静止エネルギーの式 $E = mc^2$ の導出

■　４元速度の定義

◆　ローレンツ変換

観測系（静止系）から粒子系（運動系）を観測すると，「時間の遅れ」と「ローレンツ収縮」が観測される．

粒子系（運動系）の座標と観測系（静止系）の座標の間の関係を「ローレンツ変換」という．

「時間の遅れ」と「ローレンツ収縮」は「ローレンツ変換」から導出される．

【ポイント】「時間の遅れ」と「ローレンツ収縮」は，「光速度不変の原理」だけから導出できる．そして，「ローレンツ変換」も，「光速度不変の原理」だけから導出できる．

◆　時間の遅れの式

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \tag{re1.1}$$

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt\,,\quad \frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

where　$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1 \qquad \beta = \dfrac{v}{c} < 1$

$\Delta t'$, $d\tau$；粒子系・運動系の固有時間，Δt, dt；観測された時間

◆　粒子の無限小の変位

粒子が無限小の変位をしたとし，成分と間隔は，

$$d\vec{x} \xrightarrow[\mathrm{O}]{} (cdt, dx, dy, dz) \tag{re1.2}$$

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} \tag{re1.3}$$

固有時間の定義と，世界線の接ベクトルの大きさは，

$$c^2 d\tau^2 = -d\vec{x} \cdot d\vec{x} \tag{re1.4}$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\tau} = -c^2\text{，つまり，}\ \vec{U} \cdot \vec{U} = -c^2 \tag{re1.5}$$

ＭＣＲ系では，

$$d\vec{x} \xrightarrow[\substack{\mathrm{MCRF} \\ d\tau = dt}]{} (cdt, 0, 0, 0) \tag{re1.6}$$

静止エネルギーの式 $E = mc^2$ の導出

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} \xrightarrow[\mathrm{MCRF}]{} (c, 0, 0, 0) \tag{re1.7}$$

where　ＭＣＲ系，ＭＣＲＦ；

瞬間的共動慣性系（momentary commoving reference frame）

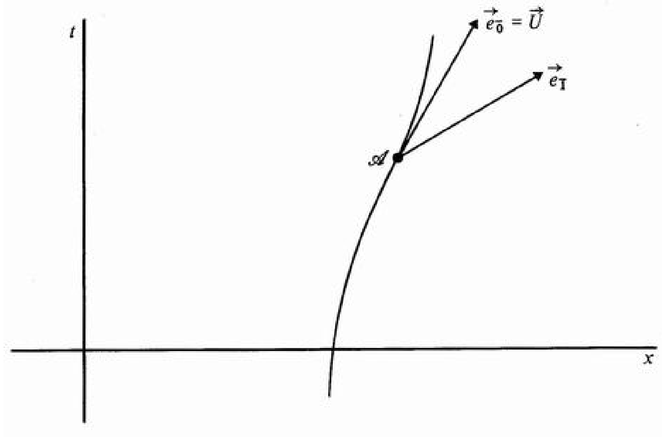

図 2.2　$\mathscr{A}$における世界線の四元速度と瞬時的共動座標系の基底ベクトル

◆　４元速度（four-velocity）の定義

MCR 系（系 $\bar{O}$ ）での４元速度は，

$$\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \left(c\vec{e}_0\right)_{\mathrm{MCRF}} \tag{re1.8}$$

$$U^{\bar{\beta}} = c(\vec{e}_{\bar{0}})^{\bar{\beta}}$$

$$\vec{U} \xrightarrow[\mathrm{MCRF}]{} (c, 0, 0, 0)$$

where　$(\vec{e}_{\bar{0}})^{\bar{\beta}}$ は系 $\bar{O}$ での $\vec{e}_{\bar{0}}$ の $\bar{\beta}$ 成分

観測系（系 O）での４元速度の逆変換式は，

$$U^\alpha = \Lambda^\alpha{}_{\bar{\beta}} U^{\bar{\beta}} = \Lambda^\alpha{}_{\bar{\beta}}\, c(\vec{e}_{\bar{0}})^{\bar{\beta}} = c\Lambda^\alpha{}_{\bar{0}} \tag{re1.9}$$

where　$\Lambda^\alpha{}_{\bar{0}}$ はローレンツ変換の行列の１列目のこと．

x 方向に運動している場合，

静止エネルギーの式 $E = mc^2$ の導出

$$\begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ c\gamma\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \gamma v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(re1.10)}$$

where $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1 \quad \beta = \dfrac{v}{c} < 1$

$$\vec{U} \xrightarrow[O]{} (c\gamma,\, c\gamma\beta,\, 0,\, 0) = c(\gamma,\, \gamma\beta,\, 0,\, 0) \qquad \text{(re1.11)}$$

