■　ローレンツ力のファラデー・テンソル表現

◆　ローレンツ力の３次元空間ベクトル表現

$$\boldsymbol{f} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad \text{(mx8.1)}$$

q；観測対象の電荷，$\boldsymbol{v}$；観測対象の観測速度

$\boldsymbol{f}$；ローレンツ力（Newton 力），$\boldsymbol{E}$；電場，$\boldsymbol{B}$；磁束密度

【表記法】３次元空間ベクトルを太字で，４元テンソルを上付矢印で表す．

◆　４元テンソル化

式（mx8.1）にγを掛けて４元力の空間部分を算出する．

$$\boldsymbol{M} = \gamma\,\boldsymbol{f} = q\left(U^0 \frac{\boldsymbol{E}}{c} + \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{B}\right) \qquad \text{(mx8.2)}$$

where　$U^0 = U^t = c\gamma$，$U^i = cv^i$

$\vec{M}$；４元力（Minkowski 力），$\vec{U}$；４元速度，c；真空光速

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\beta_x{}^2+\beta_y{}^2+\beta_z{}^2)}}, \quad \beta_x = \frac{v_x}{c}, \quad \beta_y = \frac{v_y}{c}, \quad \beta_z = \frac{v_z}{c}$$

$\boldsymbol{f}$と$\boldsymbol{v}$の内積と$\vec{M}$と$\vec{U}$の内積から４元力の時間部分を算出する．

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} = q\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{U} = q\,\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{E} \qquad \text{(mx8.3)}$$

where　$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = 0$

$$\vec{M}\cdot\vec{U} = -M^0U^0 + \sum_i M^iU^i = -c\gamma M^0 + \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{U} = 0 \qquad \text{(mx8.4)}$$

where　$\vec{U}\cdot\dfrac{d\vec{U}}{d\tau} = 0$　から　$\vec{U}\cdot\vec{M} = 0$

$$M^0 = \frac{1}{c\gamma}\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{U} = \frac{1}{c}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{U} = \frac{q}{c}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{E} \qquad \text{(mx8.5)}$$

◆　ローレンツ力のファラデー・テンソル表現

式（mx8.2）と式（mx8.5）を合体すると，ローレンツ力の４元テンソル表現になる．２形式または２ベクトルのファラデー・テンソルを使うこともできるが，MTW phone book では，(1, 1)テンソルを使っている．

【ポイント】テンソルの成分の計算での添字の使い方をマスターしてほしい．

$$M^{\mu} = qF^{\mu}{}_{\nu}U^{\nu} \qquad \text{(mx8.6)}$$

$$M_{\mu} = qF_{\mu\nu}U^{\nu}$$

$$M^{\mu} = qF^{\mu\nu}U_{\nu}$$

$\vec{M}$	；４元力（Minkowski 力）	$[\vec{M}] = \mathrm{N}$
$\vec{U}$	；４元速度	$[\vec{U}] = \mathrm{m}/s$
q	；観測対象の電荷	$[q] = \mathrm{C}$
$F^{\mu}{}_{\nu}$	；ファラデー・テンソル	$[F] = \mathrm{Vs/m^2}$

$$F^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^x}{c} & \frac{E^y}{c} & \frac{E^z}{c} \\ \frac{E^x}{c} & 0 & B^z & -B^y \\ \frac{E^y}{c} & -B^z & 0 & B^x \\ \frac{E^z}{c} & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(mx8.7)}$$

式（mx8.7）は式（mx8.6）を書き下して導出されるが，別解として，式（mx8.7）は次式により導出される．

$$F^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} \qquad \text{(mx8.8)}$$

時間成分を１回上げたときだけ符号が変わる．つまり，式（mx2.1）の第０行目だけ符号が反転する．

式（mx8.6）の成分を書き下して，正しいことを証明する．

$$M^0 = qF^0{}_{\nu}U^{\nu} = qF^0{}_iU^i = q\left(\frac{E^x}{c}U^x + \frac{E^y}{c}U^y + \frac{E^z}{c}U^z\right)$$

$$M^1 = qF^1{}_{\nu}U^{\nu} = q\left(F^1{}_0U^0 + F^1{}_iU^i\right) = q\left(\frac{E^x}{c}U^t + B^zU^y - B^yU^z\right)$$

$$M^2 = qF^2{}_{\nu}U^{\nu} = q\left(F^2{}_0U^0 + F^2{}_iU^i\right) = q\left(\frac{E^y}{c}U^t - B^zU^x + B^xU^z\right)$$

$$M^3 = qF^3{}_{\nu}U^{\nu} = q\left(F^3{}_0U^0 + F^3{}_iU^i\right) = q\left(\frac{E^z}{c}U^t + B^yU^x - B^xU^y\right)$$

