ＳＩ単位（国際単位）とガウス単位の理論体系

ＳＩ単位（国際単位）のテスラとガウス単位のガウスは同じ磁束密度の単位なのに次元が一致しない．が，隠れた次元を考慮すると一致するようになる．マクスウェル方程式もＳＩ単位表現とガウス単位表現の違いは４πだけになる．

単位系の基本量を決める式は「ニュートンの運動方程式」であり，4 つの単位系とも Length Mass Time を選んだ．もう一つの式は「電磁波の速度方程式」であり，普遍定数，真空透磁率，真空誘電率（または電流）の内 2 つを選ぶ．2 つ選ばないと隠れ次元になる．

隠れ次元を考慮するとすべての単位系で基本量は 5 つであり（5 元系），各単位系は次の基本量を選んだ．

ＳＩ単位（国際単位）：ＬＭＴＩ(ｃ)
ガウス単位：ＬＭＴ(ε μ)
静電単位：ＬＭＴ(ε ｃ)
電磁単位：ＬＭＴ(μ ｃ)

ｃは真空光速ではなく普遍定数であり，ε，μとともに隠れ次元である．
4 つの単位系の各電磁気量の次元は 22 頁（または巻頭の URL の Excel）の表を参照．4 つの単位系の次元が一致していることが検証されている．

マクスウェル方程式のＳＩ単位（国際単位）表現とガウス単位表現の式に現れるｃは真空光速と普遍定数が区別されなければならない．真空光速はすべての単位系で速度の次元をもち決して 1 にならないし隠れ次元にもならない．隠れ次元は普遍定数なのである．

ＳＩ単位（国際単位）とガウス単位の理論体系

■　マクスウェル方程式（真空中）の三次元空間ベクトル表現

普遍定数 c_0 を知っていますか？これと光速 c とを区別しない公式は，次元が混乱して，ＳＩ単位での式とガウス単位での式がまったく違うように見えてしまう．普遍定数 c_0 を使うと，単位系の大統一ができてしまうのである．

◆　最もポピュラーなマクスウェル方程式の三次元空間ベクトル表現

・有理化ＳＩ単位（国際単位）

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \qquad \left(\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) \tag{m1.1}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \qquad \left(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j}\right) \tag{m1.2}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{m1.3}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{m1.4}$$

・非有理化ガウス単位

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho \qquad \left(\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho\right) \tag{m1.5}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \qquad \left(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\right) \tag{m1.6}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{m1.7}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{m1.8}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \quad \text{（ガウス単位では，} \varepsilon_0 \to 1\text{）} \tag{m1.9}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \quad \text{（ガウス単位では，} \mu_0 \to 1\text{）} \tag{m1.10}$$

where　$\boldsymbol{D}$；電束密度
$\boldsymbol{H}$；磁場
$\boldsymbol{B}$；磁束密度
$\boldsymbol{E}$；電場
ρ；電荷密度
$\boldsymbol{j}$；電流密度
ε_0；真空誘電率（→１；ガウス単位の隠れ次元）

ＳＩ単位（国際単位）とガウス単位の理論体系

μ_0；真空透磁率（→１；ガウス単位の隠れ次元）

c_0；普遍定数（→１；ＳＩ単位の隠れ次元）

c；真空光速$\cong 3\times 10^{10}\,\mathrm{cm/s} = 3\times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$

ガウス単位での式に幽霊のように現れる真空光速c, 実はこれは普遍定数c_0である．これらを区別しなければ，ＳＩ単位での式とガウス単位での式の物理量の次元は異なることになる．これは隠れ次元を省略した結果である．

◆　隠れ次元を省略しないマクスウェル方程式

・有理化ＳＩ単位（国際単位）（隠れ次元を省略しない式）

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \qquad \left(\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) \tag{m1.11}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \frac{1}{c_0}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{1}{c_0}\boldsymbol{j} \qquad \left(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \frac{c_0}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{c_0}\boldsymbol{j}\right) \tag{m1.12}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{m1.13}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \tag{m1.14}$$

・非有理化ガウス単位（隠れ次元を省略しない式）

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho \qquad \left(\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) \tag{m1.15}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \frac{1}{c_0}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c_0}\boldsymbol{j} \qquad \left(\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \frac{c_0}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 4\pi\frac{\mu_0}{c_0}\boldsymbol{j}\right) \tag{m1.16}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{m1.17}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{m1.18}$$

隠れ次元を省略しなければ，ＳＩ単位での式とガウス単位での式の物理量の次元は一致して，その相違は，有理化と非有理化の差である4π因子の現出だけである．ここでは普遍定数c_0が重要な役割を果たしていて，真空光速cと明確に区別されなければならない．

ＳＩ単位（国際単位）とガウス単位の理論体系

■　ＳＩ単位とガウス単位はどのようにしてつくられたのか.

◆　ＳＩ単位とガウス単位では何を省略するのか？

ＳＩ単位では，$c \cong 3\times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$，$c_0 \equiv 1$（これは重要）と定義する．

ガウス単位では，$\varepsilon_0 \equiv 1$，$\mu_0 \equiv 1$，$c_0 \equiv c \cong 3\times 10^{10}\,\mathrm{cm/s}$と定義する．

だからといって，これらの単位までも無次元にしてしまったらどうなるか.

同じ物理量でもその単位と次元が，ＳＩ単位での表現と，ガウス単位での表現が異なってしまうのである．単位の大きさが異なるのは当然としても，単位の次元が異なれば，公式までも異なってくる．この公式がたいへんな誤解を生じさせるのである.

重要なことは，ＳＩ単位でもガウス単位でも真空光速cの単位は，m/s，cm/sであり，決して$c \equiv 1$とはならないことである.

◆　ＳＩ単位とガウス単位の基本量の決め方

まず，次の“ニュートンの運動方程式”から力学の基本量を選ぶ.

$$f = m\frac{dl}{dt} \tag{m.19}$$

４つの変数あるので，３つまで独立に選ぶことができる．絶対単位系では，力学の基本量は次の３つである．

<u>L</u>ength <u>M</u>ass <u>T</u>ime

◆　電磁気量の基本量の決め方

電磁気量の基本量は，次の“電磁波の速度方程式”により決める．

$$c^2 = \frac{{c_0}^2}{\varepsilon_0\mu_0} \tag{m.20}$$

c；真空光速　　c_0；普遍定数（比例係数であり有次元）

ε_0；真空誘電率　　μ_0；真空透磁率

真空光速cは力学で単位が決まっていて，残りのε_0，μ_0，c_0の３つの変数の内２つの変数まで独立に選ぶことができる．ＳＩ単位では，電流Aと普遍定数c_0を基本量とした．ε_0，μ_0は誘導単位となった．ガウス単位では，ε_0とμ_0を基本量とした．

単位系の基本量は，単位として独立な次元をもち，その単位の大きさは１である．力学量と電磁気量を合わせて基本量は５つ必要であり５元系でなければならない．ところが，ＳＩ単位は，普遍定数c_0を隠れ次元として４元系となり，ガウス単位は，ε_0，μ_0を隠れ次元として３元系となってしまった．隠れ次元は無視されているのではなく，単位の決定には無次元として使われているのである．

したがって，他書では，電磁波の速度方程式に次の式が採用されることが多いが，次元について誤解を生じさせやすい．

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \qquad \text{(m.21)}$$

◆　ＳＩ単位とガウス単位の単位表現とその次元の比較

物理量	記号	SI単位	ガウス単位	SI単位の次元 L	M	T	I	c	ガウス単位の次元 L	M	T	ε	μ
長さ	L	m	cm	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
質量	M	kg	g	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
時間	T	s	s	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
誘電率	ε	F/m	ε_0	−3	−1	4	2	0	0	0	0	1	0
透磁率	μ	H/m	μ_0	1	1	−2	−2	2	0	0	0	0	1
普遍定数	c	1	cm/s	0	0	0	0	1	1	0	−1	1	1
電流	I	A	statA	0	0	0	1	0	2	1	−2	1	0
電荷	Q	C	statC	0	0	1	1	0	2	1	−1	1	0
起電力･電圧･電位	V	V	statV	2	1	−3	−1	0	1	1	−1	−1	0
キャパシタンス	C	F	cm	−2	−1	4	2	0	1	0	0	1	0
電気抵抗	R	Ω	s/cm	2	1	−3	−2	0	−1	0	1	−1	0
導電率	η	S/m	CGSesu	−3	−1	3	2	0	0	0	−1	1	0
電界強度･電場	E	V/m	CGSesu	1	1	−3	−1	0	−1	1	−1	−1	0
電気変位･電束密度	D	C/m^2	CGSesu	−2	0	1	1	0	−1	1	−1	1	0
磁荷	m	Wb	CGSemu	2	1	−2	−1	1	2	1	−1	0	1
インダクタンス	L	H	cm	2	1	−2	−2	2	1	0	0	0	1
磁界強度･磁場	H	A/m	Oe	−1	0	0	1	−1	−1	1	−1	0	−1
磁気誘導･磁束密度	B	T	Gs	0	1	−2	−1	1	−1	1	−1	0	1
起磁力･磁位	F	A	Gb	0	0	0	1	−1	1	1	−1	0	−1
磁束	Φ	Wb	Mx	2	1	−2	−1	1	2	1	−1	0	1
磁気抵抗	R	A/Wb		−2	−1	2	2	−2	−1	0	0	0	−1
power	P	W	erg/s	2	1	−3	0	0	2	1	−3	0	0
energy	T	J	erg	2	1	−2	0	0	2	1	−2	0	0
force	F	N	dyn	1	1	−2	0	0	1	1	−2	0	0

