弱い重力場（weak gravitational field）でのアインシュタイン方程式（Einstein equation）は，メトリックの摂動（metric perturbation）を使うことにより線形近似（linear approximation,）できる．この方程式にトランスバース - トレースレスゲージ（transverse-traceless gauge）条件といわれる制限を付けると簡単な重力波の式が得られる．

この書は，シュッツ著が原書でわずか３頁で説明しているものに大幅に書き加えて丁寧に説明したものである．式の番号はシュッツ著のものである．

■　弱い重力場でのアインシュタイン方程式の線形近似

◆　摂動項のアインシュタイン方程式

曲った時空のメトリックは，平らな時空のメトリック＝ミンコフスキー・メトリック（式（8.12）の第１項）に，摂動（perturbation）項（式（8.12）の第２項）を加えたものとして表現できる．摂動項の絶対値は１よりはるかに小さいものとし，摂動項は線形であると考えられる．

この摂動項をアインシュタイン方程式（8.10）に導入すると，弱い重力場でのアインシュタイン方程式（線形理論での場の方程式）（8.42）が得られる．この式では，摂動項にトレース反転テンソル（trace reverse tensor）が使われているが，これは数式を簡単にするためである（導出法は別稿参照）．

摂動項のアインシュタイン方程式（8.42）は真空中（$T^{\mu\nu}=0$）では式（9.1）となり，（４元テンソルによる）３次元波動方程式と呼ばれる．

$$g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}\to\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}h_{00}&h_{01}&h_{02}&h_{03}\\h_{10}&h_{11}&h_{12}&h_{13}\\h_{20}&h_{21}&h_{22}&h_{23}\\h_{30}&h_{31}&h_{32}&h_{33}\end{pmatrix}\qquad(8.12)$$

$$G^{\alpha\beta}=\frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}\qquad(8.10)$$

where　$G^{\alpha\beta}$：アインシュタイン・テンソル（$\left[G^{\alpha\beta}\right]=\mathrm{m}^{-2}$）

$T^{\alpha\beta}$：ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）（$\left[T^{\alpha\beta}\right]=\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$（圧力））

弱い場での重力波とトランスバース - トレースレスゲージ

G：万有引力定数（$G=6.673\times10^{-11}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$）

$$\bar{h}^{\alpha\beta}=h^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h\qquad\text{where}\quad h\equiv h^{\alpha}{}_{\alpha}\qquad(8.29)$$

$$\Box\bar{h}^{\mu\nu}=-\frac{16\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}\qquad(8.42)$$

where　$\bar{h}^{\mu\nu}$：trace reverse of the metric perturbation（無次元）

$T^{\mu\nu}$：ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）（圧力 $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ の次元をもつ）

G：万有引力定数 $G=6.673\times10^{-11}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot s^{-2}$

両辺は m^{-2} の次元をもつ

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\bar{h}^{\alpha\beta}=0,\quad\Box\bar{h}^{\alpha\beta}=0,\quad\bar{h}^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu}=0\qquad(9.1)$$

【表記法】ダランベルシャン（４次元ラプラシアン）の定義式.

$$\Box\equiv-\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Box\equiv-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2=-\frac{1}{c^2}(\partial_t)^2+\Delta=\partial_\mu\partial^\mu$$

$$\Box f=\partial_\mu\partial^\mu f=f^{,\mu}{}_{,\mu}=\eta^{\mu\nu}f_{,\mu\nu}=\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)f\qquad(8.37)$$

◆　摂動項のアインシュタイン方程式の解

式（9.1）は斉次方程式であり，これを展開してみればすぐ判ることであるがこの式は最も単純な波動方程式であり，解が正弦波であることは良く知られている．４元テンソルで解を書けば式（9.2）となる．

$$\bar{h}^{\alpha\beta}=A^{\alpha\beta}\exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right)\qquad(9.2)$$

where　$\{k_\alpha\}$ は波動を表す一形式

$\{A^{\alpha\beta}\}$ は振幅を表すテンソル

ダランベルシャンの定義式（8.37）から，式（9.1）は式（9.3）のように書け

る．式（9.4）を使って，計算を進めると，式（9.3’’）が得られる．この式の成り立つ条件が式（9.5）である．

$$\eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = 0 \qquad (9.3)$$

$$\eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}A^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right) = i^2 k_\mu k_\nu \eta^{\mu\nu}A^{\alpha\beta}\exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right)$$