（mx8.9）

式（mx8.9）は，式（mx8.2）と式（mx8.5）を書き下したものと一致する．

◆　ローレンツ力の公式の導出

電磁ポテンシャルを使ってローレンツ力の公式を導出する．

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{mx4.13}$$

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{mx4.15}$$

これらを用いると，ラグランジアンは次式となる．

$$L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + q\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A} - q\phi \tag{mx8.10}$$

次のオイラー・ラグランジュの方程式を解く．

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = 0 \tag{mx8.11}$$

各項を計算する．

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = q\nabla(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}) - q\nabla\phi = q(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + q\dot{\boldsymbol{r}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) - q\nabla\phi \tag{mx8.12}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \frac{d}{dt}(m\dot{\boldsymbol{r}} + q\boldsymbol{A}) = \frac{d}{dt}(m\dot{\boldsymbol{r}}) + q\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + q(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} \tag{mx8.13}$$

ここで，

$$\nabla(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}) = (\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \dot{\boldsymbol{r}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) \tag{mx8.14}$$

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} \tag{mx8.15}$$

を使った．

式（mx8.11）に（mx8.12）と（mx8.13）を代入して，

$$q\dot{\boldsymbol{r}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) - q\nabla\phi - \frac{d}{dt}(m\dot{\boldsymbol{r}}) - q\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\boldsymbol{r}}) = q\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\dot{\boldsymbol{r}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = q\boldsymbol{E} + q\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B} \tag{mx8.16}$$

式（mx8.1）が導出できた．

◆　磁荷・磁場は物理的に実在しない

我々は，便宜上，磁場を導入する時，まず電流の周りに生じる磁場の方向をアンペールの右ネジの規則で決め，その磁場から動いている電荷が受けるローレンツ力をフレミングの左手の規則を決める．

下図のように，電線の電流が右へ流れ，負電荷粒子（電子）が左へ飛行している場合（フレミングの左手の中指は右向き），粒子系から見ると，電線とその電流は右へ移動している．その中の正電荷の方が負電荷よりも速く移動している．従って，正電荷の方がローレンツ収縮が大きく，電線は正に帯電して，飛行負電荷粒子はクーロン力で電線に引きつけられる．