図 m.1　ＳＩ単位とガウス単位の単位表現とその次元の比較

上の表は表計算ソフトでつくったものだが，岩波「理化学辞典」をはじめ多くの物理書と厳密に比較され正しいことが検証されている．

例えば, 磁束密度を見てほしい．ＳＩ単位のテスラＴとガウス単位のガウスGsでは基本量が異なるので，基本量を元にした次元の数は異なるのだが，基本量の次元を換算してみれば，実は同次元であることが判る．
しかし，ＳＩ単位の隠れ次元c_0，ガウス単位の隠れ次元ε_0，μ_0を無次元としてしまうと，同じ物理量でも異なる次元となってしまうのである．

ＳＩ単位（国際単位）とガウス単位の理論体系

◆　ＳＩ単位とガウス単位の成り立ちを整理する

ＳＩ単位とガウス単位には，３つの相違点がある．

・基本量が異なる．

ＳＩ単位は，Length Mass Time 電流と隠れ次元として普遍定数 c_0 を使う．LMTI(c)と書く．

ガウス単位は，Length Mass Time と隠れ次元として真空誘電率 ε_0，真空透磁率 μ_0 を使う．LMT($\varepsilon\ \mu$)と書く．

・基本単位の大きさが異なる．

ＳＩ単位は，Meter Kilogram Second Ampere（MKSA）を使う．

ガウス単位は，Centimeter Gram Second（CGS）を使う．

・全立体角 4π steradian の表現方法が異なる．

ＳＩ単位は，4π 因子が現れない“有理化単位”である．

ガウス単位は，4π 因子が現れてしまう“非有理化単位”である．

ＳＩ単位（国際単位）とガウス単位の理論体系

■　電磁気の公式（隠れ次元を省略しない式）（表中の c は普遍定数）

公式の名称	有理化ＳＩ単位	非有理化ガウス単位
ガウスの法則（静電気）	$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}$	$f = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}$
点電荷に働く力	$F = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right)$	$F = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right)$
点電荷による電位	$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r}$	$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{r}$
点電荷による電場	$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}$	$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{r^2}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}$
電気変位と電気分極	$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$
ガウスの法則（真空中）（電束）	$4\pi\Phi = \int\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$	$\Phi = \int\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{4\pi q}{\varepsilon_0}$
ガウスの法則（誘電体）	$\int\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = q$	$\int\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi q$
静電容量	$C = \frac{Q}{V}$	$C = \frac{Q}{V}$
電流と電荷	$I = \frac{dQ}{dt}$	$I = \frac{dQ}{dt}$
オームの法則	$R = \frac{V}{I}$	$R = \frac{V}{I}$
ジュールの法則	$J = RI^2$	$J = RI^2$
電流密度と電場	$\boldsymbol{i} = \eta\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{i} = \eta\boldsymbol{E}$
ガウスの法則（静磁気）	$f = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m_1 m_2}{r^2}$	$f = \frac{1}{\mu_0}\frac{m_1 m_2}{r^2}$
電流と磁場（真空中）（アンペールの法則）	$\oint\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{1}{c}\mu_0 I$	$\oint\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{1}{c}4\pi\mu_0 I$
電流と磁場（物質中）（アンペールの法則）	$\oint\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{1}{c}I$	$\oint\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}I$
電磁誘導	$\oint\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$	$\oint\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$

（表 m.2）

ＳＩ単位（国際単位）とガウス単位の理論体系

公式の名称	有理化ＳＩ単位	非有理化ガウス単位
磁気誘導 （ビオサバールの法則）	$4\pi \boldsymbol{H} = I\dfrac{d\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{cr^2}$	$\boldsymbol{H} = I\dfrac{d\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{cr^2}$
磁気力	$d\boldsymbol{F} = \dfrac{I}{c}(d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B})$	$d\boldsymbol{F} = \dfrac{I}{c}(d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B})$
ソレノイド中の磁場	$H = \dfrac{1}{c}IN$	$H = \dfrac{4\pi}{c}IN$
電流密度による磁場	$4\pi d\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{i}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{cr^2}dv$	$d\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{i}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{cr^2}dv$
	$d\boldsymbol{A} = \dfrac{\mu}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{i}}{cr}dv$	$d\boldsymbol{A} = \mu\dfrac{\boldsymbol{i}}{cr}dv$
磁気誘導と磁化・磁気分極 （EH 対応系　J:磁化） （EB 対応系　J:磁気分極 M:磁化）	$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}$ $= \mu_0\boldsymbol{H} + \mu_0\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{J}$ $= \mu_0\boldsymbol{H} + \mu_0\boldsymbol{M}$
電磁場のエネルギー密度	$U = \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon\boldsymbol{E}^2 + \dfrac{1}{\mu}\boldsymbol{B}^2\right)$	$4\pi U = \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon\boldsymbol{E}^2 + \dfrac{1}{\mu}\boldsymbol{B}^2\right)$
インダクタンスよる起電力	$e = -\dfrac{1}{c^2}L\dfrac{dI}{dt}$	$e = -\dfrac{1}{c^2}L\dfrac{dI}{dt}$
磁荷	$m = \int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$	$m = 4\pi\int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$
起磁力	$F = \int\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}$	$F = \int\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}$
磁束	$\Phi = \int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$	$\Phi = \int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$
磁気抵抗	$R = \dfrac{F}{\Phi}$	$R = \dfrac{F}{\Phi}$
電流間の力	$F = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{1}{c^2}\dfrac{2I_1I_2}{r}$	$F = \mu_0\dfrac{1}{c^2}\dfrac{2I_1I_2}{r}$
電磁波の伝播速度	$\chi = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon_S\mu_S}}$	$\chi = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon_S\mu_S}}$

（表 m.3）

ＳＩ単位（国際単位）とガウス単位の理論体系

公式の名称	有理化ＳＩ単位	非有理化ガウス単位
ベクトルポテンシャル	$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$ $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$ $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$
波動方程式 （ローレンツゲージ）	$\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \dfrac{\varepsilon\mu}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ $\left(\Delta - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{c}\mu\boldsymbol{i}$ $\left(\Delta - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$	$\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \dfrac{\varepsilon\mu}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ $\left(\Delta - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = \dfrac{4\pi}{c}\mu\boldsymbol{i}$ $\left(\Delta - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = 4\pi\dfrac{\rho}{\varepsilon}$
波動方程式 （クーロンゲージ）	$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$ $\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$ $\left(\Delta - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}$ $= \dfrac{1}{c}\mu\boldsymbol{i} + \dfrac{\varepsilon\mu}{c}\mathrm{grad}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$	$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$ $\Delta\varphi = -4\pi\dfrac{\rho}{\varepsilon}$ $\left(\Delta - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}$ $= \dfrac{4\pi}{c}\mu\boldsymbol{i} + \dfrac{\varepsilon\mu}{c}\mathrm{grad}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$
ボーア磁子	$\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_ec}$	$\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_ec}$
リュードベリ定数	$R_\infty = \left(\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\dfrac{m_e}{4\pi\hbar^3c}$	$R_\infty = \left(\dfrac{e^2}{\varepsilon_0}\right)^2\dfrac{m_e}{4\pi\hbar^3c}$
サイクロン振動数	$\omega_c = \dfrac{eB}{mc}$	$\omega_c = \dfrac{eB}{mc}$
プラズマ振動数	$\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{\varepsilon_0m}}$	$\omega_p = \sqrt{\dfrac{4\pi ne^2}{\varepsilon_0m}}$
ホール定数（金属）	$R_H = \dfrac{1}{nec}$	$R_H = \dfrac{1}{nec}$
表皮効果の深さ	$\delta = \sqrt{\dfrac{1}{\mu}\dfrac{2c^2}{\sigma\omega}}$	$\delta = \sqrt{\dfrac{1}{\mu}\dfrac{2c^2}{4\pi\sigma\omega}}$

（表 m.4）

◆　有理化式を非有理化式に変換する方法

隠れ次元を省略してない式では，有理化ＳＩ単位での式と非有理化ガウス単位での式との差は4π因子だけである．有理化単位での式を非有理化単位での式に変換する方法は下表にある物理量の4π因子を消去するだけである．

例として，次のようにする．ただし，有理化単位での式に4π因子をいつも明示してあるわけではない．

$$4\pi\varepsilon_0 \to \varepsilon_0$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \to \mu_0$$

