

TT ゲージ重力波の偏光

弱い重力場 (weak gravitational field) でのアインシュタイン方程式 (Einstein equation) は, メトリックの摂動 (metric perturbation) を使うことにより線形近似 (linear approximation,) できる. この方程式にトランスバース - トレースレスゲージ (transverse-traceless gauge) 条件といわれる制限を付けると重力波の式が得られる. この重力波がプラス偏光 (plus polarization), クロス偏光 (cross polarization), 円偏光 (circularly polarization) といわれる偏光をもっている.

この書は, シュッツ著が原書でわずか3頁で説明しているものに大幅に書き加えて丁寧に説明したものである. 式の番号はシュッツ著のものである.

■ 2つの自由粒子の測地線方程式

◆ 電磁波と重力波のアナロジー

式 (mx7.3) は,

・マクスウェル方程式のローレンツ・ゲージ条件

であり, 式 (8.33) は

・重力場でのローレンツ・ゲージ条件

である. また, 式 (mx7.6) は,

・マクスウェル方程式から導かれる波動方程式

であり, 式 (8.42) は,

・弱い重力場でのアインシュタイン方程式 (線形理論での場の方程式)

である. これから, ①のアナロジーがある.

電磁波の平面波は, ②式であり, そのアナロジーから, 重力波の平面波は,

③式であることが予想される.

$$\text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A^\mu = A^\mu{}_{,\mu} = 0 \quad (\text{mx7.3})$$

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad (8.33)$$

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = A^{\mu,\nu}{}_{,\nu} = \square A^\mu = -\mu_0 J^\mu$$

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (8.42)$$

TT ゲージ重力波の偏光

$$h^{\mu\nu} \text{ versus } A^\mu, \quad T^{\mu\nu} \text{ versus } J^\mu \quad ①$$

$$A^x = A^x(ct-z), \quad A^y = A^y(ct-z), \quad A^z = 0, \quad A^0 = 0 \quad ②$$

$$\bar{h}^{xx} = \bar{h}^{xx}(ct-z), \quad \bar{h}^{xy} = \bar{h}^{xy}(ct-z), \quad \bar{h}^{yy} = \bar{h}^{yy}(ct-z) \quad ③$$

$$\bar{h}^{\mu 0} = \bar{h}^{\mu 3} = 0, \quad \text{for all } \mu$$

◆ TT ゲージ重力波のリーマン・テンソル

リーマン・テンソル定義式 (8.25) を使って, TT ゲージのリーマン・テンソルは①式となる. これ以外は0になる. これから, TT ゲージにおいては, リーマン・テンソルは式 (9.27') で表される. 添字に座標軸を入れた具体的なリーマン・テンソルは式 (9.27) となる.

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) \quad (8.25)$$

$$R_{x0x0} = -R_{y0y0} = -R_{x0xz} = R_{y0yz} = R_{xzxz} = -R_{yzyz} = -\frac{1}{4} (\bar{h}_{xx} - \bar{h}_{yy})_{,tt} \quad ①$$

$$R_{x0y0} = -R_{x0yz} = R_{xzyz} = -R_{xzy0} = -\frac{1}{2} \bar{h}_{xy,tt}$$

$$R_{j0k0} = R_{j0k0} = -R_{j00k} = -R_{0jk0} = -\frac{1}{2} h_{jk}^{TT}{}_{,00} \quad (9.27')$$

$$R^x{}_{0x0} = R_{x0x0} = -\frac{1}{2} h_{xx}^{TT}{}_{,00} \quad (9.27)$$

$$R^y{}_{0y0} = R_{y0y0} = -\frac{1}{2} h_{yy}^{TT}{}_{,00}$$

$$R^y{}_{0y0} = R_{y0y0} = -\frac{1}{2} h_{yy}^{TT}{}_{,00} = -R^x{}_{0x0}$$

◆ 2つの自由粒子の測地線方程式

もし, 重力波がz方向に伝播しているなら, そのすべての平面の成分を式 (9.21) の形におくことができる.

$$\begin{pmatrix} A_{\alpha\beta}^{TT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.21)$$