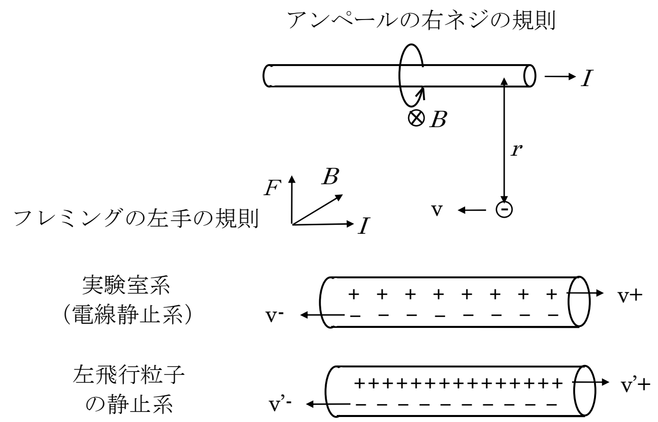

図 my.2　磁場内の電流（動いている電荷）が受ける力（ローレンツ力）

左飛行している粒子から見て，電線は右へ移動している

　電線電流の＋電荷の方が－電荷より相対速度が高い

　　電線電流の＋電荷の方が－電荷よりローレンツ収縮率が大きい

　　　電線電流の＋電荷の方が－電荷より電荷密度が大きい

　　　　電線電流が＋に帯電している

　　　　　左飛行している粒子はクーロン力を受ける

結論；磁力・ローレンツ力は相対論的クーロン力である

◆　ローレンツ力の公式の導出（相対論から直接導出する）

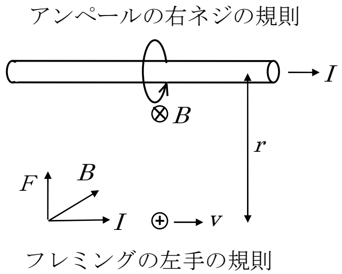

図 my.3　動いている電荷が受ける力

磁力・ローレンツ力は相対論的クーロン力である．このローレンツ力を，磁場を導入しないで，相対論から導出する方法を示す．
上図のように，固定された電線電流 I から動いている電荷が受ける力をローレンツ力という．一般的には，電線電流 I がつくる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を算出し，その磁場中を動いている電荷が受ける力 F を算出する．即ち，次式を導出する．フレミングの左手の規則の中指の I は，飛行粒子がつくる電流のことで電線電流の I ではない．

$$\boldsymbol{F} = \frac{q}{c_0}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad \text{(mx8.17)}$$

上式は，電場 $\boldsymbol{E} = 0$ の場合の式であり，c_0 は光速ではなく，普遍定数のことである．ＳＩ単位では，$c_0 = 1$ である．ここでは，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を導入しないで，相対論から直接にローレンツ力の公式（上式）を導出する．
下図のように，実験室系から見ると，電線電流は帯電していない．逆に，動いている粒子系から見ると，＋電荷と－電荷と相対速度が異なり，ローレンツ収縮率が異なるので，電線電流が帯電している．右飛行粒子からは，－に，左飛行粒子からは，＋に帯電しているように見える．この帯電から受ける相対論的クーロン力をローレンツ力という．

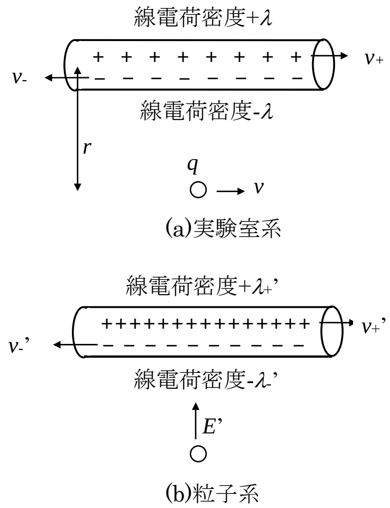

図 my.4　実験室系と粒子系からみた電線電流の線電荷密度

線電荷の粒子系における相対論的相対速度は次式となる．

$$v_+' = \frac{v_+ - v}{1 - v_+ v / c^2} \qquad v_-' = \frac{v_- + v}{1 + v_- v / c^2}$$

$$\beta_+' = \frac{\beta_+ - \beta}{1 - \beta_+ \beta} \qquad \beta_-' = \frac{\beta_- + \beta}{1 + \beta_- \beta}$$

$$\text{where} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \beta_+ = \frac{v_+}{c} \quad \beta_- = \frac{v_-}{c} \quad \beta_+' = \frac{v_+'}{c} \quad \beta_-' = \frac{v_-'}{c}$$

粒子系における線電荷密度を算出するには，一旦，線電荷静止系に換算して，次に粒子系に換算する．即ち次式となる．

$$\lambda_+' = \frac{\gamma_+'}{\gamma_+}\lambda \qquad \lambda_-' = \frac{\gamma_-'}{\gamma_-}\lambda$$

$$\text{where} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{等々}$$

図 my.4 のように，粒子系における線電荷がつくる電場は次式（有理化式）となる．

$$E'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2(\lambda_+'-\lambda_-')}{r}$$

$$\lambda_+'-\lambda_-'=\left(\frac{\gamma_+'}{\gamma_+}-\frac{\gamma_-'}{\gamma_-}\right)\lambda$$

$$\frac{\gamma_+'}{\gamma_+}-\frac{\gamma_-'}{\gamma_-}=\frac{\sqrt{1-\beta_+{}^2}}{\sqrt{1-\beta_+'^2}}-\frac{\sqrt{1-\beta_-{}^2}}{\sqrt{1-\beta_-'^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\beta_+{}^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_+-\beta}{1-\beta_+\beta}\right)^2}}-\frac{\sqrt{1-\beta_-{}^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_-+\beta}{1+\beta_-\beta}\right)^2}}$$

