

9 重力波

トランスバース - トレースレスゲージ, 波動方程式, 重力波の発生, 重力波の検出

9.1 重力波の伝播 (9.1) ~ (9.12)

【表記法】ダランベルシヤン (4次元ラプラシアン) の定義式.

$$\square \equiv -\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\square \equiv -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = -\frac{1}{c^2} (\partial_t)^2 + \Delta = \partial_\mu \partial^\mu$$

$$\square f = \partial_\mu \partial^\mu f = f^{;\mu}_{;\mu} = \eta^{\mu\nu} f_{;\mu\nu} = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) f \quad (8.37)$$

弱い重力場でのアインシュタイン方程式 (線形理論での場の方程式)

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (8.42)$$

where $\bar{h}^{\mu\nu}$: trace reverse of the metric perturbation (無次元)

$T^{\mu\nu}$: ストレス - エネルギーテンソル (エネルギー・運動量テンソル) (圧力 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ の次元をもつ)

G : 万有引力定数 $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

両辺は m^{-2} の次元をもつ

は真空中 ($T^{\mu\nu} = 0$) で次の形をとり, 3次元波動方程式とよばれる.

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \bar{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad \square \bar{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad \bar{h}^{\alpha\beta, \mu}_{;\mu} = 0 \quad (9.1)$$

練習問題 1 (9.4)

これは次の場合に限って消える.

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = k^\nu k_\nu = 0 \quad (9.5)$$

したがって, 式 (9.2) は k_α がヌル形式, それに付随する4元ベクトル k^α がヌル, すなわち光子の世界線に接する場合, 式 (9.1) の解となる.

式 (9.2) は波動的な解を表す. $\bar{h}^{\alpha\beta}$ の値は, $k_\alpha x^\alpha$ が一定となる超平面上で一定である.

$$k_\alpha x^\alpha = k_0 ct + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \text{Const.} \quad (9.6)$$

$\omega = k^0 c$ とし, 波の振動数とよばれる.

$$\vec{k} \rightarrow (\omega/c, \mathbf{k}) \quad (9.7)$$

は, \vec{k} の時間 - 空間分解である. あるヌルベクトル \vec{k} の方向に動いている光子を考える. それは次の曲線上を動く.

$$x^\mu(\lambda) = k^\mu \lambda + l^\mu \quad (9.8)$$

where λ はパラメーター,

l^μ は定数ベクトル ($\lambda=0$ での光子の位置)

式 (9.8) と (9.5) から,

$$k_\mu x^\mu(\lambda) = k_\mu l^\mu = \text{Const.} \quad (9.9)$$

これを式 (9.6) と比べると, 光子は重力波とともに走り, 永久に同じ位相にとどまっている. \vec{k} がヌルベクトルであることは, 次式を意味する.

$$\omega^2/c^2 = |\mathbf{k}|^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (k_1)^2 + (k_2)^2 + (k_3)^2 \quad (9.10)$$

これは波動に対する分散係数とよばれる. 波の位相速度が, その群速度と同様に c である.

アインシュタイン方程式は, 次のゲージ条件

$$\bar{h}^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \quad (9.11)$$

のときにのみ, 式 (9.1) の簡単な形をとる. 式 (9.4) から,

$$\diamond \quad A^{\alpha\beta} k_\beta = 0 \quad (9.12)$$

これが $A^{\alpha\beta}$ に対する制限である. $A^{\alpha\beta}$ と \vec{k} は直交している.

解 $A^{\alpha\beta} \exp(ik_\mu x^\mu)$ は平面波とよばれる. フーリエ解析の定理から, 式(9.1)と式(9.11)のどんな解も平面波解の重ね合わせで表される.

9 重力波 9.6 練習問題

練習問題 2 (9.2)

練習問題 3 (9.10)

トランスバース - トレースレスゲージ (9.13) ~ (9.21)

振幅 $A^{\alpha\beta}$ に対しての制限である式 (9.12) 以外にも、ゲージの自由度を用いるとさらに制限をつけることができる。

$$\square f = g \quad (8.38)$$

式 (8.38) から次の方程式

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \xi_\alpha = 0 \quad (9.13)$$

を満たす任意のベクトル ξ^α を用いるとローレンツ・ゲージ

$$\blacklozenge \quad \bar{h}^{\mu\nu(\text{new})}_{, \nu} = 0 \quad (8.33)$$

$$\square(\xi^\mu + \eta^\mu) = \bar{h}^{\text{(old)}\mu\nu}_{, \nu} \quad (8.40)$$

の範囲内でゲージを変えることができる。

次の解を選ぶ。

$$\xi_\alpha = B_\alpha \exp(ik_\mu x^\mu) \quad (9.14)$$

where B_α は定数, k^μ は波動解と同じヌルベクトル

この解は式 (8.24) で与えられる変化を引き起こす。

$$\blacklozenge \quad h_{\alpha\beta}^{\text{(new)}} = h_{\alpha\beta}^{\text{(old)}} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \quad (8.24b)$$

$$h_{\alpha\beta}^{\text{(NEW)}} = h_{\alpha\beta}^{\text{(OLD)}} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \quad (9.15)$$

練習問題 4 (9.16) ~ (9.17)

次の二つの制限を $A_{\alpha\beta}^{\text{(NEW)}}$ に課すように, B_α が選ぶことができる。

$$\diamond \quad A^\alpha{}_\alpha = 0 \quad (9.18)$$

この条件を **トレースレス** という。

9 重力波 9.6 練習問題

$$\diamond \quad A_{\alpha\beta} U^\beta = 0 \quad (9.19)$$

where U^β は任意に選べる時間的な定数ベクトルこの条件を **トランスバース** という。

$$\diamond \quad A^{\alpha\beta} k_\beta = 0 \quad (9.12)$$

式 (9.12), (9.18), (9.19) の全体を, **トランスバース - トレースレス (TT) ゲージ条件** という。

練習問題 5 (9.15) ~ (9.19)

トレースレス条件 (9.18) は次を意味する。

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{TT} = h_{\alpha\beta}^{TT} \quad (9.20)$$

練習問題 6 (9.21)

自由粒子に対する波の影響 (9.22) ~ (9.24)

はじめは波のない時空領域にいた粒子が、重力波と出会う。粒子がはじめに静止しているようなローレンツ系を選び、この系に対する TT ゲージをとる。自由粒子は測地線方程式に従う。

$$\frac{d}{d\tau} U^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0 \quad (9.22)$$

最初、粒子は静止しているから、その加速度の初期値は、

$$\left(\frac{dU^\alpha}{d\tau} \right)_0 = -\Gamma^\alpha_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\beta 0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}) \quad (9.23)$$

式 (9.21) から $h_{\beta 0} = 0$ だから初期加速度は 0 になる。

練習問題 7 (9.22) ~ (9.23)

練習問題 8 (9.23)

近傍にある 2 つの粒子の間の固有距離

$$\begin{aligned}\Delta l &= \int \left| ds^2 \right|^{1/2} = \int \left| g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \right|^{1/2} \\ &= \int_0^\epsilon \left| g_{xx} \right|^{1/2} dx \approx \left| g_{xx}(x=0) \right|^{1/2} \epsilon \\ &\approx \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(x=0) \right] \epsilon\end{aligned}\quad (9.24)$$