TT ゲージ重力波の偏光

$$h_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \exp(ik_{\alpha}x^{\alpha}) \quad (9.2')$$

はじめは波がなく自由粒子が静止しているようなローレンツ系を選び、この系に対する TT ゲージをとる。自由粒子は測地線偏差方程式 (6.87) より、2 粒子間の連結ベクトルは式 (9.25) を満たす。式 (6.87) の左辺は 2 階の共変微分であるが、局所慣性系ではその点においてクリストッフエル記号がすべて消え、2 階の常微分になる。初期値を与えると式 (9.26) が得られる。この式から、その実効的な力による加速度は、式 (9.29) と式 (9.28c) となる。

$$\nabla_{\nu}\nabla_{\nu}\xi^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta}V^{\mu}V^{\nu}\xi^{\beta} \quad (6.87)$$

$$\frac{d^2}{c^2 d\tau^2}\xi^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta}U^{\mu}U^{\nu}\xi^{\beta} \quad (9.25)$$

$$\frac{d^2}{c^2 d\tau^2}\xi^{\alpha} = \frac{d^2}{c^2 dt^2}\xi^{\alpha} = \varepsilon R^{\alpha}{}_{00x} = -\varepsilon R^{\alpha}{}_{0x0} \quad (9.26)$$

where $\bar{U} \rightarrow (c, 0, 0, 0)$, $\bar{\xi} \rightarrow (0, \varepsilon, 0, 0)$ 初期値, ε は 2 粒子間の距離

$$\frac{d^2}{c^2 d\tau^2}\xi^i = \frac{d^2}{c^2 dt^2}\xi^i = -R^i{}_{0j0}\xi^j \quad (9.29)$$

$$= \frac{1}{2}h_{ij,00}^{TT}\xi^j = \frac{1}{2}\frac{d^2}{c^2 dt^2}h_{ij,00}^{TT}\xi^j \quad (9.28c)$$

TT ゲージ重力波の偏光

■ プラス偏光とクロス偏光

◆ 偏光テンソル (polarization tensor)

光の進行方向の単位ベクトル \bar{e}_z に垂直な平面上の直交する単位ベクトル \bar{e}_x , \bar{e}_y を使って、偏光テンソルを定義する。

プラス偏光テンソルは、①式で定義される。クロス偏光テンソルは、②式で定義される。式 (9.2') と式 (9.21) から、③式が得られる。

③式は、偏光テンソルを使えば④式のように一般化できる。式 (9.28c) も偏光テンソルを使えば式 (9.28d) のように一般化できる。

式 (9.28d) の解 (2 粒子間の距離) は、式 (9.28e) となる。

$$\bar{e}_+ = \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x - \bar{e}_y \otimes \bar{e}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ①$$

$$\bar{e}_\times = \bar{e}_x \otimes \bar{e}_y + \bar{e}_y \otimes \bar{e}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ②$$

$$h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT} = A_+ \exp(ik_{\sigma}x^{\sigma}) \quad ③$$

$$h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT} = A_{\times} \exp(ik_{\sigma}x^{\sigma})$$

where $\bar{k} \rightarrow (\omega/c, 0, 0, -\omega/c)$, $k_{\sigma}x^{\sigma} = \omega(t - z/c)$

$$A_+ = A_{xx} = -A_{yy}, \quad A_{\times} = A_{xy} = -A_{yx}$$

$$h_{ij} = A_{ij} \exp(ik_{\sigma}x^{\sigma}) \bar{e}_{pij} \quad ④$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\xi^i = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}h_{ij,00}^{TT}\xi^j = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}A_{ij} \exp(ik_{\sigma}x^{\sigma}) \bar{e}_{pij}\xi^j \quad (9.28d)$$

$$\xi^i = \xi^i(0) + \frac{1}{2}A_{ij} \exp(ik_{\sigma}x^{\sigma}) \bar{e}_{pij}\xi^j(0) \quad (9.28e)$$