静電気，静磁気の式には，有理化単位での式に4π因子が現れ，電磁界の式には，非有理化単位での式に4π因子が現れやすい．

誘電率	$4\pi\varepsilon$
真空の誘電率	$4\pi\varepsilon_0$
透磁率	$\mu/4\pi$
真空の透磁率	$\mu_0/4\pi$
電束	$4\pi\Phi$
電束密度・電気変位	$4\pi D$
磁位	$4\pi\Phi_m$
磁場・磁界強度	$4\pi H$
磁荷	$m/4\pi$
磁気２重層	$q_m/4\pi$
磁気双極子モーメント	$j/4\pi$
磁気抵抗	$4\pi R$
起磁力	$4\pi F$
磁気分極	$J/4\pi$
磁化	$4\pi M$
磁化率	$\chi/(4\pi)^2$
減磁係数	$4\pi N$

（表 m.5　4π因子が現れる物理量）

Update 2015.06.11
2011.02.04
ＳＩ単位（国際単位）とガウス単位の理論体系

■　磁荷・磁場は物理的に実在しない

我々は，便宜上，磁場を導入する時，まず電流の周りに生じる磁場の方向をアンペールの右ネジの規則で決め，その磁場から動いている電荷が受けるローレンツ力をフレミングの左手の規則を決める．しかし，そのような磁場がどのようにして生じるのかの説明はないのが普通である．

下図のように，電線の電流が右へ流れ，負電荷粒子（電子）が左へ飛行している場合（フレミングの左手の中指は右向き），粒子系から見ると，電線とその電流は右へ移動している．その中の正電荷の方が負電荷よりも速く移動している．従って，正電荷の方がローレンツ収縮が大きく，電線は正に帯電して，飛行負電荷粒子はクーロン力で引きつけられる．

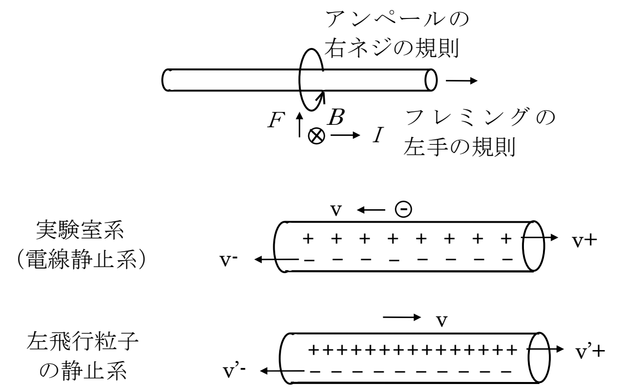

図 m.6　磁場内の電流（動いている電荷）が受ける力（ローレンツ力）

左飛行している粒子から見て，電線は右へ移動している

電線電流の＋電荷の方が－電荷より相対速度が高い

電線電流の＋電荷の方が－電荷よりローレンツ収縮率が大きい

電線電流の＋電荷の方が－電荷より電荷密度が大きい

電線電流が＋に帯電している

左飛行している粒子はクーロン力を受ける

結論；磁力・ローレンツ力は相対論的クーロン力である

■　ローレンツ力の公式の導出

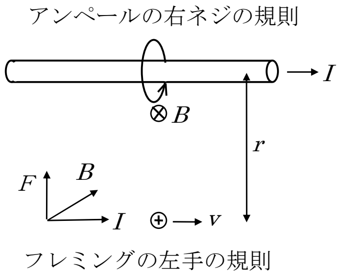

図 m.7　動いている電荷が受ける力

磁力・ローレンツ力は相対論的クーロン力である．このローレンツ力を，磁場を導入しないで，相対論から導出する方法を示す．
上図のように，固定された電線電流 I から動いている電荷が受ける力をローレンツ力という．一般的には，電線電流 I がつくる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を算出し，その磁場中を動いている電荷が受ける力 F を算出する．即ち，次式を導出する．フレミングの左手の規則の中指の I は，飛行粒子がつくる電流のことで電線電流の I ではない．

$$\boldsymbol{F} = \frac{q}{c_0}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad \text{(m.22)}$$

上式は，電場 $\boldsymbol{E} = 0$ の場合の式であり，c_0 は光速ではなく，普遍定数のことである．ＳＩ単位では，$c_0 = 1$ である．ここでは，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を導入しないで，相対論から直接にローレンツ力の公式（上式）を導出する．
下図のように，実験室系から見ると，電線電流は帯電していない．逆に，動いている粒子系から見ると，＋電荷と－電荷と相対速度が異なり，ローレンツ収縮率が異なるので，電線電流が帯電している．右飛行粒子からは，－に，左飛行粒子からは，＋に帯電しているように見える．この帯電から受ける相対論的クーロン力をローレンツ力という．

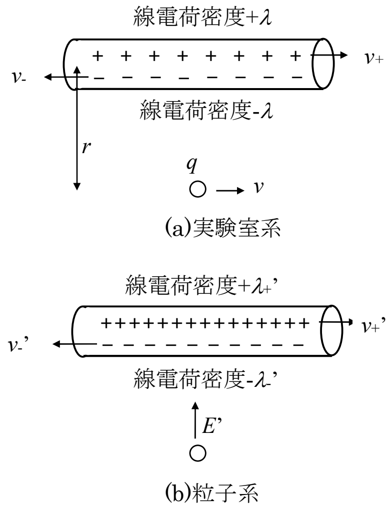

図 m.8　実験室系と粒子系からみた電線電流の線電荷密度

線電荷の粒子系における相対論的相対速度は次式となる．

$$v_+' = \frac{v_+ - v}{1 - v_+ v / c^2} \qquad v_-' = \frac{v_- + v}{1 + v_- v / c^2}$$

$$\beta_+' = \frac{\beta_+ - \beta}{1 - \beta_+ \beta} \qquad \beta_-' = \frac{\beta_- + \beta}{1 + \beta_- \beta}$$

$$\text{where} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \beta_+ = \frac{v_+}{c} \quad \beta_- = \frac{v_-}{c} \quad \beta_+' = \frac{v_+'}{c} \quad \beta_-' = \frac{v_-'}{c}$$

粒子系における線電荷密度を算出するには，一旦，線電荷静止系に換算して，次に粒子系に換算する．即ち次式となる．

$$\lambda_+' = \frac{\gamma_+'}{\gamma_+}\lambda \qquad \lambda_-' = \frac{\gamma_-'}{\gamma_-}\lambda$$

$$\text{where} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{等々}$$

図 m.8 のように，粒子系における線電荷がつくる電場は次式（有理化式）となる．

$$E'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2(\lambda_+'-\lambda_-')}{r}$$

$$\lambda_+'-\lambda_-'=\left(\frac{\gamma_+'}{\gamma_+}-\frac{\gamma_-'}{\gamma_-}\right)\lambda$$

$$\frac{\gamma_+'}{\gamma_+}-\frac{\gamma_-'}{\gamma_-}=\frac{\sqrt{1-\beta_+{}^2}}{\sqrt{1-\beta_+'^2}}-\frac{\sqrt{1-\beta_-{}^2}}{\sqrt{1-\beta_-'^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\beta_+{}^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_+-\beta}{1-\beta_+\beta}\right)^2}}-\frac{\sqrt{1-\beta_-{}^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_-+\beta}{1+\beta_-\beta}\right)^2}}$$

$$=\frac{(1-\beta_+\beta)\sqrt{1-\beta_+{}^2}}{\sqrt{1-2\beta_+\beta+\beta_+{}^2\beta^2-\beta_+{}^2+2\beta_+\beta-\beta^2}}$$

$$-\frac{(1+\beta_-\beta)\sqrt{1-\beta_-{}^2}}{\sqrt{1+2\beta_-\beta+\beta_-{}^2\beta^2-\beta_-{}^2-2\beta_-\beta-\beta^2}}$$

$$=\frac{(1-\beta_+\beta)\sqrt{1-\beta_+{}^2}}{\sqrt{1-\beta_+{}^2}\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{(1+\beta_-\beta)\sqrt{1-\beta_-{}^2}}{\sqrt{1-\beta_-{}^2}\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$=\frac{-\beta(\beta_++\beta_-)}{\sqrt{1-\beta^2}}=-\gamma\beta(\beta_++\beta_-)$$

$$\lambda_+'-\lambda_-'=-\gamma\beta(\beta_++\beta_-)\lambda=-\gamma\frac{v}{c}\frac{v_++v_-}{c}\lambda=-\gamma\frac{vI}{c^2}$$

（where　$I=v_+\lambda+v_-\lambda$）

$$E'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2(\lambda_+'-\lambda_-')}{r}\qquad F'=-qE'$$

$$F=\frac{F'}{\gamma}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qvI}{c^2r}=\frac{\mu_0}{4\pi c_0{}^2}\frac{2qvI}{r}=\frac{q}{c_0}v\frac{\mu_0}{4\pi c_0}\frac{2I}{r}$$

$$=\frac{q}{c_0}vB$$

where　$\varepsilon_0\mu_0=\frac{c_0{}^2}{c^2}$,　$B=\frac{\mu_0}{4\pi c_0}\frac{2I}{r}$