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu} = ik_\mu \bar{h}^{\alpha\beta} \qquad (9.4)$$

where $\dfrac{d}{dx^\mu}\exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right) = ik_\mu \exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right)$

$$\eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \qquad (9.3')$$

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = -k_\mu k_\nu \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \qquad (9.3'')$$

$$\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = k^\nu k_\nu = 0 \qquad (9.5)$$

$$\vec{k} \to \left(k_0, k_1, k_2, k_3\right) = \left(\omega/c, \boldsymbol{k}\right) \qquad (9.7)$$

where $\omega = k_0 c$, $\boldsymbol{k} \to \left(k_1, k_2, k_3\right)$

$$k_\alpha x^\alpha = k_0 ct + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = \text{Const.} \qquad (9.6)$$

式（9.2）の k は式（9.5）からヌル１形式であり，それに付随するヌルベクトル（波動ベクトル（wave vector）と言う）は光子の世界線に接することを意味し，このときだけ式（9.1）の解となる．

式（9.2）は波動的な解を表す．式（9.2）の左辺・摂動項（トレース反転テンソル）は，式（9.6）が表す超平面上で一定である．

波動ベクトル（ヌルベクトル）の方向に動いている光子を考える．それは式（9.8）の曲線上を動く．式（9.8）と式（9.5）から式（9.9）が導出できる．式（9.9）を式（9.6）と比べると，光子は重力波とともに走り，永久に同じ位相にとどまっている．

$$x^\mu(\lambda) = k^\mu \lambda + l^\mu \qquad (9.8)$$

where λ はパラメーター，

l^μ は定数ベクトル（$\lambda = 0$ での光子の位置）

$$k_\mu x^\mu(\lambda) = k_\mu l^\mu = \text{Const.} \qquad (9.9)$$

$$\omega^2/c^2 = |\boldsymbol{k}|^2 = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = (k_1)^2 + (k_2)^2 + (k_3)^2 \qquad (9.10)$$

波動ベクトルがヌルベクトルであることつまり式（9.5）は，式（9.10）を意味する．これは波動に対する分散係数とよばれる．分散がないことは波の位相速度がその群速度と等しく真空光速であることを意味する．

◆ 摂動項のアインシュタイン方程式の解に対する制限

アインシュタイン方程式は，式（9.11）のローレンツ・ゲージ条件（Lorentz gauge condition）を課した場合のみ式（9.1）の簡単な形になる．式（9.4）から式（9.12）が導出できる．この式は，２ベクトル $A^{\alpha\beta}$ と１形式 k_β が直交していることを意味している．ちなみに Lorentz gauge は harmonic gauge または de Donder gauge とも言われる．

$$\bar{h}^{\mu\nu(\text{new})}{}_{,\nu} = 0 \qquad (8.33) \quad (9.11)$$

$$A^{\alpha\beta}k_\beta = 0 \qquad (9.12)$$

波動方程式の解の複素指数は平面波である．フーリエ解析の定理から，式(9.1)と式(9.11)のどんな解も平面波解の重ね合わせで表される．

４次元のフーリエ変換を式（9.201）のように定義する．右辺を式（9.202）のように書き直すと４変数で積分すればよいことが判る．左辺は式（9.10）を満たす値以外でゼロとなる．（証明略）

$$\bar{H}^{\alpha\beta}\left(\omega/c, k^i\right) = \int \bar{h}^{\alpha\beta}\left(ct, x^i\right)\exp\left(i\omega t - ik_j x^j\right)cdtd^3x \qquad (9.201)$$

$$\int \bar{h}^{\alpha\beta}\left(x^\mu\right)\exp\left(-ik_\mu x^\mu\right)d^4x^\mu \qquad (9.202)$$