練習問題 9 (9.23) ~ (9.24)

練習問題 10 ()

最初に x 方向に ϵ だけ離れていた粒子が次式に従う連結ベクトルをもつ.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^x = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{TT}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^y = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}^{TT} \quad (9.28a)$$

最初に y 方向に ϵ だけ離れていた粒子が次式に従う連結ベクトルをもつ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^y &= \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{yy}^{TT} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{TT} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^x &= \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}^{TT}\end{aligned}\quad (9.28b)$$

重力波の偏光

練習問題 11 (9.27) ~ (9.28)

練習問題 12 (9.27) ~ (9.28)

練習問題 13 (9.27) ~ (9.28)

練習問題 14 (9.27) ~ (9.28)

練習問題 15 (9.27) ~ (9.28)

練習問題 16 (9.27) ~ (9.28)

節の中で使われている公式と問題

9.1 重力波の伝播 (9.1) ~ (9.32)

問題 1, 2, 3

トランスバース - トレースレスゲージ (9.13) ~ (9.21)

問題 4, 5, 6

自由粒子に対する波の影響 (9.22) ~ (9.24)

問題 7, 8, 9

潮汐加速度：重力波による力 (9.25) ~ (9.28)

問題 10

空間ののびを測る (9.29) ~ (9.31)**重力波の偏光** ()

問題 11, 12, 13, 14, 15, 16

平面波の厳密解 (9.32)**幾何光学：曲った時空中の波動** ()**9.2 重力波の検出** (9.33) ~ (9.63)**共鳴型検出器** (9.33) ~ (9.57)**現在観測に使用されているバー型検出器** ()**光を使って距離を測る** (9.58) ~ (9.63)**ビーム検出器** ()**干渉計による観測** ()**9.3 重力波の発生** (9.64) ~ (9.106)

遅い運動による波動の発生	(9.64) ~ (9.99)
大きさのオーダーの評価	(9.100)
波動方程式の厳密解	(9.101) ~ (9.106)
9.4 重力波によって運ばれるエネルギー	(9.107) ~ (9.146)
重力波のエネルギー流速	(9.107) ~ (9.122)
輻射している系から失われるエネルギー	(9.123) ~ (9.146)
9.5 天体物理的な重力波源	(9.147) ~ (9.148)
自転する中性子星	()
重力崩壊	()
ビックバンからの重力波	()

(9.4)

練習問題 1

関数 $f(s)$ が微分 $f'(s) = df/ds$ をもつ. $\partial f(k_\mu x^\mu) / \partial x^\nu = k_\nu f'(k_\mu x^\mu)$ を示せ. これを用いて式 (9.4) とその次の式を示せ.

問題の式は,

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} f(k_\mu x^\mu) = \frac{\partial(k_\mu x^\mu)}{\partial x^\nu} \frac{\partial f(k_\mu x^\mu)}{\partial(k_\mu x^\mu)} = k_\nu f'(k_\mu x^\mu)$$

式 (9.1) の解

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \tag{9.2}$$

where $\{k_\alpha\}$ はある一形式の定数成分,

$\{A^{\alpha\beta}\}$ はあるテンソルの定数成分

から,

$$\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\mu} = A^{\alpha\beta} \frac{d}{dx^\mu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) = ik_\mu A^{\alpha\beta} \exp(ik_\alpha x^\alpha) = ik_\mu \bar{h}^{\alpha\beta}$$

$$\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\mu} = ik_\mu \bar{h}^{\alpha\beta} \tag{9.4}$$

となる.

ダランベルシヤンの定義式 (8.37) から, 式 (9.1) は次のように書ける.

$$\eta^{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\mu\nu} = 0 \tag{9.3}$$

上式の左辺は,

$$\eta^{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} A^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) = i^2 k_\mu k_\nu \eta^{\mu\nu} A^{\alpha\beta} \exp(ik_\alpha x^\alpha)$$

$$\eta^{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \tag{9.3'}$$

$$\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\mu\nu} = -k_\mu k_\nu \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad ; \text{式 (9.4) の次の式} \tag{9.3''}$$

+++++

(9.2)

練習問題 2

ある固定した空間点 $\{x^i\}$ で式 (9.2) の実部と虚部は振動数 $\omega = k^0 c$ で時間的に正弦振動することを示せ.

$$k_\alpha x^\alpha = k_0 ct + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \text{Const.} \tag{9.6}$$

から,

$$k_\alpha x^\alpha = k_0 ct + k_i x^i = \omega t + \theta$$

式 (9.2) から, オイラーの公式を使って,

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik_\alpha x^\alpha) = A^{\alpha\beta} \exp(i(\omega t + \theta))$$

$$= A^{\alpha\beta} \cos(\omega t + \theta) + iA^{\alpha\beta} \sin(\omega t + \theta)$$

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \cos(\omega t + \theta) + iA^{\alpha\beta} \sin(\omega t + \theta)$$

+++++

(9.10)

練習問題 3

$\bar{h}^{\alpha\beta}(ct, x^i)$ を $\int dx^\alpha |\bar{h}^{\mu\nu}|^2 < \infty$ の性質をもつ式 (9.1) の解とする. ここで積分は他の座標を固定して, x^α にわたってとる. 次のように, $\bar{h}^{\alpha\beta}(ct, x^i)$ のフーリエ変換を定義する.

$$\bar{H}^{\alpha\beta}(\omega/c, k^i) = \int \bar{h}^{\alpha\beta}(ct, x^i) \exp(i\omega t - ik_j x^j) c dt d^3x \tag{9.201}$$

式 (9.1) を変換することによって, $\bar{H}^{\alpha\beta}(\omega/c, k^i)$ は式 (9.10) を満たす ω と k^i の値以外でゼロとなることを示せ. 逆変換を適用することによって, $\bar{h}^{\alpha\beta}(ct, x^i)$ を平面波の重ね合せとして書け.

【ポイント】上の公式は多次元フーリエ変換の定義である.

$$\int \bar{h}^{\alpha\beta}(x^\mu) \exp(-ik_\mu x^\mu) d^4x^\mu \tag{9.202}$$

を, $\mu = 0, 1, 2, 3$ について 4 回積分する.

$$x^0 = ct, \quad k^0 = \omega/c, \quad k_0 x^0 = \omega t$$

であることに注意.

???