式（m.22）が導出できた．

■　ＳＩ単位とガウス単位など電磁気の単位の発展の歴史

◆　ＳＩ単位とガウス単位など電磁気の単位の種類

電磁気の単位系の種類は多いが，歴史的によく使われたのは，

CGS　非有理化　静電単位
CGS　非有理化　ガウス単位
CGS　非有理化　電磁単位
MKSA　有理化　ジオルジ単位（ＳＩ単位）

の４種類である．もちろん，この４種類共，有理化単位にも非有理化単位にも変換することができる．現在の主流は，いうまでもなく

CGS 非有理化ガウス単位
MKSA 有理化ジオルジ単位（ＳＩ単位）

の２つである．ＳＩ単位は，歴史的には図 u. 1 のように，電磁単位→実用単位→ジオルジ単位→ＳＩ単位と発展してきた（詳細は後述）．

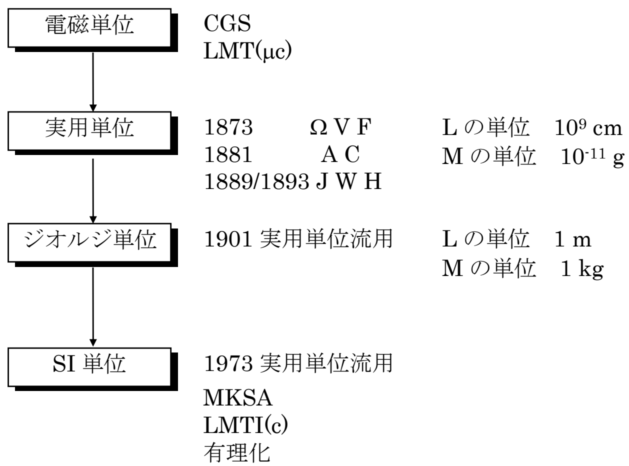

図 u. 1　ＳＩ単位の歴史

◆　電磁気の単位系の基本量はどのようにして決めるのか．

電磁気量の単位系は最初には，静電単位，ガウス単位，電磁単位の３つが誕

生した．その経緯を詳細に述べる．

電磁気の単位系の基本量は，電磁波の速度方程式（次式）により決める．

$$c^2 = \frac{{c_0}^2}{\varepsilon_0 \mu_0} \qquad \text{(u.1)}$$

c ；真空の光速　　　　　c_0 ；普遍定数（比例係数であり有次元）

ε_0 ；真空の誘電率　　　　μ_0 ；真空の透磁率

光速cは力学で単位が決まっていて，基本量はLMT系であり，基本単位はCGS系が一般的であった．残りのεμc の3変数の内2変数まで独立に選ぶことができる．基本量の選び方から次の３つの単位系ができた．

静電単位　　　LMT(εc)系

ガウス単位　　LMT(εμ)系

電磁単位　　　LMT(μc)系

		非有理化				有理化
		静電単位	ガウス単位	電磁単位	実用単位	SI単位
		LMT(εc)	LMT(εμ)	LMT(μc)	LMT(μc)	LMTI(c)
長さ	L		1 cm		10^9 cm	1 m
質量	M		1 g		10^{-11} g	1 kg
時間	T		1 s		1 s	1 s
誘電率	ε	1 [ε_0]	1 [ε_0]	$s^2/cm^2=\alpha^2 \varepsilon_0$	$s^2/10^{18}cm^2=\alpha^2 10^{-18} \varepsilon_0$	$F/m=4\pi \beta^2 10^{-7} \varepsilon_0$
透磁率	μ	$s^2/cm^2=\alpha^2 \mu_0$	1 [μ_0]	1 [μ_0]	1 [μ_0]	$H/m=(4\pi)^{-1} 10^7 \mu_0$
普遍定数	c	1 [0]	cm/s=c/α	1 [0]	1 [0]	1 [0]
電流	I	1 statA	1 statA	1 abA	1 A	1 A
電荷	Q	1 statC	1 statC	1 abC	1 C	1 C

　は，基本量(の単位)

$c = \alpha$ cm/s $= \beta$ m/s,　$\alpha \sim 3\times10^{10}$,　$\beta \sim 3\times10^{8}$

図 u.２　電磁気量の単位の基本量

◆　LMT ３元系の見かけ単位

上記の３つの単位系は，εμc を単位として表現しないのが普通であり，見かけ上，LMT ３元系となる．

ガウス単位では，$\varepsilon_0 = 1$，$\mu_0 = 1$とするので，

$$c_0 = c = \alpha \text{ cm/s} \quad (\alpha \approx 3\times10^{10}) \qquad \text{(u.3)}$$

静電単位では，$\varepsilon_0 = 1$，$c_0 = 1$とするので，

$$\mu_0 = 1/c^2 = (1/\alpha^2)\text{s}^2/\text{cm}^2 \qquad \text{(u.4)}$$

電磁単位では，$\mu_0 = 1$，$c_0 = 1$とするので，

$$\varepsilon_0 = 1/c^2 = (1/\alpha^2)\text{s}^2/\text{cm}^2 \qquad \text{(u.5)}$$

これらは見かけ上，εμc の次元は現れないが，厳密には，LMT の他にεμc の内２つを基本単位とするので，その次元を省略しなければ，単位系の間で次元が異なることは避けることができる．

上記の３つの単位系では，電荷の単位は誘導単位であり，静電気のクーロンの法則（次式）から導かれる．磁荷の単位も同様に，静磁気のクーロンの法則（次式）から導かれる．

$$f = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}, \quad f = \frac{1}{\mu_0}\frac{m^2}{r^2} \qquad \text{(u.6)}$$

静電単位とガウス単位では電気関係の単位が同じであり，電磁単位とガウス単位では，磁気関係の単位が同じである（詳細は後述）．もちろん，この世界に磁荷は存在しない．磁気単極は新しい素粒子として探しているが，電磁気の世界では，単極の磁荷は孤立して存在しない．

◆　電磁単位から実用単位への発展

ＳＩ単位系でなじみのある単位である

オーム，ボルト，ファラッド，アンペア，

クーロン，ジュール，ワット，ヘンリー（図 u.1 参照）

は，1873～1893 年に定められ，実用単位と呼ばれた．その導出方法は，図 u.3 のように基本量を電磁単位と同じにして，長さ L と質量 M の単位を

$$\text{cm} \to 10^9\text{cm}, \quad \text{g} \to 10^{-11}\text{g} \qquad \text{(u.7)}$$

と置き換えるだけである．実用単位と電磁単位の比は，L の次元をϕ，M の次元をψとすると，次式により算出できる．

$$\text{実用単位／電磁単位} = 10^{9\phi}10^{-11\psi} \qquad \text{(u.8)}$$

		電磁単位記号	実用単位記号	電磁単位次元		単位の比 実用単位/電磁単位	SI単位次元		単位の比 SI単位/実用単位
				L	M		L	M	
長さ	L	cm	10^9cm	1	0	10^9	1	0	10^{-7}
質量	M	g	10^{-11}g	0	1	10^{-11}	0	1	10^{14}
抵抗	R	abΩ	Ω	1	0	10^9	2	1	1
電位	V	abV	V	3/2	1/2	10^8	2	1	1
ｷｬﾊﾟｼﾀﾝｽ	C	abF	F	−1	0	10^{-9}	−2	−1	1
電流	I	abA	A	1/2	1/2	10^{-1}	0	0	1
電荷	Q	abC	C	1/2	1/2	10^{-1}	0	0	1
energy	T	erg	J	2	1	10^7	2	1	1
power	P	erg/s	W	2	1	10^7	2	1	1
ｲﾝﾀﾞｸﾀﾝｽ	L	abH	H	1	0	10^9	2	1	1
			計算方法	ϕ	ϕ	$10^{9\phi}10^{-11\phi}$	κ	λ	$10^{-7\kappa}10^{14\lambda}$

図 u.3　電磁単位・実用単位・ＳＩ単位変換表

◆　実用単位からジオルジ単位への発展

ジオルジは 1901 年ジオルジ単位を発見した（図 u.1 参照）．それは，図 u.3 のように８個の実用単位の大きさを変えないまま，長さ L と質量 M の単位を次のように置き換えたものである．このジオルジ単位系では，８個の実用単位の L と M の指数の比が 2 : 1 であるので，L の単位を 1/n にして，M の単位を n^2 倍してもその単位の大きさは変わらないことになる．

長さ L の単位 10^9cm を 10^{-7} 倍して 1 m,　　(u.9)

質量 M の単位 10^{-11}g を 10^{14} 倍して 1 kg　　(u10)

としたものをジオルジ単位という．ジオルジ単位と実用単位の比は，L の次元をκ，M の次元をλとすると，次式により算出できる．もちろん，８個の実用単位は，その比は 1 であり，そのままジオルジ単位になる．このジオルジ単位はそのまま現在のＳＩ単位に引き継がれた．

$$\text{ＳＩ単位／実用単位} = 10^{-7\kappa}10^{14\lambda} \qquad \text{(u.11)}$$

■　電磁気の単位の大きさと次元を厳密に導出する方法

◆　電磁気の単位系は５元系でなければならない

静電単位，ガウス単位，電磁単位は見かけ上，LMT ３元系，ＳＩ単位は見かけ上，LMTI ４元系であるが，εμc の内２変数を基本量とする５元系を採用すれば，単位系間の単位の次元の変換や単位の大きさの変換は機械的に厳密にできるようになる．