任意の方向に運動している場合，

$$\boldsymbol{v} \to (v_x, v_y, v_z) \qquad \text{(re1.12)}$$

$$\begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \gamma\beta_z \\ \gamma\beta_x & 1 + A\beta_x\beta_x & A\beta_x\beta_y & A\beta_x\beta_z \\ \gamma\beta_y & \beta_y\beta_x & 1 + A\beta_y\beta_y & \beta_y\beta_z \\ \gamma\beta_z & A\beta_z\beta_x & A\beta_z\beta_y & 1 + A\beta_z\beta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(re1.13)}$$

$$\begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ c\gamma\beta_x \\ c\gamma\beta_y \\ c\gamma\beta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \\ \gamma\,\boldsymbol{v} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \\ c\gamma\,\boldsymbol{\beta} \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \text{(re1.14)}$$

where $v_x = c\beta_x$， $v_y = c\beta_y$， $v_z = c\beta_z$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\beta_x{}^2 + \beta_y{}^2 + \beta_z{}^2)}}$$

$$A = \frac{\gamma - 1}{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}$$

静止エネルギーの式 $E = mc^2$ の導出

■　4 元加速度，4 元運動量の定義

◆　4 元加速度（four-acceleration）の定義

$$\frac{d\vec{U}}{d\tau} = \frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} \qquad \text{(re2.1)}$$

$$\frac{d\vec{U}}{d\tau} \xrightarrow[\text{MCRF}]{} (0,\, a^1,\, a^2,\, a^3) \qquad \text{(re2.2)}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{d\tau}, \quad \vec{U}\cdot\vec{a} = \vec{U}\cdot\frac{d\vec{U}}{d\tau} = 0 \qquad \text{(re2.3)}$$

◆　4 元運動量（four-momentum）の定義

$$\vec{p} = m\vec{U} \qquad \text{(re2.4)}$$

x 方向に運動している場合

$$p^\alpha = mc\Lambda^\alpha{}_{\bar{0}} \qquad \text{(re2.5)}$$

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} c\gamma \\ c\gamma\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} c\gamma \\ \gamma v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(re2.6)}$$

where $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1 \quad \beta = \dfrac{v}{c} < 1$

任意の方向に運動している場合，

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \gamma\beta_z \\ \gamma\beta_x & & & \\ \gamma\beta_y & & & \\ \gamma\beta_z & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\beta_x \\ \gamma\beta_y \\ \gamma\beta_z \end{pmatrix} \qquad \text{(re2.7)}$$

where $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (\beta_x{}^2 + \beta_y{}^2 + \beta_z{}^2)}}$

静止エネルギーの式 $E = mc^2$ の導出

■　４元運動量の成分の決定

◆　相対論的な運動方程式

相対論的な運動方程式を次のように書く.

$$ma^\mu = m\frac{dU^\mu}{d\tau} = m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu \tag{re3.1}$$

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \tag{re3.2}$$

m ：静止質量，U^μ ：４元速度，a^μ ：４元加速度，p^μ ：４元運動量

F^μ ：４元力（Minkowski 力），f^μ ：Newton 力

$$d\tau = \sqrt{1-\beta^2}dt = \frac{dt}{\gamma},\quad \frac{d}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt},\quad F^\mu = \gamma f^\mu \tag{re3.3}$$

であるから,

$$m\frac{dU^\mu}{dt} = m\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = f^\mu \tag{re3.4}$$

$$\frac{dp^\mu}{dt} = f^\mu \tag{re3.5}$$

◆　４元運動量の時間成分と空間成分の関係

４元速度と４元加速度は直交しているから，４元力（Minkowski 力）や Newton 力とも直交している.