■ トランスバース - トレースレスゲージ（transverse-traceless gauge）

◆ ゲージを選ぶ

式（9.2）の振幅に対して，最終的に式（9.12），（9.18），（9.19）の３つの制限をつけることができることを示す．

３次元の非斉次の波動方程式式（8.38）から式（9.13）を満たす任意のベクトルを用いるとローレンツ・ゲージ式（9.11）の範囲内でゲージを変えることができる．式（9.14）の解を選ぶ．

$$\Box f = g \tag{8.38}$$

$$\Box \xi_\alpha = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right)\xi_\alpha = 0 \tag{9.13}$$

$$\xi_\alpha = B_\alpha \exp\left(ik_\mu x^\mu\right) \tag{9.14}$$

where B_α は定数，k^μ は波動ベクトル（ヌルベクトル）

◆ ゲージ変換（gauge transformation）

式（9.14）を式（9.15）のようにゲージ変換する．ゲージ変換する理由はゲージの自由度を使って，アインシュタイン方程式の解の式（9.2）を簡単にするためである．式（9.15）は摂動項のアインシュタイン方程式の導出の過程にでてくる（導出法は別稿参照）．

式（9.15）とトレース反転テンソルの定義式（8.29）から式（9.16）が導出できる．

$$h_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})} = h_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \tag{9.15}$$

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} h \qquad \text{where} \quad h \equiv h^\alpha{}_\alpha \tag{8.29}$$

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})} = h_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h^{(\mathrm{NEW})}$$

$$= h_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left(h^\mu{}_\mu - 2\xi^\mu{}_{,\mu}\right)$$

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} = h_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h^\alpha{}_\alpha$$

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})} = \bar{h}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta}\xi^\mu{}_{,\mu} \tag{9.16}$$

式（9.14）を微分すると，式（9.14'）が得られる．同様に，添字を入れ替えた式，添字を上げた式をつくり，それらと式（9.2）を式（9.16）に代入して両辺を共通因子で除すると式（9.17）が得られる．

$$\xi_\alpha = B_\alpha \exp\left(ik_\mu x^\mu\right) \tag{9.14}$$

$$\text{where} \quad \frac{d}{dx^\mu}\exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right) = ik_\mu \exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right)$$

$$\xi_{\alpha,\beta} = iB_\alpha k_\beta \exp\left(ik_\mu x^\mu\right) \tag{9.14'}$$

$$\xi_{\beta,\alpha} = iB_\beta k_\alpha \exp\left(ik_\mu x^\mu\right)$$

$$\xi^\mu{}_{,\mu} = \eta^{\mu\sigma}\xi_{\sigma,\mu} = \eta^{\mu\sigma} iB_\sigma k_\mu \exp\left(ik_\mu x^\mu\right) = iB^\mu k_\mu \exp\left(ik_\mu x^\mu\right)$$

$$A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})}\exp\left(ik_\mu x^\mu\right) = A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})}\exp\left(ik_\mu x^\mu\right) - iB_\alpha k_\beta \exp\left(ik_\mu x^\mu\right)$$
$$- iB_\beta k_\alpha \exp\left(ik_\mu x^\mu\right) + i\eta_{\alpha\beta}B^\mu k_\mu \exp\left(ik_\mu x^\mu\right)$$

$$A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})} = A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta}B^\mu k_\mu \tag{9.17}$$