+++++

(9.16) ~ (9.17)

練習問題 4

式 (9.16) と式 (9.17) を導け。

8.6 練習問題 12 を参照のこと。

トレース反転テンソルの式は、

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h \quad (8.29b)$$

上式と式 (9.15) を使って、

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\alpha\beta}^{(\text{NEW})} &= h_{\alpha\beta}^{(\text{NEW})} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h^{(\text{NEW})} \\ &= h_{\alpha\beta}^{(\text{OLD})} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(h^{\mu}{}_{,\mu} - 2\xi^{\mu}{}_{,\mu}) \end{aligned}$$

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{(\text{OLD})} = h_{\alpha\beta}^{(\text{OLD})} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h^{\alpha}{}_{,\alpha}$$

として、

$$\diamond \quad \bar{h}_{\alpha\beta}^{(\text{NEW})} = \bar{h}_{\alpha\beta}^{(\text{OLD})} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta}\xi^{\mu}{}_{,\mu} \quad (9.16)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(\text{new})} = \bar{h}_{\mu\nu}^{(\text{old})} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha} \quad (8.34)$$

練習問題 1 から、

$$\frac{d}{dx^{\mu}} \exp(ik_{\alpha}x^{\alpha}) = ik_{\mu} \exp(ik_{\alpha}x^{\alpha})$$

だから、

$$\xi_{\alpha} = B_{\alpha} \exp(ik_{\mu}x^{\mu}) \quad (9.14)$$

を微分すると、

$$\xi_{\alpha,\beta} = iB_{\alpha}k_{\beta} \exp(ik_{\mu}x^{\mu})$$

同様に、

$$\xi_{\beta,\alpha} = iB_{\beta}k_{\alpha} \exp(ik_{\mu}x^{\mu})$$

$$\xi^{\mu}{}_{,\mu} = \eta^{\mu\sigma}\xi_{\sigma,\mu} = \eta^{\mu\sigma}iB_{\sigma}k_{\mu} \exp(ik_{\mu}x^{\mu}) = iB^{\mu}k_{\mu} \exp(ik_{\mu}x^{\mu})$$

上式と次式を式 (9.16) に代入して、

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik_{\alpha}x^{\alpha}) \quad (9.2)$$

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^{(\text{NEW})} \exp(ik_{\mu}x^{\mu}) &= A_{\alpha\beta}^{(\text{OLD})} \exp(ik_{\mu}x^{\mu}) - iB_{\alpha}k_{\beta} \exp(ik_{\mu}x^{\mu}) \\ &\quad - iB_{\beta}k_{\alpha} \exp(ik_{\mu}x^{\mu}) + i\eta_{\alpha\beta}B^{\mu}k_{\mu} \exp(ik_{\mu}x^{\mu}) \end{aligned}$$

両辺を共通因子で除して、

$$\diamond \quad A_{\alpha\beta}^{(\text{NEW})} = A_{\alpha\beta}^{(\text{OLD})} - iB_{\alpha}k_{\beta} - iB_{\beta}k_{\alpha} + i\eta_{\alpha\beta}B^{\mu}k_{\mu} \quad (9.17)$$

+++++

9 重力波 9.6 練習問題

(9.15) ~ (9.19)

練習問題 5

(a) $A_{\alpha\beta}^{(\text{OLD})}$ がゲージ条件 $A^{\alpha\beta}k_\beta = 0$ を満たすなら, 式 (9.17) で与えられる $A_{\alpha\beta}^{(\text{NEW})}$ もそれを満たすことを示せ.

(b) $A_{\alpha\beta}^{(\text{NEW})}$ に対して式 (9.18) を使い, B^μ を制限せよ.

(c) $A_{\alpha\beta}^{(\text{NEW})}$ に対する式 (9.19) は自由な添字 α が 0 から 3 までの任意の値をとれるので, B^μ に 4 つの条件を課すようにみえるが, 実際には 3 つの制限しか与えないことを示せ. 特別の線形結合 $k^\alpha(A_{\alpha\beta}U^\beta)$ が任意の B^μ に対して消えることから, これを示せ.

(d) (b)と(c)を用いて, B^μ を k^μ , $A_{\alpha\beta}^{(\text{OLD})}$, U^μ の関数として解け. これらが B^μ を決め, これ以上のゲージ自由度はない.

(e) 平面波の重ね合わせが式 (9.18), (9.19) を満たすように式 (9.15) で ξ^β を適当に選べることを示せ. したがって, これらの条件はどんな種類の重力波にも適用することができる.

(f) 静的な解, すなわち $\omega = 0$ の場合, 式 (9.18), (9.19) は達成できないことを示せ.

(a) 式 (9.17) の両辺に $\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}k_\nu$ を掛けると,

右辺の第 1 項は,

$$\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}k_\nu A_{\alpha\beta}^{(\text{OLD})} = A^{(\text{OLD})\mu\nu}k_\nu = 0$$

右辺の残りの項も,

$$\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = k^\nu k_\nu = 0 \quad (9.5)$$

を使って, ゼロになる. したがって,

$$\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}k_\nu A_{\alpha\beta}^{(\text{NEW})} = A^{(\text{NEW})\mu\nu}k_\nu = 0$$

(b)

9 重力波 9.6 練習問題

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (9.2)$$

であるから,

$$\diamond \quad A^\alpha{}_\alpha = 0 \quad (9.18)$$

は,

$$\bar{h}^\alpha{}_\alpha = 0 \quad (9.203)$$

を意味する. 式 (9.17) の両辺に $\eta^{\alpha\beta}$ を掛けて,

$$\eta^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}^{(\text{NEW})} = \eta^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}^{(\text{OLD})} - i\eta^{\alpha\beta} B_\alpha k_\beta - i\eta^{\alpha\beta} B_\beta k_\alpha + i\eta^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu$$

$$A^{(\text{NEW})\alpha}{}_\alpha = A^{(\text{OLD})\alpha}{}_\alpha - iB^\beta k_\beta - iB^\alpha k_\alpha + i4^\mu k_\mu = 0$$

$$A^{(\text{OLD})\alpha}{}_\alpha + 2iB^\alpha k_\alpha = 0$$

$$B^\alpha k_\alpha = \frac{i}{2} A^{(\text{OLD})\alpha}{}_\alpha \quad (9.204)$$

(c) 式 (9.17) の両辺に $k^\alpha U^\beta$ を掛けて,

$$k^\alpha U^\beta A_{\alpha\beta}^{(\text{NEW})} = k^\alpha U^\beta A_{\alpha\beta}^{(\text{OLD})}$$

$$- ik^\alpha U^\beta B_\alpha k_\beta - ik^\alpha U^\beta B_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} k^\alpha U^\beta B^\mu k_\mu$$

$$k^\alpha U^\beta A_{\alpha\beta}^{(\text{NEW})} = 0 \quad (9.205)$$

(d) 式 (9.17) で $\beta = 0$ として,

$$0 = A_{\alpha\beta}^{(\text{OLD})} - 2iB_0 k_0 - iB^\mu k_\mu = A_{\alpha\beta}^{(\text{OLD})} - 2iB_0 k_0 + \frac{1}{2} A^{(\text{OLD})\alpha}{}_\alpha$$

$$B_0 = -\frac{i}{2k_0} \left(A_{00}^{(\text{OLD})} + \frac{1}{2} A^{(\text{OLD})\alpha}{}_\alpha \right) \quad (9.206a)$$

式 (9.17) で $\beta = j$ として,

$$0 = A_{0j}^{(\text{OLD})} - iB_0 k_j - iB_j k_0$$

$$= A_{0j}^{(\text{OLD})} - i\frac{-i}{2k_0} \left(A_{00}^{(\text{OLD})} + \frac{1}{2} A^{(\text{OLD})\alpha}{}_\alpha \right) k_j - iB_j k_0$$

$$B_i = \frac{i}{2(k_0)^2} \left(-2k_0 A_{0j}^{(\text{OLD})} + k_j \left(A_{00}^{(\text{OLD})} + \frac{1}{2} A^{(\text{OLD})\alpha}{}_\alpha \right) \right) \quad (9.206b)$$