$$\vec{U}\cdot\vec{a} = \vec{U}\cdot\frac{d\vec{U}}{d\tau} = 0 \quad \text{だから} \quad m\vec{U}\cdot\frac{d\vec{U}}{d\tau} = 0 \tag{re3.6}$$

$$m\vec{U}\cdot\vec{F} = 0,\quad \vec{U}\cdot\vec{F} = 0 \tag{re3.7}$$

$$\eta_{\mu\nu}U^\mu F^\nu = U_\nu F^\nu = \gamma U_\nu f^\nu = \gamma^2(cf^0 + v_i f^i) = 0 \tag{re3.8}$$

$v^i = -v_i$　であることに注意して,

$$cf^0 = -v_i f^i = \sum_i v^i f^i = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\boldsymbol{f} \tag{re3.9}$$

静止エネルギーの式 $E = mc^2$ の導出

◆　４元運動量の時間成分

$d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f}$ はエネルギーの増分を意味し，$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\boldsymbol{f}$ はパワー（エネルギー消費率）を意味する．４元運動量の時間成分は，次のように書ける.

$$\frac{dp^0}{dt} = f^0 = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt} \tag{re3.10}$$

$$E = cp^0 = mc^2\gamma,\quad p^0 = \frac{E}{c} = mc\gamma \tag{re3.11}$$

Einstein は上式の積分定数をゼロとした．それが正しかったことは多くの実験により検証されている．成分は次のように書ける.

$$\vec{p} \xrightarrow[O]{} \left(E/c,\ p^1,\ p^2,\ p^3\right) \tag{re3.12}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{p} = m^2\vec{U}\cdot\vec{U} = -m^2c^2 \tag{re3.13}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{p} = -E^2/c^2 + \left(p^1\right)^2 + \left(p^2\right)^2 + \left(p^3\right)^2 \tag{re3.14}$$

$$E^2 = m^2c^4 + \sum_{i=1}^{3}\left(p^i\right)^2c^2 \tag{re3.15}$$

観測者 $\overline{O}$ が４元速度 $\vec{U}_{\text{obs}}$ で運動している場合,

$$\vec{p}\cdot\vec{U}_{\text{obs}} = \vec{p}\cdot c\vec{e}_0 \tag{re3.16}$$

$$\vec{p} \xrightarrow[\overline{O}]{} \left(\overline{E}/c,\ p^{\bar{1}},\ p^{\bar{2}},\ p^{\bar{3}}\right) \tag{re3.17}$$

$$-\vec{p}\cdot\vec{U}_{obs} = \overline{E} \tag{re3.18}$$

上式は，観測者からみたエネルギーの系に依存しない表現である.

$\beta << 1$ のとき，全エネルギーは，テイラー展開を使って,

$$E = cp^0 = mc^2\gamma = mc^2(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{re3.19}$$

$$= mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \cdots\right)$$

$$= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \cdots$$

where　$\beta = \dfrac{v}{c} < 1$

第１項は，静止エネルギー，第２項は，ニュートン力学の運動エネルギーである．

◆　４元運動量の保存

$$\vec{p} \equiv \sum_{(i)} \vec{p}_{(i)} \tag{re3.20}$$

◆　ゼロ運動量系

$$\sum_{(i)} \vec{p}_{(i)} \xrightarrow[\text{CM}]{} \left(E_{\text{TOTAL}} / c,\ 0,\ 0,\ 0\right) \tag{re3.21}$$

where　ＣＭ系；ゼロ運動量系（center of momentum frame）

静止エネルギーの式$E = mc^2$の導出

■　光子

◆　存在しない４元速度

光子はヌル世界線上を運動するから，

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x} = 0 \tag{re4.1}$$

$$d\tau = 0 \tag{re4.2}$$

式（re1.8）では，４元速度が定義できない．

光が静止して見える系はない．

光についてはＭＣＲ系がない．

いかなる系の$\vec{e}_0$も光の世界線に接することはない．

◆　４元運動量

光子がある系でエネルギーEをもち，x方向に運動していれば，

$$p^0 = E,\quad p^x = E,\quad p^y = p^z = 0 \tag{re4.3}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = -E^2 + E^2 = 0 \tag{re4.4}$$

光子はエネルギーに等しい空間的運動量をもつ．

◆　静止質量ゼロの粒子

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2 c^2 = 0 \tag{re4.5}$$

４元運動量がヌルの粒子は，すべて静止質量がゼロでなくてはならない．

静止質量がゼロの粒子は，光子とニュートリノだけである．