教授，東京大学，放送大学の岡部教授が著書の中で明言している．

上付添字と下付添字を厳密に区別しないと添字の上げ・添字の下げや外微分など微分幾何学（リーマン幾何学）の理論式が成り立たなくなってしまうので注意しよう．

◆　３次元空間ベクトル

ベクトルと基底ベクトルは太字を使う．添字はローマ文字を使う．

$$\boldsymbol{A} \to \left(A^1,\ A^2, A^3\right)$$

$$\boldsymbol{A} = A^i \boldsymbol{e}_i = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$$

$\boldsymbol{e}_i$ ；基底ベクトル（basis vector）

where $A^i\boldsymbol{e}_i \equiv \sum_i A^i \boldsymbol{e}_i$

◆　４次元時空ベクトル

ベクトルと基底ベクトルは上付矢印とする．添字はギリシャ文字を使う．

$$\vec{V} \to \left(V^0, V^1, V^2, V^3\right)$$

$$\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha = V^0\vec{e}_0 + V^1\vec{e}_1 + V^2\vec{e}_2 + V^3\vec{e}_3 = V^0\vec{e}_0 + V^i\vec{e}_i$$

$\vec{e}_\alpha$ ；基底ベクトル（basis vector）

where $V^\alpha \vec{e}_\alpha \equiv \sum_\alpha V^\alpha \vec{e}_\alpha$

◆　４次元時空１形式

１形式と基底１形式は上付チルドとする．添字はギリシャ文字を使う．

$$\tilde{p} \to \left(p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3\right)$$

$$\tilde{p} = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha = p_0\tilde{\omega}^0 + p_1\tilde{\omega}^1 + p_2\tilde{\omega}^2 + p_3\tilde{\omega}^3 = p_0\tilde{\omega}^0 + p_i\tilde{\omega}^i$$

$\tilde{\omega}^\alpha$ ；基底１形式（basis 1-form）

where $p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha \equiv \sum_\alpha p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha$

以下，Σの定義は省略する．

◆　(2, 0)テンソル

$$\boldsymbol{V} = V^{\alpha\beta}\vec{e}_{\alpha\beta} = V^{\alpha\beta}\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta$$

$$\vec{e}_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta$$

⊗記号はテンソル積，外積（外積は他の意味にも使うので注意）

展開式の項の数（成分の数）は４次元時空では 16 である．

◆　(0, 2)テンソル

$$\boldsymbol{f} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta$$

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta} = \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta$$

⊗記号はテンソル積，外積（外積は他の意味にも使うので注意）

展開式の項の数（成分の数）は４次元時空では 16 である．

◇　メトリックテンソル（(0, 2)テンソル）

幾何学空間の距離や角度を規定し，空間の性質を決定づける．

４次元時空では，

（成分式）

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

（成分・基底展開式）

$$\boldsymbol{g} = \eta = \eta_{\alpha\beta}\omega^\mu \otimes \omega^\nu = \eta_{\alpha\beta}dx^\mu \otimes dx^\nu$$

where $\omega^\alpha = dx^\alpha$ （微分と区別するときは外微分を $\tilde{d}x^\alpha$ とする）

【注意】$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ とする他書もある

◆　ドット積，スカラー積，内積

$$\vec{A} = A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} = A^0\vec{e}_0 + A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3$$

$$\vec{B} = B^{\beta}\vec{e}_{\beta} = B^0\vec{e}_0 + B^1\vec{e}_1 + B^2\vec{e}_2 + B^3\vec{e}_3$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \boldsymbol{g}\left(\vec{A},\vec{B}\right) = A^{\alpha}B^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3$$

$$\boldsymbol{g}\left(\vec{e}_{\alpha},\vec{e}_{\beta}\right) = \vec{e}_{\alpha}\cdot\vec{e}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

【注意】時間成分がマイナスになる．$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ では空間成分がマイナスになる．

【重要な注意】$A^{\alpha}B^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = A^{\alpha}B_{\alpha} = A^0B_0 + A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3$ となり縮約と同じになる．次式のように書く流儀もあるが誤解されやすい．アインシュタインの総和規約／縮約記法は dummy index についての Σ を省略しているだけである．

$$A^{\alpha}B^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = A^{\alpha}B_{\alpha} = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3$$