◆ プラス偏光 ($A_+ \neq 0$, $A_{\times} = 0$) の場合

式 (9.28d) は、①式を使って⑤式となる。この方程式⑤の解は⑥式となる。

TT ゲージ重力波の偏光

$\xi^1(0), \xi^2(0)$ は、 $t=0$ ではなく、重力波到達前の連結ベクトルの成分であり、円状の2粒子間のその初期値を⑦式とする。

⑦式を使って、 $z=0$ 面の2粒子間の連結ベクトルの成分は⑧式となる。

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \\ 0 & -\frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad \text{⑤}$$

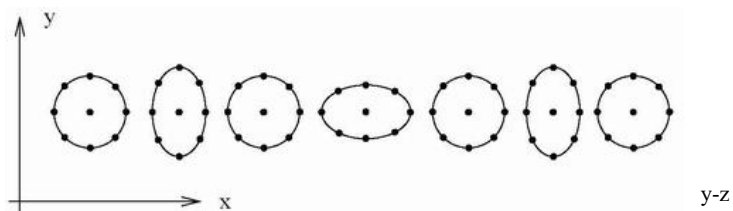
$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \\ 0 & 1 - \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1(0) \\ \xi^2(0) \end{pmatrix} \quad \text{⑥}$$

$$\begin{pmatrix} \xi^1(0) \\ \xi^2(0) \end{pmatrix} = (\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta) \quad \text{where } \varepsilon = \text{最初の円の直径} \quad \text{⑦}$$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_+}{2} \cos \omega t & 0 \\ 0 & 1 - \frac{A_+}{2} \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \cos \theta \\ \varepsilon \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{⑧}$$

ε の係数の計算結果

$(+2\pi n)$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 135^\circ$
$\omega t = 0$	$1 + \frac{A_+}{2}$	1	$1 - \frac{A_+}{2}$	1
$\omega t = \frac{\pi}{2}$	1	1	1	1
$\omega t = \pi$	$1 - \frac{A_+}{2}$	1	$1 + \frac{A_+}{2}$	1
$\omega t = \frac{3}{2}\pi$	1	1	1	1



TT ゲージ重力波の偏光

平面、 $z-x$ 平面のテスト粒子間の距離は変化しない。

◆ クロス偏光 ($A_+ \neq 0, A_x = 0$) の場合

式 (9.28d) は、②式を使って⑨式となる。この方程式⑨の解は⑩式となる。

⑦式を使って、 $z=0$ 面の2粒子間の連結ベクトルの成分は⑪式となる。

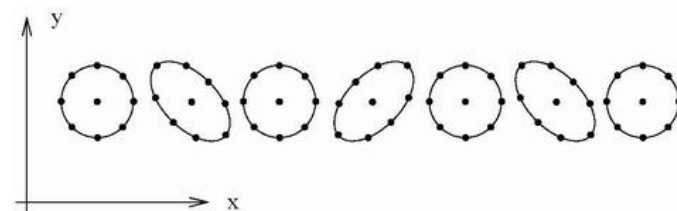
$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad \text{⑨}$$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1(0) \\ \xi^2(0) \end{pmatrix} \quad \text{⑩}$$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{A_x}{2} \cos \omega t \\ \frac{A_x}{2} \cos \omega t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \cos \theta \\ \varepsilon \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{⑪}$$

ε の係数の計算結果

$(+2\pi n)$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 135^\circ$
$\omega t = 0$	1	$1 + \frac{A_x}{2}$	1	$1 - \frac{A_x}{2}$
$\omega t = \frac{\pi}{2}$	1	1	1	1
$\omega t = \pi$	1	$1 - \frac{A_x}{2}$	1	$1 + \frac{A_x}{2}$
$\omega t = \frac{3}{2}\pi$	1	1	1	1



TT ゲージ重力波の偏光

◆ 偏光テンソルの座標回転

バックグラウンドのローレンツ変換の一つは、 x - y 面での x , y 軸の 45 度の回転である。 (x, y) から (x', y') へのそのような回転で偏光が変わらないことを示す。