(e)

アインシュタイン方程式が座標系に制限を付けないことから、式 (9.15) において任意の微小なベクトル ξ^β を自由に選んでよいことになる。

(f)

$\omega=0$ ならば、トレースレス条件式 (9.18) から \vec{k} の空間部分は 0 としなければなくなる。また、式 (9.2) から、正弦振動しなくなるので、トランスバース条件式 (9.19) も成り立たない。

+++++

(9.21)

練習問題 6

式 (9.21) を導いている段落で、省略されているすべての計算を補え。

\vec{U} を $U^\beta = c\delta^\beta_0$ ($\vec{U} \rightarrow (c, 0, 0, 0)$) となるようなバックグラウンドのローレンツ変換をする。トランスバース条件

$$\diamond \quad A_{\alpha\beta}U^\beta = 0 \quad (9.19)$$

から、

$$A_{\alpha 0}U^0 = 0$$

であるから、すべての α に対して

$$A_{\alpha 0} = 0$$

とならなければならない。

この系で波が z 方向に伝わり、

$$\vec{k} \rightarrow (\omega/c, 0, 0, -\omega/c)$$

となるような空間軸を選ぶ。

$$\diamond \quad A^{\alpha\beta}k_\beta = 0 \quad (9.12)$$

から、

$$A^{\alpha 0}k_0 = 0, \quad A^{\alpha 3}k_3 = 0$$

であるから、すべての α に対して

$$A_{\alpha 3} = 0$$

とならなければならない。 $A_{\mu\nu}$ は波の伝播方向 \vec{e}_z に直交する (トランスバース)。 A_{xx} , A_{yy} , $A_{xy} = A_{yx}$ だけがゼロでない。さらにトレース条件

$$\diamond \quad A^\alpha{}_\alpha = 0 \quad (9.18)$$

から

$$A_{11} + A_{22} = 0, \quad A_{xx} = -A_{yy}$$

となる。

$$\left(A_{a\beta}^{TT} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.21)$$

+++++

(9.22) ~ (9.23)

練習問題 7

式 (9.22) , (9.23) から TT ゲージで始めに静止していた自由粒子は静止し続けることが示されるが, そのより厳密な証明を与えよ.

式 (9.22) の解は初期位置と U^α によって一意的に決定される. 関数

$$U^\alpha = c\delta^\alpha_0, \quad U \rightarrow (c, 0, 0, 0)$$

はすべての時間において, 式 (9.23) のおかげで式 (9.22) を満足し, したがって, それは上式なる初期データに対する一意的な解である.

+++++

(9.23)

練習問題 8

式 (9.23) の後の議論で、自由粒子は加速度を感じるか？たとえば、カップの中のスプーン（カップの直径は波の波長に比べてはるかに短いとする）は、波が通りすぎるとき、はね回るか？

感じない

+++++

(9.23) ~ (9.24)

練習問題 9

式 (9.23) の後の議論で自由粒子は加速度をみるか？これに答えるため、その相対固有距離が式 (9.24) で計算される 2つの粒子を考える。そのうちの 1つを原点とし、それからもう一つの粒子に向かって光のビームを送る。そのビームは、跳ね返ってもとの原点に戻るとする。光を出してから受け取りまでに経過する固有時間を計算せよ。（粒子間隔は重力波の波長に比べてはるかに小さいと仮定してよい。）この時間の変化を追うことによって、原点の粒子は 2つの粒子の相対加速を“みる”ことができる。

光のビームに対して、

$$ds^2 = 0$$

だから、

$$\frac{cdt}{dx} = \left(\frac{g_{xx}}{|g_{tt}|} \right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t)$$

したがって、

$$c\Delta t \approx \left(2 + \langle h_{xx}^{TT} \rangle \right) \epsilon$$

ここで $\langle h_{xx}^{TT} \rangle$ は光子の飛行時間にわたる h_{xx}^{TT} の何らかの平均値。 $\langle h_{xx}^{TT} \rangle$ は時間とともに変わり、 ϵ は変わらないから、自由粒子はその直線の粒子に相対的な加速度をみることができる。

+++++

()

練習問題 10

(a) A ($|A| \ll 1$) と ω を定数とすると

$$h_{yz} = A \sin \omega(t - x/c) = A \sin k_0(ct - x), \text{ 他のすべての } h_{\mu\nu} = 0$$

は, 式 (9.1) と式 (9.11) の解である. このメトリックテンソルに対して, $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ のすべての成分を計算し, そのいくつかはゼロでなく, したがって時空は平坦ではないことを示せ.

(b) 次式で与えられる別のメトリックを考える.

$$h_{yz} = A \sin \omega(t - x/c) = A \sin k_0(ct - x), \quad h_{tt} = 2B(x - ct)$$

$$h_{tx} = -B(x - ct), \text{ 他のすべての } h_{\mu\nu} = 0$$

これが場の方程式とゲージ条件を満たすことを示せ.

(c) (b) のメトリックについて, $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ を計算せよ. それが (a) と同じになることを示せ.

(d) (c) から 2 つの幾何学は同じであり, メトリックの違いは座標の小さな違いによる. 次式を満たす座標変換 ξ^μ を見つけよ.

$$h_{\mu\nu}(a) - h_{\mu\nu}(b) = -\xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

(a) 線形近似でのリーマン・テンソルは,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) \quad (8.25)$$

問題の式

$$h_{23} = h_{yz} = A \sin k_0(ct - x)$$

から, $\alpha\nu, \beta\mu, \alpha\mu, \beta\nu$ に 23 が入り, その他に 01 が入るものだけ 0 にならない.

しかも 4 つとも符号を除いて同じになる.

$$\begin{aligned} R_{2013} &= \frac{1}{2} h_{23,01} = \frac{1}{2} A \sin k_0(ct - x)_{,tx} = \frac{1}{2} k_0 A \cos k_0(ct - x)_{,x} \\ &= \frac{1}{2} k_0^2 A \sin k_0(ct - x) = \frac{1}{2} k_0^2 h_{23} = \frac{1}{2} k_0^2 h_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 h_{yz} \end{aligned}$$

ここで, 時間による微分は $x^0 = ct$ による微分を意味する.

$$R_{2013} = R_{0231} = -R_{2031} = -R_{0213}$$

(b) 場の方程式 (9.1)

$$\bar{h}^{23} = h^{23} - \frac{1}{2} \eta^{23} h = \eta^{22} \eta^{33} h_{23} = h_{23} = h_{yz} = A \sin k_0(ct - x)$$

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) A \sin k_0(ct - x)$$

$$= k_0^2 A \sin k_0(ct - x) - k_0^2 A \sin k_0(ct - x) = 0$$

$$\bar{h}^{00} = h^{00} - \frac{1}{2} \eta^{00} h = \eta^{00} \eta^{00} h_{00} - \frac{1}{2} \eta^{00} \eta^{00} h_{00} = \frac{1}{2} h_{00} = \frac{1}{2} h_{tt} = B(x - ct)$$

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) B(x - ct) = 0$$

$$\bar{h}^{01} = h^{01} - \frac{1}{2} \eta^{01} h = \eta^{00} \eta^{11} h_{01} = -h_{01} = -h_{tx} = B(x - ct)$$

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) B(x - ct) = 0$$

ゲージ条件式 (9.11)

$$\bar{h}^{23}_{,3} = \frac{d}{dz} A \sin k_0(ct - x) = 0$$

$$\bar{h}^{00}_{,0} = \frac{d}{cdt} B(x - ct) = -B$$

$$\bar{h}^{01}_{,1} = \frac{d}{dx} B(x - ct) = B$$

$$\xi_0 = -\frac{1}{2}(x - ct)^2, \quad \xi_i = 0 \text{ とする.}$$

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \xi^0 = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \frac{1}{2} B(x - ct)^2 = -B + B = 0$$

???