◆　４次元時空での２点間の間隔（squared length）

$$\Delta s^2 = \Delta x^{\alpha}\Delta x^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$$

$$\Delta s^2 = \Delta x^{\alpha}\Delta x^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

where　$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$

（ct を１つの記号のように扱ってかまわない）

$\Delta s^2 > 0$ ；空間的（spacelike）に離れている

$\Delta s^2 < 0$ ；時間的（timelike）に離れている

$\Delta s^2 = 0$ ；ヌル的（光的（light like））に離れている

【注意】Δs^2 は全体として１つの記号であり $\Delta(s)^2$ ではない．また，負にもなるので，$(\Delta s)^2$ と書くのも適当ではない．もちろん，$\sqrt{(\Delta s)^2}$ は定義できない．

◆　ローレンツ・ブーストのローレンツ変換式

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}(v)A^{\beta} \tag{2.7}$$

書き下すと，行列の行がフリー，列がダミーとなるように，

$$\begin{pmatrix} A^{\bar{0}} \\ A^{\bar{1}} \\ A^{\bar{2}} \\ A^{\bar{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^{\bar{0}}{}_0 & \Lambda^{\bar{0}}{}_1 & \Lambda^{\bar{0}}{}_2 & \Lambda^{\bar{0}}{}_3 \\ \Lambda^{\bar{1}}{}_0 & \Lambda^{\bar{1}}{}_1 & \Lambda^{\bar{1}}{}_2 & \Lambda^{\bar{1}}{}_3 \\ \Lambda^{\bar{2}}{}_0 & \Lambda^{\bar{2}}{}_1 & \Lambda^{\bar{2}}{}_2 & \Lambda^{\bar{2}}{}_3 \\ \Lambda^{\bar{3}}{}_0 & \Lambda^{\bar{3}}{}_1 & \Lambda^{\bar{3}}{}_2 & \Lambda^{\bar{3}}{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

◆　ローレンツ・ブーストのローレンツ逆変換式

$$A^{\beta} = \Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}}(-v)A^{\bar{\alpha}}$$

書き下すと，行列の行がフリー，列がダミーとなるように，

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_{\bar{0}} & \Lambda^0{}_{\bar{1}} & \Lambda^0{}_{\bar{2}} & \Lambda^0{}_{\bar{3}} \\ \Lambda^1{}_{\bar{0}} & \Lambda^1{}_{\bar{1}} & \Lambda^1{}_{\bar{2}} & \Lambda^1{}_{\bar{3}} \\ \Lambda^2{}_{\bar{0}} & \Lambda^2{}_{\bar{1}} & \Lambda^2{}_{\bar{2}} & \Lambda^2{}_{\bar{3}} \\ \Lambda^3{}_{\bar{0}} & \Lambda^3{}_{\bar{1}} & \Lambda^3{}_{\bar{2}} & \Lambda^3{}_{\bar{3}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^{\bar{0}} \\ A^{\bar{1}} \\ A^{\bar{2}} \\ A^{\bar{3}} \end{pmatrix}$$

◆　縮約（contraction）

次の操作を $\vec{A}$ と $\tilde{p}$ との縮約とよぶ．

$\tilde{p}$ は関数，$\vec{A}$ は変数ともいわれる．$\vec{A}$ から $\tilde{p}$ への写像ともいわれる．

$$\tilde{p}\left(\vec{A}\right) = \tilde{p}\left(A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\right) = A^{\alpha}\tilde{p}\left(\vec{e}_{\alpha}\right)$$

$$\tilde{p}\left(\vec{A}\right) = A^{\alpha}p_{\alpha} = \left\langle\tilde{p},\vec{A}\right\rangle = A^0p_0 + A^1p_1 + A^2p_2 + A^3p_3 = A^0p_0 + A^ip_i$$