また，単位系間の次元の矛盾はなくなり，同じ物理量は同じ次元になる．このようにして，テスラ T とガウス Gs，ウェーバ Wb とエルステッド Oe が厳密に同次元であることが証明でき，その変換は機械的にできるようになる．

◆　単位系間の単位の次元の変換

便宜上 3 元系の i 単位系と j 単位系を考え，i の各量の次元と i の基本量の j での次元を既知とし，i から j への変換式を導出する（詳細は後述）．

i 単位系の基本単位を，A_i，B_i，C_i　　(x.1)

j 単位系の基本単位を，X_j，Y_j，Z_j

とし，j 単位系の単位 A_j，B_j，C_j の次元は，次式のように既知とする．

$$A_j = X_j^{ax}Y_j^{ay}Z_j^{az} \qquad \text{(x.2)}$$

$$B_j = X_j^{bx}Y_j^{by}Z_j^{bz}$$

$$C_j = X_j^{cx}Y_j^{cy}Z_j^{cz}$$

次元 D の i 単位系の単位を D_i，j 単位系の単位を D_j とし，それの次元を次式とする．

$$D_i = A_i^{\alpha} B_i^{\beta} C_i^{\gamma} \qquad \text{(x.3)}$$

$$D_j = X_j^{\kappa} Y_j^{\lambda} Z_j^{\mu}$$

α，β，γ が既知である場合，κ，λ，μ は次式となり，単位系間の単位の次元の変換式が得られた．

$$\kappa = a_x\alpha + b_x\beta + c_x\gamma \qquad \text{(x.4)}$$

$$\lambda = a_y\alpha + b_y\beta + c_y\gamma$$

$$\mu = a_z\alpha + b_z\beta + c_z\gamma$$

◆　単位系間の単位の大きさの変換

便宜上，３元系を考え，前項と同じ記号を使う．i の基本量の i での単位と j での単位の大きさの比は既知とする．次元 D の i，j での単位を D_i，D_i とすると，その大きさの比は次式となり，単位系間の単位の大きさの変換式が得られた（詳細は後述）．

$$D_i/D_j = (A_i/A_j)^{\alpha}\,(B_i/B_j)^{\beta}\,(C_i/C_j)^{\gamma} \qquad \text{(x.5)}$$

◆　電磁気の単位系間の単位の次元変換ソフト

電磁気の単位の次元の変換は，５元系を採用すれば，前述のように機械的にできる．表計算ソフトを利用する例を下図に示す．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
3			SI単位					ガウス単位				
4	物理量	次元	L	M	T	I	c	L	M	T	ε	μ
5	長さ	L	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
6	質量	M	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
7	時間	T	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
8	誘電率	ε	−3	−1	4	2	0					
9	透磁率	μ	1	1	−2	−2	2					
10	普遍定数	c	0	0	0	0	1	1	0	−1	0.5	0.5
11	電流	I	0	0	0	1	0	1.5	0.5	−2	0.5	0
12	電荷	Q	0	0	1	1	0					
13	起電力･電圧･電位	V	2	1	−3	−1	0	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
14	キャパシタンス	C	−2	−1	4	2	0					
15	電気抵抗	R	2	1	−3	−2	0					
16	導電率	η	−3	−1	3	2	0					
17	電界強度･電場	E	1	1	−3	−1	0					
18	電気変位･電束密度	D	−2	0	1	1	0					
19	磁荷	m	2	1	−2	−1	1					
20	インダクタンス	L	2	1	−2	−2	2					
21	磁界強度･磁場	H	−1	0	0	1	−1					
22	磁気誘導･磁束密度	B	0	1	−2	−1	1					
23	起磁力･磁位	F	0	0	0	1	−1					
24	磁束	Φ	2	1	−2	−1	1					
25	磁気抵抗	R	−2	−1	2	2	−2					
26	power	P	2	1	−3	0	0					
27	enerjy	T	2	1	−2	0	0					
28	force	F	1	1	−2	0	0					

図 x.1　電磁気量の単位の次元の変換式

この例では，LMTIc 系のすべての量の次元は既知であるとする．そして，基本量 LMTIc の変換先の単位系での次元も既知であるとする．その計算結果を下図に示す．

		静電単位					ガウス単位					電磁単位					SI単位				
物理量	次元	L	M	T	ε	c	L	M	T	ε	μ	L	M	T	μ	c	L	M	T	I	c
長さ	L	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
質量	M	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
時間	T	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
誘電率	ε	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	−2	0	2	−1	2	−3	−1	4	2	0
透磁率	μ	−2	0	2	−1	2	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	−2	−2	2
普遍定数	c	0	0	0	0	1	1	0	−1	0.5	0.5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
電流	I	1.5	0.5	−2	0.5	0	1.5	0.5	−2	0.5	0	0.5	0.5	−1	−0.5	1	0	0	0	1	0
電荷	Q	1.5	0.5	−1	0.5	0	1.5	0.5	−1	0.5	0	0.5	0.5	0	−0.5	1	0	0	1	1	0
起電力･電圧･電位	V	0.5	0.5	−1	−0.5	0	0.5	0.5	−1	−0.5	0	1.5	0.5	−2	0.5	−1	2	1	−3	−1	0
キャパシタンス	C	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	−1	0	2	−1	2	−2	−1	4	2	0
電気抵抗	R	−1	0	1	−1	0	−1	0	1	−1	0	1	0	−1	1	−2	2	1	−3	−2	0
導電率	η	0	0	−1	1	0	0	0	−1	1	0	−2	0	1	−1	2	−3	−1	3	2	0
電界強度･電場	E	−0.5	0.5	−1	−0.5	0	−0.5	0.5	−1	−0.5	0	0.5	0.5	−2	0.5	−1	1	1	−3	−1	0
電気変位･電束密度	D	−0.5	0.5	−1	0.5	0	−0.5	0.5	−1	0.5	0	−1.5	0.5	0	−0.5	1	−2	0	1	1	0
磁荷	m	0.5	0.5	0	−0.5	1	1.5	0.5	−1	0	0.5	1.5	0.5	−1	0.5	0	2	1	−2	−1	1
インダクタンス	L	−1	0	2	−1	2	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	2	1	−2	−2	2
磁界強度･磁場	H	0.5	0.5	−2	0.5	−1	−0.5	0.5	−1	0	−0.5	−0.5	0.5	−1	−0.5	0	−1	0	0	1	−1
磁気誘導･磁束密度	B	−1.5	0.5	0	−0.5	1	−0.5	0.5	−1	0	0.5	−0.5	0.5	−1	0.5	0	0	1	−2	−1	1
起磁力･磁位	F	1.5	0.5	−2	0.5	−1	0.5	0.5	−1	0	−0.5	0.5	0.5	−1	−0.5	0	0	0	0	1	−1
磁束	Φ	0.5	0.5	0	−0.5	1	1.5	0.5	−1	0	0.5	1.5	0.5	−1	0.5	0	2	1	−2	−1	1
磁気抵抗	R	1	0	−2	1	−2	−1	0	0	0	−1	−1	0	0	−1	0	−2	−1	2	2	−2
power	P	2	1	−3	0	0	2	1	−3	0	0	2	1	−3	0	0	2	1	−3	0	0
enerjy	T	2	1	−2	0	0	2	1	−2	0	0	2	1	−2	0	0	2	1	−2	0	0
force	F	1	1	−2	0	0	1	1	−2	0	0	1	1	−2	0	0	1	1	−2	0	0

図 x.2　電磁気量の単位の次元

◆　電磁気の単位系間の単位の大きさの変換ソフト

電磁気の単位の大きさの変換は，５元系を採用すれば，上述のように機械的にできる．表計算ソフトを利用する例を下図に示す．

この例では，LMTIc 系のすべての量の次元は既知であるとする．そして，基本量 LMTIc の単位の大きさの比も既知であるとする．長さ L，質量 M の単位の大きさの比は，その単位の定義から決まっている．普遍定数 c_0（光速ではない）の単位の大きさの比は，ＳＩ単位で，$c_0 = 1$，ガウス単位で，$c_0 = c = \alpha$ cm/s であるから，[ＳＩの c_0]/[ガウスの c_0]$=\alpha$ となる．電流 I の単位の大きさの比は，図 u.2 と図 u.3 から判るように，

$$\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{(x.6)}$$

である．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2					SI単位の次元					SI単位／	
3			ガウス	SI						ガウス単位	
4	物理量	記号	単位	単位	L	M	T	I	c	α	10
5	長さ	L	cm	m	1	0	0	0	0	0	2
6	質量	M	g	kg	0	1	0	0	0	0	3
7	時間	T	s	s	0	0	1	0	0	0	0
8	誘電率	ε	ε_0	F/m	−3	−1	4	2	0		
9	透磁率	μ	μ_0	H/m	1	1	−2	−2	2		
10	普遍定数	c	cm/s	1	0	0	0	0	1	1	0
11	電流	I	statA	A	0	0	0	1	0	1	−1
12	電荷	Q	statC	C	0	0	1	1	0		
13	起電力・電圧・電位	V	statV	V	2	1	−3	−1	0	(1)	(2)
14	キャパシタンス	C	cm	F	−2	−1	4	2	0		
15	電気抵抗	R	s/cm	Ω	2	1	−3	−2	0		
16	導電率	η	CGSesu	S/m	−3	−1	3	2	0		
17	電界強度・電場	E	CGSesu	V/m	1	1	−3	−1	0		
18	電気変位・電束密度	D	CGSesu	C/m2	−2	0	1	1	0		
19	磁荷	m	CGSemu	Wb	2	1	−2	−1	1		
20	インダクタンス	L	cm	H	2	1	−2	−2	2		
21	磁界強度・磁場	H	Oe	A/m	−1	0	0	1	−1		
22	磁気誘導・磁束密度	B	Gs	T	0	1	−2	−1	1		
23	起磁力・磁位	F	Gb	A	0	0	0	1	−1		
24	磁束	Φ	Mx	Wb	2	1	−2	−1	1		
25	磁気抵抗	R		A/Wb	−2	−1	2	2	−2		
26	power	P	erg/s	W	2	1	−3	0	0		
27	energy	T	erg	J	2	1	−2	0	0		
28	force	F	dyn	N	1	1	−2	0	0		
29											
30					| J$5 |						
31					| J$6 |						
32			(1) ＝[$E13 $F13 $G13 $H13 $I13]		| J$7 |						
33					| J$8 |						
34					| J$11 |						
35					| J$10 |						
36			は，(1)の算出に使う数値								