(c) $h_{yz} = A \sin k_0(ct - x)$ については, (a) と同じ.

$$h_{00,01} = 2B(x - ct)_{,01} = -2B_{,1} = 0$$

$$h_{01,01} = -B(x - ct)_{,01} = B_{,1} = 0$$

(d)

$$\bar{h}^{00}_{,0} = \frac{d}{cdt} B(x-ct) = -B$$

であるから,

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \xi^0 = -B$$

となるものを見つける。それは,

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \xi^0 = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \frac{1}{2} B(ct)^2 = -B$$

$$\xi_t = -\frac{1}{2} (ct)^2$$

???

+++++

(9.27) ~ (9.28)

練習問題 11

(a) 式 (9.27) を導け.

(b) 図 9.1 に示された円上のテスト粒子に対して式 (9.28a), (9.28b) を解け.

練習問題 12

式 (9.28) と式 (9.29) を導いた計算と同様な計算を行い, z 方向 (波の進行方向) には粒子間隔は影響を受けないことを示せ.

練習問題 13

バックグラウンドのローレンツ変換の一つは, x - y 面での x, y 軸の 45 度の回転である. (x, y) から (x', y') へのそのような回転で, $h'_{xy} = h_{xx}, h'_{xx} = -h'_{yy}$ となることを示せ. これは図 9.1 にならっている.

練習問題 14

(a) 式 (9.21) で $A_{xy} = 0$ とした平面波のメトリックが

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1+h_+) dx^2 + (1-h_+) dy^2 + dz^2 \tag{9.149}$$

になることを示せ. ここで $h_+ = A_{xx} \sin[\omega(t-z/c)]$ である.

(b) この波は, 自由粒子が x 軸と y 軸を 2 等分する直線上に並んでいる場合には, その粒子間の固有距離を変えないことを示せ.

(c) 式 (9.21) で $A_{xx} = 0$ とした平面波のメトリックが

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + 2h_x dx dy + dy^2 + dz^2 \tag{9.150}$$

になることを示せ. ここで $h_x = A_{xy} \sin[\omega(t-z/c)]$ である.

(d) (c)の波は, 自由粒子が座標軸上に並んでいる場合には, その粒子間の固有距離を変えないことを示せ.

(e) (c)の波は(a)の波の変動を 45 度回転させた楕円的な変形をもたらすことを示せ.

練習問題 15

(a) $h_{yy}^{TT} = -h_{xx}^{TT}$, $h_{xy}^{TT} = \pm i h_{xx}^{TT}$ のとき, 波は x - y 面内で円偏光であるという. そのような波に対して, 図 9.1 の楕円はその形を変えることなく, 回転することを示せ.

(b) a をある実数として, $h_{xy}^{TT} = -i a h_{xx}^{TT}$, $h_{yy}^{TT} = -h_{xx}^{TT}$ のとき, 波は x 軸と y 軸を主軸にもつ楕円偏光であるという. a をある複素数として $h_{xy}^{TT} = a h_{xx}^{TT}$ (平面波の一般の場合) のとき, 波が軸 x , y を主軸にもつ楕円偏光となるように新しい軸 x , y を見つけることができることを示せ. 円偏光と線形偏光は楕円偏光の特別な場合であることを示せ.

練習問題 16

TT ゲージで振幅 $A^{\mu\nu}$ と $B^{\mu\nu}$ をもつ 2 つの平面は, $(A^{\mu\nu})^* B_{\mu\nu} = 0$ のとき, 直交する偏光をもつという. ここで $(A^{\mu\nu})^*$ は $A^{\mu\nu}$ の複素共役である. $A^{\mu\nu}$ と $B^{\mu\nu}$ が直交する偏光をもつとき, $B^{\mu\nu}$ を 45 度回転すると $A^{\mu\nu}$ に比例することを示せ.

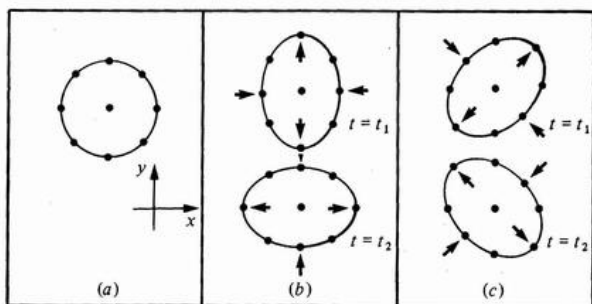


図 9.1 (a) z 方向に進んでいる波がとどく前の自由粒子のつくる円. (b) “+”偏りをもった波によってつくられた円のひずみ. 二つの図は, 位相が 180° 違う同じ波を表す. 粒子はお互いからの固有距離によって位置づけられている. (c) “ \times ” 偏りに対する (b) と同じ図.

練習問題 11 の解

(a) 8.6 練習問題 11 より,

マクスウェル方程式のローレンツ・ゲージ条件

$$\text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A^\mu = A^\mu{}_{,\mu} = 0 \quad (\text{mx7.3})$$

重力場でのローレンツ・ゲージ条件

$$\diamond \quad \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad (8.33)$$

マクスウェル方程式から導かれる波動方程式

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = A^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \square A^\mu = -\mu_0 J^\mu \quad (\text{mx7.6})$$

弱い重力場でのアインシュタイン方程式 (線形理論での場の方程式)

$$\diamond \quad \square \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (8.42)$$

であるから, $h^{\mu\nu}$ versus A^μ , $T^{\mu\nu}$ versus J^μ がアナロジーである.

電磁波の平面波は,

$$A^x = A^x(ct-z), \quad A^y = A^y(ct-z), \quad A^z = 0, \quad A^0 = 0$$

重力波の平面波は,

$$\bar{h}^{xx} = \bar{h}^{xx}(ct-z), \quad \bar{h}^{xy} = \bar{h}^{xy}(ct-z), \quad \bar{h}^{yy} = \bar{h}^{yy}(ct-z)$$

$$\bar{h}^{\mu 0} = \bar{h}^{\mu 3} = 0, \quad \text{for all } \mu$$

これらについて,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) \quad (8.25)$$

を使って, リーマン・テンソルは,

$$R_{x0x0} = -R_{y0y0} = -R_{x0xz} = R_{y0yz} = R_{xzxz} = -R_{yzyz} = -\frac{1}{4} (\bar{h}_{xx} - \bar{h}_{yy})_{,\mu}$$

$$R_{x0y0} = -R_{x0yz} = R_{xzyz} = -R_{xzy0} = -\frac{1}{2} \bar{h}_{xy,\mu}$$

上式以外は次式の対称を除いて 0 になる.