◆ トランスバース - トレースレスゲージ（transverse-traceless gauge）

式（9.17）に式（9.18）と式（9.19）の２つの制限を課すように B が選ぶことができる．式（9.18）の条件をトレースレスという．式（9.19）の条件をトランスバースという．式（9.12），（9.18），（9.19）の全体を，トランスバース - トレースレスゲージ（TT ゲージ）条件という．

$$A^\alpha{}_\alpha = 0 \tag{9.18}$$

$$A_{\alpha\beta}U^\beta = 0 \tag{9.19}$$

where U^β は任意に選べる時間的な定数ベクトル

$$A^{\alpha\beta}k_\beta = 0 \tag{9.12}$$

◆　ゲージの自由度の検討

式（9.17）の右辺の OLD がゲージ条件式（9.12）を満たすなら，左辺の NEW も式（9.12）を満たすことを示す．

式（9.17）の両辺に①式を掛けると，右辺の第１項は，②式となる．右辺の残りの項も，式（9.5）を使ってゼロになる．したがって，③式が得られる．

$$\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}k_\nu \qquad ①$$

$$\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}k_\nu A^{(\mathrm{OLD})}_{\alpha\beta} = A^{(\mathrm{OLD})\mu\nu}k_\nu = 0 \qquad ②$$

$$\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = k^\nu k_\nu = 0$$

$$\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}k_\nu A^{(\mathrm{NEW})}_{\alpha\beta} = A^{(\mathrm{NEW})\mu\nu}k_\nu = 0 \qquad ③$$

式（9.17）に対して式（9.18）を使い，B を制限してみる．

式（9.2）から式（9.18）は式（9.203）を意味する．式（9.17）の両辺に④を掛けて整理すると，式（9.204）が得られる．

$$\bar{h}^\alpha{}_\alpha = 0 \qquad (9.203)$$

$$\eta^{\alpha\beta} \qquad ④$$

$$\eta^{\alpha\beta}A^{(\mathrm{NEW})}_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}A^{(\mathrm{OLD})}_{\alpha\beta} - i\eta^{\alpha\beta}B_\alpha k_\beta - i\eta^{\alpha\beta}B_\beta k_\alpha + i\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}B^\mu k_\mu$$

$$A^{(\mathrm{NEW})\alpha}{}_\alpha = A^{(\mathrm{OLD})\alpha}{}_\alpha - iB^\beta k_\beta - iB^\alpha k_\alpha + i4^\mu k_\mu = 0$$

$$A^{(\mathrm{OLD})\alpha}{}_\alpha + 2iB^\alpha k_\alpha = 0$$

$$B^\alpha k_\alpha = \frac{i}{2}A^{(\mathrm{OLD})\alpha}{}_\alpha \qquad (9.204)$$

式（9.17）に対する式（9.18）はフリーな添字が２つあるから，B に４つの条件を課すようにみえるが，実際には３つの制限しか与えないことを示す．

式（9.17）の両辺に⑤を掛けて整理すると，式（9.205）が得られる．

$$k^\alpha U^\beta \qquad ⑤$$

$$k^\alpha U^\beta A^{(\mathrm{NEW})}_{\alpha\beta} = k^\alpha U^\beta A^{(\mathrm{OLD})}_{\alpha\beta}$$
$$- ik^\alpha U^\beta B_\alpha k_\beta - ik^\alpha U^\beta B_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta}k^\alpha U^\beta B^\mu k_\mu$$

$$k^\alpha U^\beta A^{(\mathrm{NEW})}_{\alpha\beta} = 0 \qquad (9.205)$$

これで B が解ける．式（9.17）で⑥式を使えば，式（9.206a）が得られる．式（9.17）で⑦式を使えば，式（9.206b）が得られる．

$$\beta = 0 \qquad ⑥$$

$$0 = A^{(\mathrm{OLD})}_{\alpha\beta} - 2iB_0k_0 - iB^\mu k_\mu = A^{(\mathrm{OLD})}_{\alpha\beta} - 2iB_0k_0 + \frac{1}{2}A^{(\mathrm{OLD})\alpha}{}_\alpha$$

$$B_0 = -\frac{i}{2k_0}\left(A^{(\mathrm{OLD})}_{00} + \frac{1}{2}A^{(\mathrm{OLD})\alpha}{}_\alpha\right) \qquad (9.206a)$$