$$=\frac{(1-\beta_+\beta)\sqrt{1-\beta_+{}^2}}{\sqrt{1-2\beta_+\beta+\beta_+{}^2\beta^2-\beta_+{}^2+2\beta_+\beta-\beta^2}}$$

$$-\frac{(1+\beta_-\beta)\sqrt{1-\beta_-{}^2}}{\sqrt{1+2\beta_-\beta+\beta_-{}^2\beta^2-\beta_-{}^2-2\beta_-\beta-\beta^2}}$$

$$=\frac{(1-\beta_+\beta)\sqrt{1-\beta_+{}^2}}{\sqrt{1-\beta_+{}^2}\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{(1+\beta_-\beta)\sqrt{1-\beta_-{}^2}}{\sqrt{1-\beta_-{}^2}\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$=\frac{-\beta(\beta_++\beta_-)}{\sqrt{1-\beta^2}}=-\gamma\beta(\beta_++\beta_-)$$

$$\lambda_+'-\lambda_-'=-\gamma\beta(\beta_++\beta_-)\lambda=-\gamma\frac{v}{c}\frac{v_++v_-}{c}\lambda=-\gamma\frac{vI}{c^2}$$

（where　$I=v_+\lambda+v_-\lambda$）

$$E'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2(\lambda_+'-\lambda_-')}{r}\qquad F'=-qE'$$

$$F=\frac{F'}{\gamma}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qvI}{c^2r}=\frac{\mu_0}{4\pi c_0{}^2}\frac{2qvI}{r}=\frac{q}{c_0}v\frac{\mu_0}{4\pi c_0}\frac{2I}{r}$$

$$=\frac{q}{c_0}vB$$

where　$\varepsilon_0\mu_0=\frac{c_0{}^2}{c^2}$，　$B=\frac{\mu_0}{4\pi c_0}\frac{2I}{r}$

式（mx8.17）が導出できた．

■　ローレンツ力のファラデー・テンソル表現

◆　ローレンツ力の３次元空間ベクトル表現

$$\boldsymbol{f}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \qquad \text{(mx8.1)}$$

q；観測対象の電荷，$\boldsymbol{v}$；観測対象の観測速度

$\boldsymbol{f}$；ローレンツ力（Newton 力），$\boldsymbol{E}$；電場，$\boldsymbol{B}$；磁束密度

【表記法】３次元空間ベクトルを太字で，４元テンソルを上付矢印で表す．

◆　４元テンソル化

式（mx8.1）にγを掛けて４元力の空間部分を算出する．

$$\boldsymbol{M}=\gamma\boldsymbol{f}=q\left(U^0\frac{\boldsymbol{E}}{c}+\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B}\right) \qquad \text{(mx8.2)}$$

where　$U^0=U^t=c\gamma$，$U^i=cv^i$

$\vec{M}$；４元力（Minkowski 力），$\vec{U}$；４元速度，c；真空光速

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}}=\frac{1}{\sqrt{1-(\beta_x{}^2+\beta_y{}^2+\beta_z{}^2)}},\quad \beta_x=\frac{v_x}{c},\quad \beta_y=\frac{v_y}{c},\quad \beta_z=\frac{v_z}{c}$$

$\boldsymbol{f}$と$\boldsymbol{v}$の内積と$\vec{M}$と$\vec{U}$の内積から４元力の時間部分を算出する．

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}=q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{U}=q\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{E} \qquad \text{(mx8.3)}$$

where　$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=0$

$$\vec{M}\cdot\vec{U}=-M^0U^0+\sum_i M^iU^i=-c\gamma M^0+\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{U}=0 \qquad \text{(mx8.4)}$$

where　$\vec{U}\cdot\frac{d\vec{U}}{d\tau}=0$　から　$\vec{U}\cdot\vec{M}=0$

$$M^0=\frac{1}{c\gamma}\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{U}=\frac{1}{c}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{U}=\frac{q}{c}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{E} \qquad \text{(mx8.5)}$$