【注意】縮約はメトリックに依存しない．このことは内積や間隔と違う．

◆　添字の上げ，添字の下げ

メトリックを使って「添字を上げる」「添字を下げる」ことができる．つまりテンソルのタイプを変えることができる．

$$T^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \equiv \eta_{\beta\mu}T^{\alpha\mu}{}_{\gamma} \tag{3.56}$$

$$T_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} \equiv \eta_{\alpha\mu}T^{\mu\beta}{}_{\gamma} \tag{3.57}$$

$$T^{\alpha\beta\gamma} \equiv \eta^{\gamma\mu} T^{\alpha\beta}{}_{\mu} \qquad (3.58)$$

$$\eta^{\alpha}{}_{\beta} \equiv \eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} \qquad (3.59)$$

$$\eta^{\alpha}{}_{\beta} \equiv \delta^{\alpha}{}_{\beta} \qquad (3.60)$$

where $\delta^{\alpha}{}_{\beta}$; Kronecker のデルタ

【注意】上式において μ が dummy index，他は free index である．

【重要な注意】１回の添字の上げまたは添字の下げについて時間成分の符号が反転する．つまり，奇数回で符号が反転し，偶数回で符号が反転しない．

◇　メトリックの３つのタイプ

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$$

$$\eta^{\alpha}{}_{\beta} = \mathrm{diag}(1,1,1,1) = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$$

$$\eta^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$$

◇　ファラデー・テンソルの成分：２形式（(0, 2)交代テンソル）

（ファラデーの成分）

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E^x}{c} & -\frac{E^y}{c} & -\frac{E^z}{c} \\ \frac{E^x}{c} & 0 & B^z & -B^y \\ \frac{E^y}{c} & -B^z & 0 & B^x \\ \frac{E^z}{c} & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{mx}2.1)$$

（マクスウェルの成分）

$$F_{*\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B^x & B^y & B^z \\ -B^x & 0 & \frac{E^z}{c} & -\frac{E^y}{c} \\ -B^y & -\frac{E^z}{c} & 0 & \frac{E^x}{c} \\ -B^z & \frac{E^y}{c} & -\frac{E^x}{c} & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{mx}2.2)$$

式（mx2.2）は式（mx2.1）の双対（dual）であり，次式により導出される．

$$F_{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\, \eta^{\rho\alpha} \eta^{\lambda\beta} F_{\alpha\beta} \qquad (\text{mx}2.7)$$

ここで，$\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$はレビ・チビタの記号であり，(2, 0)テンソルを(0, 2)テンソルへ写像する(0, 4)テンソルである．

$\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}=1$ when　偶置換のとき　（mx2.9）

$\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}=-1$　奇置換のとき

$\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}=0$　その他

式（mx2.7）は次式と等価である．実際の演算にこの式を使うわけではない．

$$F_{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\, F^{\rho\lambda}$$

式（mx2.7）について，dummy index の数は 2，展開式の項の数は 16 である．

１つの項について実際に演算する．例として，マクスウェルの成分の添字が $\mu\nu$=21について算出する．第１行目を添字を使って０行などと表現する．つまり２行１列の成分を算出する．

添字の ρ,λ についてとりうる次元を代入して和をとる．レビ・チビタの記号は４つの添字が全部違うもの以外は 0 である．

$$F_{*21} = \frac{1}{2} \epsilon_{2103}\, \eta^{00} \eta^{33} F_{03} + \frac{1}{2} \epsilon_{2130}\, \eta^{33} \eta^{00} F_{30} = \frac{1}{2} F_{03} - \frac{1}{2} F_{30} = F_{03}$$

where　$\epsilon_{2103} = -1$，$\epsilon_{2130} = 1$，$\eta^{00} = -1$，$\eta^{33} = 1$，$F_{30} = -F_{03}$

これは，ファラデーの０行３列をマクスウェルの２行１列へ置換することを意味する．

◇微分記号

テンソルを４次元時空の４軸の変数で微分するときは，次のように書く．

メトリックを $\eta \to \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ とする．

【表記法】

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \partial_{\alpha} = {}_{,\alpha} \;,\quad \frac{\partial}{\partial x^{0}} = \partial_{0} = {}_{,0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{c}\partial_{t} \,,\quad \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \partial_{\alpha} x^{\beta} = x^{\beta}{}_{,\alpha}$$