$$\beta = j \qquad ⑦$$

$$0 = A^{(\mathrm{OLD})}_{0j} - iB_0k_j - iB_jk_0$$

$$= A^{(\mathrm{OLD})}_{0j} - i\frac{-i}{2k_0}\left(A^{(\mathrm{OLD})}_{00} + \frac{1}{2}A^{(\mathrm{OLD})\alpha}{}_\alpha\right)k_j - iB_jk_0$$

$$B_i = \frac{i}{2(k_0)^2}\left(-2k_0A^{(\mathrm{OLD})}_{0j} + k_j\left(A^{(\mathrm{OLD})}_{00} + \frac{1}{2}A^{(\mathrm{OLD})\alpha}{}_\alpha\right)\right) \qquad (9.206b)$$

平面波の重ね合せが式（9.18），（9.19）を満たすように式（9.15）でゲージを適当に選べる．これはアインシュタイン方程式が座標系に制限を付けないことから，式（9.15）において任意の微小なベクトルを自由に選んでよいことになるからである．したがって，これらの条件はどんな種類の重力波にも適用することができる．

振動しない静的な解では，式（9.18），（9.19）は成り立たない．波動ベクトルの時間部分が 0 ならば，トレースレス条件式（9.18）から波動ベクトルの空間部分は 0 としなければなくなる．また，式（9.2）から，正弦振動しなくなるので，トランスバース条件式（9.19）も成り立たない．

◆　波動方程式の解の振幅の自由度は２である

トレース反転テンソル定義式（8.29）とトレースレス条件（9.18）から次式が成り立つ.

$$\bar{h}^{TT}_{\alpha\beta} = h^{TT}_{\alpha\beta} \tag{9.20}$$

波動方程式の解の式（9.2）の振幅因子を求めてみる.

バックグラウンドのミンコフスキー時空に対して TT ゲージをつくるときの４元速度を⑧式となるようなローレンツ系をとる（すわわち，バックグラウンドのローレンツ変換をする）.

トランスバース条件式（9.19）は⑨式となる．この系で波が z 方向に伝わり，⑪式となるような空間軸を選ぶ．すると式（9.19'）と式（9.12）から，⑫式が得られる．つまり⑬式が成り立つ．⑫式と⑬式から波の振幅は波の伝播方向に直交する（これがトランスバースの語源である）．さらにトレース条件式（9.18）から⑭式が成り立つ．整理すると，式（9.21）が得られる．これは式（9.2'）の振幅因子である.

$$\vec{U} \to (c, 0, 0, 0) \quad ⑧$$

$$A_{\alpha 0} U^0 = 0 \quad ⑨$$

$$A_{\alpha 0} = 0, \ \text{for all } \alpha \quad ⑩$$

$$\vec{k} \to (\omega / c, 0, 0, -\omega / c) \quad ⑪$$

$$A^{\alpha 0} k_0 = 0, \quad A^{\alpha 3} k_3 = 0 \tag{9.19'}$$

$$A_{\alpha 3} = 0, \ \text{for all } \alpha \quad ⑫$$

$$A_{xx} \neq 0, \quad A_{yy} \neq 0, \quad A_{xy} = A_{yx} \neq 0 \quad ⑬$$

$$A_{11} + A_{22} = 0, \quad A_{xx} = -A_{yy} \quad ⑭$$

$$\left(A^{TT}_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.21}$$

$$h_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right) \tag{9.2'}$$

【Reference】

Misner, Thorne, & Wheeler「GRAVITATION」p944-p948（FREEMAN）
いわゆる MTW phone book
Petros Souvatzis “The linearized theory of gravitational radiation and the detection of gravitational waves”
Carl Philip Dettmann “General Relativity”
Sean M. Carroll “Lecture_notes_on_General_Relativity”
佐藤真希「超弦理論的効果による背景重力波の円偏光」p27-p29