◆　ローレンツ力のファラデー・テンソル表現

式（mx8.2）と式（mx8.5）を合体すると，ローレンツ力の４元テンソル表現になる．２形式または２ベクトルのファラデー・テンソルを使うこともできるが，MTW phone book では，(1, 1)テンソルを使っている．

$$M^{\mu} = qF^{\mu}{}_{\nu}U^{\nu} \qquad \text{（mx8.6）}$$

$$M_{\mu} = qF_{\mu\nu}U^{\nu}$$

$$M^{\mu} = qF^{\mu\nu}U_{\nu}$$

$\vec{M}$ ；4元力（Minkowski 力）　$\left[\vec{M}\right] = \mathrm{N}$

$\vec{U}$ ；4元速度　$\left[\vec{U}\right] = \mathrm{m}/s$

q ；観測対象の電荷　$[q] = \mathrm{C}$

$F^{\mu}{}_{\nu}$ ；ファラデー・テンソル　$[F] = \mathrm{Vs/m^2}$

$$F^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^x}{c} & \frac{E^y}{c} & \frac{E^z}{c} \\ \frac{E^x}{c} & 0 & B^z & -B^y \\ \frac{E^y}{c} & -B^z & 0 & B^x \\ \frac{E^z}{c} & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{（mx8.7）}$$

式（mx8.7）は式（mx8.6）を書き下して導出されるが，別解として，式（mx8.7）は次式により導出される．

$$F^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} \qquad \text{（mx8.8）}$$

時間成分を1回上げたときだけ符号が変わる．つまり，式（mx2.1）の第0行目だけ符号が反転する．

式（mx8.6）の成分を書き下して，正しいことを証明する．

$$M^0 = qF^0{}_{\nu}U^{\nu} = qF^0{}_{i}U^{i} = q\left(\frac{E^x}{c}U^x + \frac{E^y}{c}U^y + \frac{E^z}{c}U^z\right)$$

$$M^1 = qF^1{}_{\nu}U^{\nu} = q\left(F^1{}_0U^0 + F^1{}_iU^i\right) = q\left(\frac{E^x}{c}U^t + B^zU^y - B^yU^z\right)$$

$$M^2 = qF^2{}_{\nu}U^{\nu} = q\left(F^2{}_0U^0 + F^2{}_iU^i\right) = q\left(\frac{E^y}{c}U^t - B^zU^x + B^xU^z\right)$$

$$M^3 = qF^3{}_{\nu}U^{\nu} = q\left(F^3{}_0U^0 + F^3{}_iU^i\right) = q\left(\frac{E^z}{c}U^t + B^yU^x - B^xU^y\right)$$

（mx8.9）

式（mx8.9）は，式（mx8.2）と式（mx8.5）を書き下したものと一致する．

◆　ローレンツ力の公式の導出

電磁ポテンシャルを使ってローレンツ力の公式を導出する．

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \qquad \text{（mx4.13）}$$

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \text{（mx4.15）}$$

これらを用いると，ラグランジアンは次式となる．

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + q\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A} - q\phi \qquad \text{（mx8.10）}$$

次のオイラー・ラグランジュの方程式を解く．

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = 0 \qquad \text{（mx8.11）}$$

各項を計算する．

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = q\nabla(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}) - q\nabla\phi = q(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + q\dot{\boldsymbol{r}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) - q\nabla\phi \qquad \text{（mx8.12）}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \frac{d}{dt}(m\dot{\boldsymbol{r}} + q\boldsymbol{A}) = \frac{d}{dt}(m\dot{\boldsymbol{r}}) + q\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + q(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} \qquad \text{（mx8.13）}$$

ここで，

$$\nabla(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}) = (\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \dot{\boldsymbol{r}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) \qquad \text{（mx8.14）}$$

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} \qquad \text{（mx8.15）}$$

を使った．

式（mx8.11）に（mx8.12）と（mx8.13）を代入して，

$$q\dot{\boldsymbol{r}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) - q\nabla\phi - \frac{d}{dt}(m\dot{\boldsymbol{r}}) - q\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\boldsymbol{r}}) = q\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\dot{\boldsymbol{r}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = q\boldsymbol{E} + q\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B} \qquad \text{（mx8.16）}$$

式（mx8.1）が導出できた．