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

これから, TT ゲージにおいては,

$$R_{j0k0} = R_{0j0k} = -R_{j00k} = -R_{0jk0} = -\frac{1}{2}h_{jk,00}^{TT} \quad (9.27')$$

したがって、

$$R^x{}_{0x0} = R_{x0x0} = -\frac{1}{2}h_{xx,00}^{TT} \quad (9.27)$$

$$R^y{}_{0x0} = R_{y0x0} = -\frac{1}{2}h_{xy,00}^{TT}$$

$$R^y{}_{0y0} = R_{y0y0} = -\frac{1}{2}h_{yy,00}^{TT} = -R^x{}_{0x0}$$

(b) 測地線方程式

$$\diamond \quad \nabla_\nu \nabla_\nu \xi^\alpha = R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} U^\mu U^\nu \xi^\beta \quad (6.87)$$

より、2粒子間の連結ベクトルは次式を満たす。

$$\frac{d^2}{c^2 d\tau^2} \xi^\alpha = R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} U^\mu U^\nu \xi^\beta \quad (9.25)$$

$$\frac{d^2}{c^2 d\tau^2} \xi^\alpha = \frac{d^2}{c^2 dt^2} \xi^\alpha = \varepsilon R^\alpha{}_{00x} = -\varepsilon R^\alpha{}_{0x0} \quad (9.26)$$

where $\bar{U} \rightarrow (c, 0, 0, 0)$, $\bar{\xi} \rightarrow (0, \varepsilon, 0, 0)$ 初期値

上式から、その実効的な力による加速度は、

$$\frac{d^2}{c^2 d\tau^2} \xi^i = \frac{d^2}{c^2 dt^2} \xi^i = -R^i{}_{0j0} \xi^j \quad (9.29)$$

$$= \frac{1}{2} h_{ij,00}^{TT} \xi^j = \frac{1}{2} \frac{d^2}{c^2 dt^2} h_{ij,00}^{TT} \xi^j \quad (9.28c)$$

光の進行方向の単位ベクトル \bar{e}_z に垂直な平面上の直交する単位ベクトル \bar{e}_x ,

\bar{e}_y を使って、偏光テンソルを定義する。

プラス偏光テンソルは、

$$\bar{e}_+ = \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x - \bar{e}_y \otimes \bar{e}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textcircled{1}$$

クロス偏光テンソルは、

$$\bar{e}_+ = \bar{e}_x \otimes \bar{e}_y + \bar{e}_y \otimes \bar{e}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textcircled{2}$$

式 (9.2) と式 (9.21) から、

$$h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT} = A_+ \exp(ik_\sigma x^\sigma) \quad \textcircled{3}$$

$$h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT} = A_\times \exp(ik_\sigma x^\sigma)$$

where $\bar{k} \rightarrow (\omega/c, 0, 0, -\omega/c)$, $k_\sigma x^\sigma = \omega(t - z/c)$

$$A_+ = A_{xx} = -A_{yy}, \quad A_\times = A_{xy} = -A_{yx}$$

上式は偏光テンソルを使えば一般的に書ける。

$$h_{ij} = A_{ij} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \bar{e}_{pij} \quad \textcircled{4}$$

式 (9.28c) も偏光テンソルを使えば一般的に書ける。

$$\frac{d^2}{dt^2} \xi^i = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} h_{ij,00}^{TT} \xi^j = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} A_{ij} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \bar{e}_{pij} \xi^j \quad (9.28d)$$

上式は式 (9.28a) と (9.28b) の一般化である。

上式の解 (2粒子間の距離) は、

$$\xi^i = \xi^i(0) + \frac{1}{2} A_{ij} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \bar{e}_{pij} \xi^j(0) \quad (9.28e)$$

プラス偏光 ($A_+ \neq 0$, $A_\times = 0$) の場合、

式 (9.28d) は、①式を使って、

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \\ 0 & -\frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad \textcircled{5}$$

この方程式の解は、

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \\ 0 & 1 - \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1(0) \\ \xi^2(0) \end{pmatrix} \quad \textcircled{6}$$

$\xi^1(0)$, $\xi^2(0)$ は、 $t=0$ ではなく、重力波到達前の連結ベクトルの成分であり、

9 重力波 9.6 練習問題

円状の2粒子間のその初期値を次式とする.

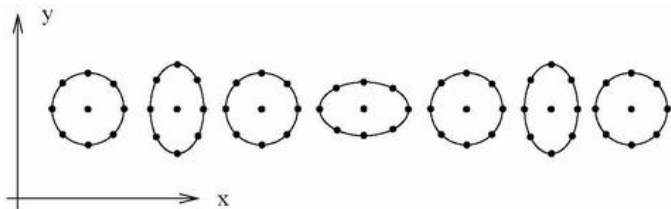
$$\left(\xi^1(0), \xi^2(0)\right) = (\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta) \quad \text{where } \varepsilon = \text{最初の円の直径} \quad (7)$$

これを使って, $z=0$ 面の2粒子間の連結ベクトルの成分を次式となる.

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_+}{2} \cos \omega t & 0 \\ 0 & 1 - \frac{A_+}{2} \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \cos \theta \\ \varepsilon \sin \theta \end{pmatrix} \quad (8)$$

ε の係数の計算結果

$(+2\pi n)$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 135^\circ$
$\omega t = 0$	$1 + \frac{A_+}{2}$	1	$1 - \frac{A_+}{2}$	1
$\omega t = \frac{\pi}{2}$	1	1	1	1
$\omega t = \pi$	$1 - \frac{A_+}{2}$	1	$1 + \frac{A_+}{2}$	1
$\omega t = \frac{3}{2}\pi$	1	1	1	1



クロス偏光 ($A_+ \neq 0, A_x = 0$) の場合,

式 (9.28d) は, ②式を使って,

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

この方程式の解は,

9 重力波 9.6 練習問題

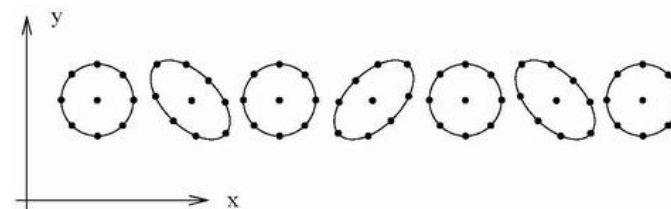
$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1(0) \\ \xi^2(0) \end{pmatrix} \quad (10)$$

ε = 最初の円の直径を使って,

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{A_x}{2} \cos \omega t \\ \frac{A_x}{2} \cos \omega t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \cos \theta \\ \varepsilon \sin \theta \end{pmatrix} \quad (11)$$