アインシュタインの総和規約／縮約記法

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \partial^\alpha = {}^{,\alpha},\quad \frac{\partial}{\partial x_0} = \partial^0 = {}^{,0} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{c}\partial_t,\quad \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} = \partial^\alpha x_\beta = x_\beta{}^{,\alpha}$$

$$\partial^0 = -\partial_0,\ \partial^i = \partial_i$$

$$\text{where}\quad x^0 = -x_0 = ct,\quad x^1 = x_1 = x,\quad x^2 = x_2 = y,\quad x^3 = x_3 = z$$

ラウンド「∂_α」「∂^α」は日本でよく使われている．カンマ「${}_{,\alpha}$」「${}^{,\alpha}$」はMTW notation でありシュッツ著にも使われている．時間成分だけ特殊なので明示した．

【重要な注意】MTW phone book でもシュッツ著でも３次元空間の電磁気量はベクトルして扱う．従って，２形式のファラデー・テンソルの微分の展開式では添字の下げ（分母では添字の上げ）によりベクトルとして演算する．アインシュタインの総和規約／縮約記法を適用するときは時間成分の符号に注意する．他書ではベクトルを下付添字とするものがあるが符号が曖昧になる．

◇　３次元空間ベクトルの勾配，発散，回転の定義は，

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi = \phi_{,1}\boldsymbol{e}_1 + \phi_{,2}\boldsymbol{e}_2 + \phi_{,3}\boldsymbol{e}_3$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = \nabla\cdot\boldsymbol{V} = V^i{}_{,i} = V^1{}_{,1} + V^2{}_{,2} + V^3{}_{,3}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \nabla\times\boldsymbol{V} = \left(V^3{}_{,2} - V^2{}_{,3}\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(V^1{}_{,3} - V^3{}_{,1}\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(V^2{}_{,1} - V^1{}_{,2}\right)\boldsymbol{e}_3 \quad \text{(mx3.1)}$$

◇　微分演算子

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix}\frac{1}{c}\partial_t & \partial_x & \partial_y & \partial_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{c}\partial_t & \nabla\end{pmatrix} \quad \text{(mx3.2)}$$

$$\partial^\mu = \begin{pmatrix}\frac{1}{c}\partial^t & \partial^x & \partial^y & \partial^z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{c}\partial^t & \nabla\end{pmatrix} \quad \text{(mx3.3)}$$

$$= \begin{pmatrix}-\frac{1}{c}\partial_t & \partial_x & \partial_y & \partial_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{c}\partial_t & \nabla\end{pmatrix}$$

時間成分（０成分）の添字を上げ／下げしたとき符号が反転する．

◇　４元電流密度

$\boldsymbol{j}$ は３次元空間ベクトルである．

Update 2021.05.10
2015.06.08

アインシュタインの総和規約／縮約記法

$$\vec{J} = (J^0, \boldsymbol{j}) = (c\rho, \boldsymbol{j}) = (c\rho, J^x, J^y, J^z) \quad \text{(mx3.4)}$$

$$\tilde{J} = (J_0, \boldsymbol{j}) = (-c\rho, \boldsymbol{j}) = (-c\rho, J_x, J_y, J_z) \quad \text{(mx3.5)}$$

$$\text{where}\quad J^0 = -J_0,\ J^1 = J_1,\ J^2 = J_2,\ J^3 = J_3$$

■　ファラデー・テンソルを使って，マクスウェル方程式を表現する．

ファラデー・テンソルの式（mx2.1）を微分すると，マクスウェル方程式の式（mx1.1）と式（mx1.2）が導出できる．

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix}\frac{1}{c}\partial^t & \partial^x & \partial^y & \partial^z\end{pmatrix}\left(F_{\mu\nu}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}-\frac{1}{\mathrm{c}}\mathrm{div}\boldsymbol{E} & \mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mu_0 c\rho & \mu_0\boldsymbol{j}\end{pmatrix}$$