図 x.3　電磁気量の単位の大きさの変換式

基本単位の大きさの比を使ったその計算結果を下図に示す．

下図から，次のことがわかる．

B の単位：$1\mathrm{T} = 10^4 \mathrm{Gs}$（厳密に）　　(x.7)

H の単位：$1\mathrm{A/m} = 4\pi \cdot 10^{-3} \mathrm{Oe}$（厳密に）

また，図 x.2 からわかるようにガウス単位 LMT ３元系では，ガウス Gs とエル

ステッド Oe はみかけ同次元であり，実用上次のようにできる．

$\mu_0 H$ の単位：$1\mathrm{T} = 10^4 \mathrm{Oe}$（厳密ではないが実用上）　　(x.8)

物理量	記号	静電単位	ガウス単位	電磁単位	SI単位	静電単位／ガウス単位		電磁単位／ガウス単位		SI単位／電磁単位		SI単位／ガウス単位		有理化／非有理化
						α	10	α	10	α	10	α	10	4π
長さ	L	m	cm	cm	m	0	0	0	0	0	2	0	2	0
質量	M	g	g	g	kg	0	0	0	0	0	3	0	3	0
時間	T	s	s	s	s	0	0	0	0	0	0	0	0	0
誘電率	ε	ε_0	ε_0	s^2/cm^2	F/m	0	0	2	0	0	−11	2	−11	1
透磁率	μ	s^2/cm^2	μ_0	μ_0	H/m	2	0	0	0	0	7	0	7	−1
普遍定数	c	1	cm/s	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
電流	I	statA	statA	abA	A	0	0	1	0	0	−1	1	−1	0
電荷	Q	statC	statC	abC	C	0	0	1	0	0	−1	1	−1	0
起電力・電圧・電位	V	statV	statV	abV	V	0	0	−1	0	0	8	−1	8	0
キャパシタンス	C	cm	cm	abF	F	0	0	2	0	0	−9	2	−9	0
電気抵抗	R	s/cm	s/cm	abΩ	Ω	0	0	−2	0	0	9	−2	9	0
導電率	η	CGSesu	CGSesu		S/m	0	0	2	0	0	−11	2	−11	0
電界強度・電場	E	CGSesu	CGSesu		V/m	0	0	−1	0	0	6	−1	6	0
電気変位・電束密度	D	CGSesu	CGSesu		C/m^2	0	0	1	0	0	−5	1	−5	1
電気分極	P				C/m^2	0	0	1	0	0	−5	1	−5	0
電束・電気変位束	Φ				C	0	0	1	0	0	−1	1	−1	1
電磁気モーメント	μ				Am^2	0	0	1	0	0	3	1	3	0
電気双極子モーメント	p				Cm	0	0	1	0	0	1	1	1	0
磁荷	m		CGSemu	CGSemu	Wb	1	0	0	0	0	8	0	8	−1
インダクタンス	L		cm	cm	H	2	0	0	0	0	9	0	9	0
磁界強度・磁場	H		Oe	Oe	A/m	−1	0	0	0	0	−3	0	−3	1
磁気誘導・磁束密度	B		Gs	Gs	T	1	0	0	0	0	4	0	4	0
起磁力・磁位	F		Gb	Gb	A	−1	0	0	0	0	−1	0	−1	1
磁束	Φ		Mx	Mx	Wb	1	0	0	0	0	8	0	8	0
磁気抵抗	R				A/Wb	−2	0	0	0	0	−9	0	−9	1
磁気分極	J				T	1	0	0	0	0	4	0	4	−1
磁化	M				A/m	−1	0	0	0	0	−3	0	−3	1
ベクトルポテンシャル	A				Wb/m	1	0	0	0	0	6	0	6	0
磁気双極子モーメント	j				Wbm	1	0	0	0	0	10	0	10	−1
power	P	erg/s	erg/s	erg/s	W	0	0	0	0	0	7	0	7	0
energy	T	erg	erg	erg	J	0	0	0	0	0	7	0	7	0
force	F	dyn	dyn	dyn	N	0	0	0	0	0	5	0	5	0

$\alpha \sim 3\times10^{10}$

図 x.4　電磁気量の単位の大きさの比較

■　単位系間の単位の変換の表計算ソフトのつくり方

◆　単位系間の単位の変換式の導出

下図のように，i 単位系の基本単位を，A_i，B_i，C_i，j 単位系の基本単位を，X_j，Y_j，Z_j とする．次元 D の i 単位系の単位を D_i，j 単位系の単位 D_j をとする．D_i の基本単位に対する次元が既知である場合，D_j の基本単位に対する次元を求める式を導出する．また，基本単位の大きさの比が既知である場合，D_i/D_j を求める式を導出する．

次元	i単位系の単位	j単位系の単位	i単位系の次元			j単位系の次元		
			A	B	C	X	Y	Z
A	A_i	A_j	1	0	0	a_x	a_y	a_z
B	B_i	B_j	0	1	0	b_x	b_y	b_z
C	C_i	C_j	0	0	1	c_x	c_y	c_z
X	X_i	X_j	x_a	x_b	x_c	1	0	0
Y	Y_i	Y_j	y_a	y_b	y_c	0	1	0
Z	Z_i	Z_j	z_a	z_b	z_c	0	0	1
D	D_i	D_j	α	β	γ	κ	λ	μ

図 x.5　単位の変換表の一部

D_i，D_j は次のように表現できる．

$$D_i = A_i^{\alpha} B_i^{\beta} C_i^{\gamma} \quad \text{(x.11)}$$

$$D_j = X_j^{\kappa} Y_j^{\lambda} Z_j^{\mu} \quad \text{(x.12)}$$

$$D_i = D_i/D_j \cdot X_j^{\kappa} Y_j^{\lambda} Z_j^{\mu} \quad \text{(x.13)}$$

ここでは，α，β，γ が既知である場合，κ，λ，μ を求める式を導出する．i 単位系と j 単位系の基本単位の関係は，単位を定義する理論式から求めることができる．即ち，i 単位系の基本次元である A，B，C の j 単位系の単位 A_j，B_j，C_j の次元は次のように既知となる．

$$A_j = X_j^{ax} Y_j^{ay} Z_j^{az} \quad \text{(x.14)}$$

$$B_j = X_j^{bx} Y_j^{by} Z_j^{bz} \quad \text{(x.15)}$$

$$C_j = X_j^{cx} Y_j^{cy} Z_j^{cz} \quad \text{(x.16)}$$

i 単位系の基本単位を j 単位系の基本単位で表現すると，

$$A_i = A_i/A_j \cdot X_j^{ax} Y_j^{ay} Z_j^{az} \quad \text{(x.17)}$$

$$B_i = B_i/B_j \cdot X_j^{bx} Y_j^{by} Z_j^{bz} \quad \text{(x.18)}$$

$$C_i = C_i/C_j \cdot X_j^{cx} Y_j^{cy} Z_j^{cz} \quad \text{(x.19)}$$

(x.11)式に(x.17)，(x.18)，(x.19)式を代入すると，

$$\begin{aligned} D_i &= (A_i/A_j \cdot X_j^{ax} Y_j^{ay} Z_j^{az})^{\alpha} (B_i/B_j \cdot X_j^{bx} Y_j^{by} Z_j^{bz})^{\beta} (C_i/C_j \cdot X_j^{cx} Y_j^{cy} Z_j^{cz})^{\gamma} \\ &= (A_i/A_j)^{\alpha} (B_i/B_j)^{\beta} (C_i/C_j)^{\gamma} X_j^{ax\alpha+bx\beta+cx\gamma} Y_j^{ay\alpha+by\beta+cy\gamma} Z_j^{az\alpha+bz\beta+cz\gamma} \end{aligned} \quad \text{(x.20)}$$