クロス偏光テンソルを 45 度回転させると、⑫式のようにプラス偏光テンソルと同じになる。したがって、⑬式が成り立ち、座標軸の回転で偏光が変わらないことが判る。

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^T (\bar{e}_+) \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\bar{e}_x) \quad \text{⑫}$$

$$h_{x'y'}^{TT} = h_{xx}^{TT}, \quad h_{x'x'}^{TT} = -h_{xy}^{TT} \quad \text{⑬}$$

◆ プラス偏光の線要素 (line element)

プラス偏光のメトリックは、式 (9.21) から、⑭式のように書ける。これを線要素に書くと、式 (9.149) が得られる。

プラス偏光の波は、座標軸から 45 度の方向の 2 つの自由粒子間の固有距離を変えないことを示す。⑧式に $\theta = 45^\circ$ を代入してから、2 乗距離を計算する。

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{⑭}$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1+h_+)dx^2 + (1-h_+)dy^2 + dz^2 \quad (9.149)$$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_+}{2} \cos \omega t & 0 \\ 0 & 1 - \frac{A_+}{2} \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon / \sqrt{2} \\ \varepsilon / \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

TT ゲージ重力波の偏光

$$\begin{aligned} (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_+}{2} \cos \omega t \right)^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A_+}{2} \cos \omega t \right)^2 \varepsilon^2 \\ &= \left(1 + \frac{A_+^2}{2} \cos^2 \omega t \right) \varepsilon^2 \approx \varepsilon^2 \end{aligned}$$

◆ クロス偏光の線要素 (line element)

クロス偏光のメトリックは、式 (9.21) から、⑮式のように書ける。これを線要素に書くと、式 (9.150) が得られる。

クロス偏光の波は、座標軸の方向の 2 つの自由粒子間の固有距離を変えないことを示す。⑪式に $\theta = 0^\circ$ を代入してから、2 乗距離を計算する。

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_x & 0 \\ 0 & h_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{⑮}$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + 2h_x dx dy + dy^2 + dz^2 \quad (9.150)$$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{A_x}{2} \cos \omega t \\ \frac{A_x}{2} \cos \omega t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = \varepsilon^2 + \frac{A_x^2}{4} \cos^2 \omega t \varepsilon^2 \approx \varepsilon^2$$

◆ 波の解の座標回転

プラス偏光の波の解を 45 度回転させるとクロス偏光の波の解と同じになることを示す。これは楕円が変形する図からも証明できている。

プラス偏光の波の解は、⑥式である。これを 45 度回転させると、クロス偏光の波の解⑩と同じになる。

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \\ 0 & 1 - \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1(0) \\ \xi^2(0) \end{pmatrix} \quad \text{⑥}$$

TT ゲージ重力波の偏光

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \\ 0 & 1 - \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \\ 0 & 1 - \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1(0) \\ \xi^2(0) \end{pmatrix} \quad \text{⑩}
 \end{aligned}$$

TT ゲージ重力波の偏光

■ 円偏光

◆ 円偏光テンソル

円偏光では, TT ゲージの振幅を①式のように定義する. 右 (right-handed) 円偏光テンソルは, ②式のように定義されている. 左 (left-handed) 円偏光テンソルは, ③式のように定義されている.

$$A_+ = A_x = A_R = A_L \neq 0 \quad \text{①}$$

$$\bar{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}_+ + i\bar{e}_x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{②}$$

$$\bar{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}_+ - i\bar{e}_x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{③}$$

◆ 自由粒子の加速度方程式と波の解

右円偏光の場合, 加速度方程式は④式となり, 波の解は⑤式となる. 左円偏光の場合, 加速度方程式は⑥式となり, 波の解は⑦式となる.