ε の係数の計算結果

$(+2\pi n)$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 135^\circ$
$\omega t = 0$	1	$1 + \frac{A_x}{2}$	1	$1 - \frac{A_x}{2}$
$\omega t = \frac{\pi}{2}$	1	1	1	1
$\omega t = \pi$	1	$1 - \frac{A_x}{2}$	1	$1 + \frac{A_x}{2}$
$\omega t = \frac{3}{2}\pi$	1	1	1	1



+++++

練習問題 12 の解

$$\frac{d^2}{dt^2} \xi^i = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} h_{ij}^{TT} \xi^j = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} A_{ij} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \bar{e}_{pij} \xi^j \quad (9.28d)$$

$$\xi^i = \xi^i(0) + \frac{1}{2} A_{ij} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \bar{e}_{pij} \xi^j(0) \quad (9.28e)$$

$$\frac{d^2}{c^2 dt^2} \xi^i = \frac{d^2}{c^2 dt^2} \xi^i = -R^i{}_{0j0} \xi^j \quad (9.29)$$

上式に $i=3, j=1$ または $i=3, j=2$ を代入しても ξ^3 は定数である。

よって、y-z 平面、z-x 平面のテスト粒子は動かない。

+++++

練習問題 13 の解

クロス偏光テンソルを 45 度回転させると、

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^T (\bar{e}_+) \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\bar{e}_x)$$

プラス偏光テンソルと同じになる。したがって、

$$h_{x'y'}^{TT} = h_{xx}^{TT}, \quad h_{x'x'}^{TT} = -h_{xy}^{TT}$$

+++++

練習問題 14 の解

(a) 式 (8.12) と式 (9.21) から、

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これを線要素に書くと、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1+h_+)dx^2 + (1-h_+)dy^2 + dz^2 \quad (9.149)$$

(b) 練習問題 11 の③式に $\theta = 45^\circ$ を代入する。

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_+}{2} \cos \omega t & 0 \\ 0 & 1 - \frac{A_+}{2} \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon / \sqrt{2} \\ \varepsilon / \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

粒子間距離は、

$$\begin{aligned} (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_+}{2} \cos \omega t \right)^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A_+}{2} \cos \omega t \right)^2 \varepsilon^2 \\ &= \left(1 + \frac{A_+^2}{2} \cos^2 \omega t \right) \varepsilon^2 \approx \varepsilon^2 \end{aligned}$$

(c) 式 (8.12) と式 (9.21) から、

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_x & 0 \\ 0 & h_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これを線要素として書くと、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + 2h_x dx dy + dy^2 + dz^2 \quad (9.150)$$

(d) 練習問題 11 の⑩式に $\theta = 0^\circ$ を代入する。

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{A_x}{2} \cos \omega t \\ \frac{A_x}{2} \cos \omega t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

粒子間距離は、

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = \varepsilon^2 + \frac{A_x^2}{4} \cos^2 \omega t \varepsilon^2 \approx \varepsilon^2$$

(e) 練習問題 11 よりプラス偏光の解は、

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \\ 0 & 1 - \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1(0) \\ \xi^2(0) \end{pmatrix} \quad \text{⑥}$$

これを 45 度回転させると、

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \\ 0 & 1 - \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \\ 0 & 1 - \frac{A_+}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9 重力波 9.6 練習問題

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 1 \end{pmatrix}$$

これは、クロス偏光の解

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ \frac{A_x}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1(0) \\ \xi^2(0) \end{pmatrix} \quad (10)$$

と同じである。

+++++

練習問題 15 の解

円偏光 ($A_+ = A_x = A_R = A_L \neq 0$) の場合、

右円偏光テンソルは、

$$\bar{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}_+ + i\bar{e}_x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

左円偏光テンソルは、

$$\bar{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}_+ - i\bar{e}_x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

右円偏光の場合、

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & i \frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ i \frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & -\frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

この方程式の解は、

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_R}{2} \cos \omega t & \frac{A_R}{2} \sin \omega t \\ \frac{A_R}{2} \sin \omega t & 1 - \frac{A_R}{2} \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \cos \theta \\ \varepsilon \sin \theta \end{pmatrix} \quad (15)$$

左円偏光の場合、

9 重力波 9.6 練習問題

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} -\frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & i \frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ i \frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) & \frac{A_R}{2} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

この方程式の解は、

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{A_R}{2} \cos \omega t & \frac{A_R}{2} \sin \omega t \\ \frac{A_R}{2} \sin \omega t & 1 + \frac{A_R}{2} \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \cos \theta \\ \varepsilon \sin \theta \end{pmatrix} \quad (17)$$

右円偏光の ε の係数の計算結果

$(+2\pi n)$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 135^\circ$
$\omega t = 0$	$1 + \frac{A_L}{2}$	1	$1 - \frac{A_L}{2}$	1
$\omega t = \frac{\pi}{2}$	1	$1 + \frac{A_L}{2}$	1	$1 - \frac{A_L}{2}$
$\omega t = \pi$	$1 - \frac{A_L}{2}$	1	$1 + \frac{A_L}{2}$	1
$\omega t = \frac{3}{2}\pi$	1	$1 - \frac{A_L}{2}$	1	$1 + \frac{A_L}{2}$



【注意】 MTW phone book によれば、right-handed mode において、楕円は反時計回りである。

左円偏光の ϵ の係数の計算結果

$(+2\pi n)$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 135^\circ$
$\omega t = 0$	$1 + \frac{A_R}{2}$	1	$1 - \frac{A_R}{2}$	1
$\omega t = \frac{\pi}{2}$	1	$1 - \frac{A_R}{2}$	1	$1 + \frac{A_R}{2}$
$\omega t = \pi$	$1 - \frac{A_R}{2}$	1	$1 + \frac{A_R}{2}$	1
$\omega t = \frac{3}{2}\pi$	1	$1 + \frac{A_R}{2}$	1	$1 - \frac{A_R}{2}$



【別解】

プラス偏光テンソルじしんを回転させる.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}^T (\vec{e}_+) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} & 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(①式と②式をつかって)

$$= (\vec{e}_+ \cos \theta + \vec{e}_x \sin \theta)$$

$$= (\vec{e}_+ + i\vec{e}_x) \exp i\theta$$

$$= \sqrt{2}(\vec{e}_R) \exp i\theta$$

上式は, right-handed mode で楕円が反時計回りを意味する.