(x.13)式と(x.20)式を比較すると，次式の変換式が得られる．

$$\kappa = a_x \alpha + b_x \beta + c_x \gamma \quad \text{(x.21)}$$

$$\lambda = a_y \alpha + b_y \beta + c_y \gamma \quad \text{(x.22)}$$

$$\mu = a_z \alpha + b_z \beta + c_z \gamma \quad \text{(x.23)}$$

$$D_i/D_j = (A_i/A_j)^{\alpha} (B_i/B_j)^{\beta} (C_i/C_j)^{\gamma} \quad \text{(x.24)}$$

同じようにして逆の変換式も導出できる．

$$\alpha = x_a \kappa + y_a \lambda + z_a \mu \quad \text{(x.25)}$$

$$\beta = x_b \kappa + y_b \lambda + z_b \mu \quad \text{(x.26)}$$

$$\gamma = x_c \kappa + y_c \lambda + z_c \mu \quad \text{(x.27)}$$

$$D_j/D_i = (X_j/X_i)^{\kappa} (Y_j/Y_i)^{\lambda} (Z_j/Z_i)^{\mu} \quad \text{(x.28)}$$

◆　変換の具体例

具体的に下図の次元 R（電気抵抗）を例にとる．前とは逆にガウス単位での次元は既知として，ＳＩ単位の次元を求める．２つの単位系とも５元系として，(x.21)～(x.23)式を拡張する．

$$\kappa = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{(x.29)}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{(x.30)}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -3 \qquad \text{(x.31)}$$

ν，ξの計算式は省略する．次に単位の比は，(x.24)式または(x.28)式を拡張して，

$$\omega = (10^2)^{-1}(10^3)^0(1)^1(\alpha^2 10^{-11})^{-1}(10^7)^0 = \alpha^{-2}10^9 \qquad \text{(x.32)}$$

$$\omega = (10^2)^2(10^3)^1(1)^{-3}(\alpha 10^{-1})^{-2}(\alpha)^0 = \alpha^{-2}10^9 \qquad \text{(x.33)}$$

	ガウス単位					SI単位					$\frac{\text{SI単位}}{\text{ガウス単位}}$
次元	L	M	T	ε	μ	L	M	T	I	c	
L	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	10^2
M	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	10^3
T	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
ε	0	0	0	1	0	−3	−1	4	2	0	$\alpha^2 10^{-11}$
μ	0	0	0	0	1	1	1	−2	−2	2	10^7
c	1	0	−1	1/2	1/2	0	0	0	0	1	$\alpha^2 10^{-11}$
I	3/2	1/2	−2	1/2	0	0	0	0	1	0	$\alpha 10^{-1}$
R	−1	0	1	−1	0	2	1	−3	−2	0	$\alpha^{-2}10^9$
						κ	λ	μ	ν	ξ	ω
											$\alpha \sim 3\times 10^{10}$

は，κの算出に使う数値

図 x.6　ガウス単位とＳＩ単位の変換の例

■　ＳＩ単位とガウス単位の補足説明

◆　非有理化単位と有理化単位

ガウス単位は，非有理化単位であり，クーロンの法則に係数がなく，マクスウェル方程式に係数として4π因子が現れる．逆に，ＳＩ単位では，マクスウェル方程式から4π因子を消去し，クーロンの法則に4π因子が現れ，有理化単位と呼ばれる．

4π因子は，電荷や磁荷に対してその周囲に電束や磁束の概念を導入し，全立体角が4πステラジアンであることから現れる．

	非有理化単位	有理化単位
クーロンの法則	4πなし	4πあり
マクスウェル方程式	4πあり	4πなし

クーロンの法則（静電気学）	実験実証困難
マクスウェル方程式（電磁気学）	実験実証容易（実用的）

図 a.1　有理化の意味

◆　有理化単位は合理的であるとはいえない

確かにクーロンの法則は単純で美しいが，実験により確認することが極めて困難である．そこで，クーロン方程式よりもマクスウェル方程式の方を重要視し，そこから4π因子を消去することを，有理すなわち合理的（rational）であるとしている．特にマクスウェル方程式の電場と磁場の対称性にこだわりがあるようである．しかし，磁荷，磁場，磁力は便宜上導入されたもので，物理的実体がないものであるから，有理化単位が非有理化単位よりも合理的（有理）であるというのは言い過ぎである．

◆　電磁気の理論式は単位系に関係なく共通

εμc を表現しない式は単位系に依存するが，図 a.2 のようにεμc を省略しない式は，理論式として単位系に関係なく共通である．即ち，理論式は非有理化式と有理化式の２種類だけとなってしまう．

	静電単位	ガウス単位	電磁単位	ＳＩ単位
非有理化	理論式は共通			
有理化	理論式は共通			

図 a.2　電磁気の理論式

例えば，電荷定義式（クーロンの法則）は，有理化ＳＩ単位と非有理化ガウス単位では，$1/4\pi\varepsilon_0$ の因子だけ異なる．ところが，εμc を省略しないガウス単位の式にはε_0 が現れるので，その係数は 4π だけ異なる．このようにして非有理化と有理化の相違だけが残る．電流定義式も同様である．

	電荷定義式	電流定義式
ガウス単位	$f=\frac{q^2}{r^2}$	$F=\frac{1}{c^2}\frac{2I^2}{r}$
ＳＩ単位	$f=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$	$F=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I^2}{r}$
非有理化理論式	$f=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$	$F=\frac{\mu_0}{c^2}\frac{2I^2}{r}$
有理化理論式	$f=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$	$F=\frac{\mu_0}{4\pi c^2}\frac{2I^2}{r}$

図 a.3　εμc を省略しない理論式

図 a.3 の理論式から，ε_0，μ_0 の数値を機械的に求める．

ＳＩ単位の ε_0=ガウス単位の ε_0

{ＳＩの ε_0}［ＳＩの ε_0］={ガウスの ε_0}［ガウスの ε_0］

となる．上の式は物理量を表している．下の式は，{}が数値で［］が単位である．（物理量式から単位の大きさを機械的に求める方法の詳細は後述）

次元を省略しない５元系で単位を表現すれば２つの式の等号が成り立つ．μ_0 についても同様である．定義から，

{ガウスの ε_0}=1，{ガウスの μ_0}=1

であるから，図 x.4 から，

$$\{\mathrm{SI}の\varepsilon_0\}=\frac{[ガウスの\varepsilon_0]}{[\mathrm{SI}の\varepsilon_0]}$$

$$=\frac{1}{4\pi\alpha^2 10^{-11}}\approx 8.8\times10^{-12}\qquad[\mathrm{F/m}],[\mathrm{C^2/Nm^2}]$$

$$\left\{\mathrm{SI}の\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right\}=\alpha^2 10^{-11}\approx 9\times10^{9}\qquad[\mathrm{Nm^2/C^2}]$$

$$\text{where}\quad \alpha\equiv 2.99792458\times10^{10}\approx 3\times10^{10}$$

$$\{\mathrm{SI}の\mu_0\}=\frac{[ガウスの\mu_0]}{[\mathrm{SI}の\mu_0]}$$

$$=4\pi\times10^{-7}\qquad[\mathrm{H/m}],[\mathrm{Wb^2/Nm^2}],[\mathrm{N/A^2}]$$

$$\left\{\mathrm{SI}の\frac{1}{4\pi\mu_0}\right\}=\frac{10^7}{(4\pi)^2}\qquad[\mathrm{Nm^2/Wb^2}]$$

$$\left\{\mathrm{SI}の\frac{\mu_0}{4\pi}\right\}=10^{-7}\qquad[\mathrm{N/A^2}]$$

ここで，左辺は最後に書いた単位で表した数値である．α は光速を cm/s で表した数値である．

◆　EH 対応系と EB 対応系

磁化の次元の取扱により，図 a.4 のように，

磁化 J を磁束密度 B と同次元にするのが EH 対応系，

磁化 M を磁界強度 H と同次元にするのが EB 対応系

である．EH 対応系は，E と H の対称性と磁界強度 H を重要視している．EB

対応系は，磁束密度 B を重要視している．ＳＩ単位は，EB 対応系である．多くの教科書で EH 対応系の磁化 J を M と書いていて混乱を招いている．EH 対応系の J を磁化と呼ばず，磁気分極と呼び，M だけを磁化と呼べば，混乱はなくなる．

		有理化	非有理化
電束密度 と 電気分極		$D=\varepsilon_0 E+P$	$D=\varepsilon_0 E+4\pi P$
磁束密度と磁気分極	EH 対応	$B=\mu_0 H+J$	$B=\mu_0 H+4\pi J$
	EB 対応	$B=\mu_0 H+J$ $=\mu_0 H+\mu_0 M$	$B=\mu_0 H+4\pi J$ $=\mu_0 H+\mu_0 M$

EH 対応	J：磁気分極＝磁化
EB 対応	J：磁気分極，M：磁化

図 a.4　磁気分極と磁化

■　力学系の単位と数値式の導出方法

◆　ＳＩ単位は使いづらい？

ISO（国際標準化機構）が規定している国際単位ＳＩ単位は，電気技術者がつくった単位であり，機械技術者や物理学者には使いにくい単位である．そこで，電気工学のＳＩ単位，物理学のガウス単位の理論体系を統一し，単位と理論式の関係を整理した．