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}{}^{,\nu} = \mu_0 J_\mu \quad \text{(mx3.6)}$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \mu_0 J^\mu$$

ファラデー・テンソルの式（mx2.2）を微分すると，マクスウェル方程式の式（mx1.3）と式（mx1.4）が導出できる．

$$\partial^\nu F_{*\mu\nu} = \begin{pmatrix}\frac{1}{c}\partial^t & \partial^x & \partial^y & \partial^z\end{pmatrix}\left(F_{*\mu\nu}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}\mathrm{div}\boldsymbol{B} & \frac{1}{c}\left(\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\partial^\nu F_{*\mu\nu} = F_{*\mu\nu}{}^{,\nu} = 0 \quad \text{(mx3.7)}$$

$$\partial_\nu F^{*\mu\nu} = F^{*\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

ファラデー・テンソルの式（mx2.1）を使って，マクスウェル方程式の式（mx1.3）と式（mx1.4）が次のようにも書ける．

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0 \quad \text{(mx3.8)}$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

式（mx3.6）の成分を書き下して，正しいことを証明する．

アインシュタインの総和規約／縮約記法

$$F_{0\nu}{}^{,\nu} = F_{01}{}^{,1} + F_{02}{}^{,2} + F_{03}{}^{,3} = -\frac{E^x{}_{,x}}{c} - \frac{E^y{}_{,y}}{c} - \frac{E^z{}_{,z}}{c}$$

$$= -\frac{1}{c}\mathrm{div}\boldsymbol{E} = -\frac{\rho}{c\varepsilon_0} = -\mu_0 c\rho = -\mu_0 J^0 = \mu_0 J_0$$

$$F_{1\nu}{}^{,\nu} = F_{12}{}^{,2} + F_{13}{}^{,3} + F_{10}{}^{,0} = (B^z{}_{,y} - B^y{}_{,z}) - \frac{1}{c^2}E^x{}_{,t}$$

$$= \left(\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)_x = \mu_0 J^1 = \mu_0 J_1$$

$$F_{2\nu}{}^{,\nu} = F_{23}{}^{,3} + F_{21}{}^{,1} + F_{20}{}^{,0} = (B^x{}_{,z} - B^z{}_{,x}) - \frac{1}{c^2}E^y{}_{,t}$$

$$= \left(\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)_y = \mu_0 J^2 = \mu_0 J_2$$

$$F_{3\nu}{}^{,\nu} = F_{31}{}^{,1} + F_{32}{}^{,2} + F_{30}{}^{,0} = (B^y{}_{,x} - B^x{}_{,y}) - \frac{1}{c^2}E^z{}_{,t}$$

$$= \left(\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)_z = \mu_0 J^3 = \mu_0 J_3 \qquad \text{(mx3.9)}$$

式（mx3.7）の成分を書き下して，正しいことを証明する．

$$F_{*0\nu}{}^{,\nu} = F_{*01}{}^{,1} + F_{*02}{}^{,2} + F_{*03}{}^{,3} = B^x{}_{,x} + B^y{}_{,y} + B^z{}_{,z} = \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$$

$$F_{*1\nu}{}^{,\nu} = F_{*12}{}^{,2} + F_{*13}{}^{,3} + F_{*10}{}^{,0} = \left((E^z{}_{,y} - E^y{}_{,z}) + B^x{}_{,t}\right)/c$$

$$= \frac{1}{c}\left(\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)_x = 0$$

$$F_{*2\nu}{}^{,\nu} = F_{*23}{}^{,3} + F_{*21}{}^{,1} + F_{*20}{}^{,0} = \left((E^x{}_{,z} - E^z{}_{,x}) + B^y{}_{,t}\right)/c$$

$$= \frac{1}{c}\left(\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)_y = 0$$

$$F_{*3\nu}{}^{,\nu} = F_{*31}{}^{,1} + F_{*32}{}^{,2} + F_{*30}{}^{,0} = \left((E^y{}_{,x} - E^x{}_{,y}) + B^z{}_{,t}\right)/c$$

$$= \frac{1}{c}\left(\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)_z = 0 \qquad \text{(mx3.10)}$$