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & i \frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ i \frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & -\frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad \text{④}$$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_R}{2} \cos \omega t & \frac{A_R}{2} \sin \omega t \\ \frac{A_R}{2} \sin \omega t & 1 - \frac{A_R}{2} \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \cos \theta \\ \varepsilon \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{⑤}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} -\frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & i \frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ i \frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & \frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad \text{⑥}$$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{A_R}{2} \cos \omega t & \frac{A_R}{2} \sin \omega t \\ \frac{A_R}{2} \sin \omega t & 1 + \frac{A_R}{2} \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \cos \theta \\ \varepsilon \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{⑦}$$

TT ゲージ重力波の偏光

◆ 円偏光での自由粒子の振舞い

右円偏光の ε の係数の計算結果

$(+2\pi n)$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 135^\circ$
$\omega t = 0$	$1 + \frac{A_L}{2}$	1	$1 - \frac{A_L}{2}$	1
$\omega t = \frac{\pi}{2}$	1	$1 + \frac{A_L}{2}$	1	$1 - \frac{A_L}{2}$
$\omega t = \pi$	$1 - \frac{A_L}{2}$	1	$1 + \frac{A_L}{2}$	1
$\omega t = \frac{3}{2}\pi$	1	$1 - \frac{A_L}{2}$	1	$1 + \frac{A_L}{2}$



【注意】MTW phone bookによれば、right-handed modeにおいて、楕円は反時計回りである。

左円偏光の ε の係数の計算結果

$(+2\pi n)$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 135^\circ$
$\omega t = 0$	$1 + \frac{A_R}{2}$	1	$1 - \frac{A_R}{2}$	1
$\omega t = \frac{\pi}{2}$	1	$1 - \frac{A_R}{2}$	1	$1 + \frac{A_R}{2}$
$\omega t = \pi$	$1 - \frac{A_R}{2}$	1	$1 + \frac{A_R}{2}$	1
$\omega t = \frac{3}{2}\pi$	1	$1 + \frac{A_R}{2}$	1	$1 - \frac{A_R}{2}$

TT ゲージ重力波の偏光



◆ プラス偏光テンソルを回転させると円偏光になる

プラス偏光テンソルを回転させてみる。結果の式は、右円偏光テンソルが反時計周りを示す。つまり、right-handed modeで楕円が反時計回りすることを意味する。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}^T (\vec{e}_+) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} & 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(プラス偏光とクロス偏光の定義を使って)

$$= (\vec{e}_+ \cos \theta + \vec{e}_\times \sin \theta)$$

(円偏光の定義を使って)

$$= (\vec{e}_+ + i\vec{e}_\times) \exp i\theta$$

$$= \sqrt{2}(\vec{e}_R) \exp i\theta$$

◆ プラス偏光とクロス偏光の関係の一般化

TT ゲージで振幅 $A^{\mu\nu}$ と $B^{\mu\nu}$ をもつ2つの平面は、 $(A^{\mu\nu})^* B_{\mu\nu} = 0$ のとき、直交する偏光をもつという。ここで $(A^{\mu\nu})^*$ は $A^{\mu\nu}$ の複素共役である。 $A^{\mu\nu}$ と $B^{\mu\nu}$

TT ゲージ重力波の偏光

が直交する偏光をもつとき、 $B^{\mu\nu}$ を 45 度回転すると $A^{\mu\nu}$ に比例することを示す。

$B^{\mu\nu}$ を仮定し、45 度回転すると、

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^T (B^{\mu\nu}) \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{xx} & iB_{xy} \\ iB_{xy} & -B_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -iB_{xy} & B_{xx} \\ B_{xx} & iB_{xy} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$A^{\mu\nu}$ は $C \times$ 上式と仮定すると、 $B_{\mu\nu}$ は添字を下げていることに注意して、

$$(A^{\mu\nu})^* B_{\mu\nu} = C \begin{pmatrix} iB_{xy} & B_{xx} \\ B_{xx} & -iB_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{xx} & -iB_{xy} \\ -iB_{xy} & -B_{xx} \end{pmatrix} = 0$$

【Reference】

Misner, Thorne, & Wheeler 「GRAVITATION」 p952-p954 (FREEMAN)

いわゆる MTW phone book

Petros Souvatzis “The linearized theory of gravitational radiation and the detection of gravitational waves”

Carl Philip Dettmann “General Relativity”

Sean M. Carroll “Lecture_notes_on_General_Relativity”

佐藤真希 「超弦理論的効果による背景重力波の円偏光」 p29-p33