機械工学の力学では，かって重力単位を使っていた．JIS に則り，単位系に依存しない物理量式（理論式）から単位系により決まる数値式を導出する方法を説明する．

いままで電磁気で単位系に依存しない理論式を説明してきたが，まさに逆のことをやることにより単位の本質が見えてくる．

◆　単位系と単位

単位系とは，

基本量（独立した次元）と

基本単位（基本量の基準の大きさ）

の選び方のことである．基本量と基本単位の種類については後述する．物理量は単位を使って次式のように表現する．

物理量(physical quantity)＝数値(numerical value)×単位(unit)

$A=\{A\}[A]$

（JIS 表現，JIS Z 8202 参照）

◆　力学の単位系

力学の単位系の基本量は，ニュートンの運動方程式（次式）により決める．

$$f=m\frac{dl}{dt}$$

4 変数あるから 3 変数まで独立に選ぶことができる．

Length Mass Time を選ぶ LMT 系を絶対単位系，

Length Force Time を選ぶ LFT 系を重力単位系（工学単位系）

という．力学の単位系の基本単位の代表的なものは，

Meter Kilogram Second を使う MKS 系，

Centimeter Gram Second を使う CGS 系

がある．ＳＩ単位は，MKSA 有理化絶対単位系である．A は電流 Ampere の単位である．有理化の意味についてはもう説明した．

現代物理学では，慣性質量と重力質量を同一のものとみなして同じ単位を用いるから，万有引力方程式の万有引力定数は無次元ではなくなる．

◆　機械工学では質量の単位は使わない

力の定義式（ニュートンの運動方程式）は，

$$f = m\alpha$$

	f	m	α
絶対単位	N	kg	m/s^2
重力単位	kgf	$kgfs^2/m$	m/s^2
加速度単位	kgf	kg	G

であり，重力単位系の質量の単位は，$kgfs^2/m$ となるが，ところが機械工学ではこの単位は用いず，公式に質量や質量の組立単位が現れないようにする．例えば次式のように，質量 m を重量 W により，密度ρを比重量γにより，公式の中で置き換えてしまうのである．

$$m = \frac{W}{g} \quad \rho = \frac{\gamma}{g} \quad f = \frac{W}{g}\alpha$$

W の単位は，kgf であり，γ の単位は，kgf/m^3 である．重量 1 kgf のものを持ち上げるのに 1 kgf の力が必要というような表現を使う．

重力単位系に比べて，絶対単位系では質量と重量（力）の単位が別々の固有の名称を持つので，力学では表現が煩雑になる．

◆　機械工学では kg と kgf を混ぜて使う（加速度単位）

機械工学では，物理量の大きさを直感的に把握することを重視する．例えば，運動方程式

$$f = \frac{W}{g}\alpha = m\alpha$$

では，左式でfと W の単位に kgf を使うとαの単位が m/s^2 になるが，右式で m の単位に kg を使えばαの単位が G となり，その大きさの程度を直感的に把握することができる．それらが不自然な数値になったとき，すぐにそれが判明するのである．

B747 ジャンボジェット機の仕様	
take off 重量	350 000 kg
static thrust	4×21 000 kp

例えば上図にジャンボの仕様を示す．kp(kilopond)は kgf のことであり，lb(pound)とは異なる熱力学の単位である．重量は正確には質量と表現する方がよい．３桁をコンマではなくスペースで区切るのは JIS の正式の表現法である．数値と単位の間にもスペースを入れる．コンマは JIS でも外国でも小数点（decimal point）を意味する．ところで，このジャンボの離陸時の加速度は，G という単位を使えば，

$$f/m = 84\ \mathrm{tonf} / 350\ \mathrm{ton} = 0.24\ \mathrm{G}$$

と簡単に計算できる．

F15 イーグルの仕様	
運行重量	12 000 kg
戦闘重量	20 000 kg
thrust	2×8 000 kp
thrust (A/B)	2×11 000 kp

F15 イーグルの仕様を上図に示す．F15 は垂直上昇が可能な数少ない戦闘機であり，kg と kgf の単位で重量（質量）より推力の方が大きいので，重力に打ち勝つことができるのはすぐに判る．垂直上昇加速度は，

$$f/m = 22\ \mathrm{tonf} / 12\ \mathrm{ton} - 1 = 1\ \mathrm{G}$$

と簡単に計算でき，答えの正しさも直感的に判る．

◆　物理量式と数値式

JIS Z 8202 では，物理量式と数値式について規定している．JIS では単位に依存しない物理量式の方を使うことを推奨している．

物理量式では，次式の例のように，左辺から右辺へと計算が進んで数値や単位が変わっても，全辺の物理量は変わらない．即ち，任意の単位に変換してもそれらを等号で結ぶことができるが，ミスも多くなる恐れがある．

$$\mathrm{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{t}}=\frac{6\mathrm{m}}{2\mathrm{s}}=3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=3\frac{1/1000\mathrm{km}}{1/3600\mathrm{h}}=10.8\mathrm{km/h}$$

一方，数値式では，用いる単位を常に示さなければならない．次式はその JIS 表現式の例である．作成方法については後述する．

$$\{\mathrm{v}\}\mathrm{km/h}=3.6\{\mathrm{d}\}\mathrm{m}/\{\mathrm{t}\}\mathrm{s}$$

数値式は，単位が固定されているので，ミスは少なくなる．

◆　数値式のつくり方

数値式は，次のようにつくる（JIS Z 8202 参照）．速度＝距離／時間を例にとって示す．最初に単位に依存しない物理量式（＝理論式）をつくる．

$$\mathrm{v}=\mathrm{d}/\mathrm{t}$$

次にその式の各量を数値と単位に分解する．{}は数値，[]は単位を示す．

$$\{\mathrm{v}\}[\mathrm{v}]=\{\mathrm{d}\}[\mathrm{d}]/\{\mathrm{t}\}[\mathrm{t}]$$

単位だけを一箇所に集めて表現する．

$$\{\mathrm{v}\}=\frac{\{\mathrm{d}\}}{\{\mathrm{t}\}}\cdot\frac{[\mathrm{d}]}{[\mathrm{v}][\mathrm{t}]}$$

右辺の[]の集まりは無次元の比例定数で次元換算定数（dimension conversion constant）という．次元換算定数はもちろん単位に依存するので，用いる単位を常に示さなければならない．物理量式の左右両辺の次元はいつも一致しているので，次元換算定数はいつも無次元になる．

上記の例で単位をいろいろ変えてみる．

$$\frac{[\mathrm{d}]}{[\mathrm{v}][\mathrm{t}]}=\frac{m}{km/h\cdot s}=3.6$$

$$\{\mathrm{v}\}\mathrm{km/h}=3.6\{\mathrm{d}\}\mathrm{m}/\{\mathrm{t}\}\mathrm{s}$$

$$\frac{[\mathrm{d}]}{[\mathrm{v}][\mathrm{t}]}=\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m/min}\cdot\mathrm{s}}=0.6$$

$$\{\mathrm{v}\}\mathrm{m/min}=0.6\{\mathrm{d}\}\mathrm{cm}/\{\mathrm{t}\}\mathrm{s}$$

◆　数値式のつくり方の例

上記の方法を使えば，複雑な数値式でも物理量式（理論式）から，ミスなく導出することができる．例えば，トルクと回転数からパワーを求める物理量式と数値式は次のようになる．

$$P=T\omega$$

$$\{P\}=\{T\}\{\omega\}\frac{[T][\omega]}{[P]}$$

$$\frac{[T][\omega]}{[P]}=\frac{\mathrm{kgfm}\cdot\mathrm{rpm}}{\mathrm{kW}}=\frac{9.8\mathrm{Nm}\cdot 2\pi\,\mathrm{rad/60s}}{1000\mathrm{W}}=\frac{1}{974}$$

$$\{P\}\mathrm{kW}=\frac{\{T\}\mathrm{kgfm}\{\omega\}\mathrm{rpm}}{974}$$

GD^2 と回転数からトルクを求める式は次のようになる．

$$T=J\frac{d\omega}{dt}=\frac{GD^2}{4g}\frac{d\omega}{dt}$$

（J は慣性モーメント）

$$\{T\}=\{GD^2\}\frac{\{d\omega\}}{\{dt\}}\frac{[GD^2][\omega]}{4g[T][t]}$$

$$\frac{[GD^2][\omega]}{4g[T][t]}=\frac{\mathrm{kgfm}^2\cdot\mathrm{rpm}}{4\mathrm{g}\cdot\mathrm{kgfm}\cdot\mathrm{s}}=\frac{\mathrm{kgfm}^2\cdot 2\pi\,\mathrm{rad/60s}}{4\cdot 9.8\mathrm{m/s}^2\cdot\mathrm{kgfm}\cdot\mathrm{s}}=\frac{1}{375}$$

$$\{T\}\mathrm{kgfm}=\frac{\{GD^2\}\mathrm{kgfm}^2}{375}\frac{\{d\omega\}\mathrm{rpm}}{\{dt\}\mathrm{s}}$$

これは往年の機械工学者にとって懐かしい公式である．