+++++

練習問題 16 の解

$B^{\mu\nu}$ を仮定し, 45 度回転すると,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^T (B^{\mu\nu}) \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{xx} & iB_{xy} \\ iB_{xy} & -B_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -iB_{xy} & B_{xx} \\ B_{xx} & iB_{xy} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$A^{\mu\nu}$ は $C \times$ 上式と仮定すると,

$$(A^{\mu\nu})^* B_{\mu\nu} = C \begin{pmatrix} iB_{xy} & B_{xx} \\ B_{xx} & -iB_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{xx} & -iB_{xy} \\ -iB_{xy} & -B_{xx} \end{pmatrix} = 0$$

where $B_{\mu\nu}$ は添字を下げているの虚数の符号を反転

+++++

【Reference】

Misner, Thorne, & Wheeler 「GRAVITATION」 p952-p954 (FREEMAN)

いわゆる MTW phone book

Petros Souvatzis “The linearized theory of gravitational radiation and the detection of gravitational waves”

Carl Philip Dettmann “General Relativity”

Sean M. Carroll “Lecture_notes_on_General_Relativity”

佐藤真希 「超弦理論の効果による背景重力波の円偏光」 p29-p33

(9.33) ~ (9.38)

練習問題 17

式 (9.33) ~ (9.36) の座標 (ct, x, y, z) から, 式 (9.37) の局所慣性系への変換を見つけよ. これを用いて, 式 (9.38) を確かめよ.

$$mx_{1,0,0} = -k(x_1 - x_2 + l_0) - v(x_1 - x_2)_{,0} \quad (9.33)$$

$$mx_{2,0,0} = -k(x_2 - x_1 - l_0) - v(x_2 - x_1)_{,0} \quad (9.34)$$

$$\xi = x_2 - x_1 - l_0, \quad \omega_0^2 = 2k/m, \quad \gamma = v/m \quad (9.35)$$

$$\xi_{,0,0} + 2\gamma\xi_{,0} + \omega_0^2\xi = 0 \quad (9.36)$$

$$mx^j_{,0,0} = F^j \quad (9.37)$$

$$mx^j_{,0,0} = F^j + O(|h_{\mu\nu}|^2) \quad (9.38)$$

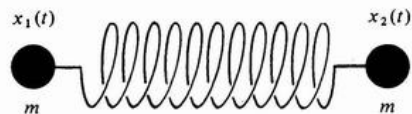


図 9.2 ばねでつながれた二つの同じ質量を使った重力波の検出装置

+++++

(9.39)

練習問題 18

式 (9.39) を証明せよ.

$$l(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \left[1 + h_{xx}^{TT}(t) \right]^{1/2} dx$$

$$= [x_2(t) - x_1(t)] \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t) \right] + O(|h_{\mu\nu}|^2) \quad (9.39)$$

+++++

()

練習問題 19

式 (9.40) と (9.41) の和を用いて, ばねの重心は波が通り過ぎても静止したままであることを示せ.

$$mx_{1,0,0} = -k(l_0 - l) - v(l_0 - l)_{,0} \quad (9.40)$$

$$mx_{2,0,0} = -k(l - l_0) - v(l - l_0)_{,0} \quad (9.41)$$

+++++

(9.42) ~ (9.45)

練習問題 20

式 (9.43) から (9.44) を導け. 次に式 (9.45) を証明せよ.

$$\xi = l - l_0 \quad (9.42)$$

$$\xi = x_2 - x_1 - l_0 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT} (x_2 - x_1) + O(|h_{\mu\nu}|^2) \quad (9.43)$$

$$x_2 - x_1 = l_0 + \xi - \frac{1}{2} h_{xx}^{TT} l_0 + O(|h_{\mu\nu}|^2) \quad (9.44)$$

◆ $\xi_{,0,0} + 2\gamma\xi_{,0} + \omega_0^2 \xi = \frac{1}{2} l_0 h_{xx,00}^{TT} \quad (9.45)$

+++++

(9.42)

練習問題 21

2つの質量を結ぶ線に対して任意の方向に進み、任意の楕円偏光（練習問題 15）をもつ平面波に対して式 (9.45) を一般化せよ。

+++++

()

練習問題 22

式 (9.45) の検出器の重心での測地線の観点から、測地線偏差の方程式 (6.87) を考察せよ。式 (9.42) で定義したベクトル ξ は重心から質量の 1 つへの連結ベクトルの 2 倍であることを示せ。重心で測った潮汐力から、直接、式 (9.45) が導かれることを示せ。

$$\blacklozenge \quad \nabla_V \nabla_V \xi^\alpha = R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} V^\mu V^\nu \xi^\beta \quad (6.87)$$

()

練習問題 23
 式 (9.48) と (9.49) を導き, $t=0$ とした式 (9.45) で与えられる初期条件
 に対する式 (9.46) の一般解を求めよ.

$$h_{xx}^{TT} = A \cos \Omega t \tag{9.46}$$

$$\xi = R \cos(\Omega t + \phi) \tag{9.47}$$

$$R = \frac{1}{2} l_0 \Omega^2 A / [(\omega_0 - \Omega)^2 + 4\Omega^2 \gamma^2]^{1/2} \tag{9.48}$$

$$\tan \phi = 2\gamma\Omega / (\omega_0^2 - \Omega^2) \tag{9.49}$$

+++++

(9.53)

練習問題 24
 式 (9.53) を証明せよ.

$$\langle E \rangle = \frac{1}{8} m R^2 (\omega_0^2 + \Omega^2) \tag{9.53}$$

+++++

(9.56)

練習問題 25

与えられた Q の定義から式 (9.56) を導け.

$$Q = \omega_0 / 2\gamma$$

(9.56)

+++++

練習問題 26

(a) + の偏光をもった平面波のメトリック, 式 (9.58) を使って x 軸方向に運動している光子の座標速度 (TT 座標系で) の 2 乗が

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{1+h_+}$$

で与えられることを示せ. これは 1 とは等しくない. そのことは相対論を破るのであるか. その理由も答えよ.

(b) 実験家が図 9.1 の粒子の円の中心にいて, x 軸上の座標 $x=L$ のところの円周上にある粒子に向かって光子を送り出す. そして, その光子は円周上の粒子のところで反射され, 実験家のいる場所へ戻されるものとする. さらに, その実験は短い時間で終るので, 実験をしている間に h_+ はほとんど変化しないとす. h_+ の 1 次のオーダーの範囲で, 実験家が光子を放出した時間と戻ってきた光子を受け取った時間の間の固有時間が $(2+h_+)L$ であることを示せ.

(c) このことから実験家と粒子の間の固有距離が $(1+h_+/2)L$ であることがわかる, と実験家がいうとしよう. これは実験家の実感を正しく説明しているだろうか. もし, 実験家が自分と粒子の位置の間を標準的なもの差しを使うといった別の測り方をしたとき, 同じ値が得られるであろうか. その理由も答えよ.

(d) 実験家が同時に y 軸上で $y=L$ のところにある粒子を使った同じ実験をしたとすると, 光子は $(2-h_+)L$ という固有時間が経過したときにもどってくることを示せ.

(e) この二つの往復時間の差は $2h_+L$ で, 波の振幅を測定するのに使用できる. この結果は TT ゲージを使用していることに依存するのだろうか. 別の言い方をすると, 別の座標系を使用しても, 同じ答を得られるのだろうか.

練習問題 27

(a) 波が x - z 平面で z 軸と角度 θ をなして伝播する場合に、その平面波 h_+ の中を x 軸に沿って運動するビームの往復時間の変化の割合を与える、3 項で表される往復時間関係式 (9.63) を導け。

(b) L が重力波の波長に比べて小さい極限で、往復時間の微分が $t + \delta L$ の微分に等しいことを示せ。ここで $\delta L = L \cos^2 \theta h(t)$ は、 L の固有距離の変化である。

また、 $\cos^2 \theta$ というファクターが出てくる理由を説明せよ。

(c) (a) の 3 項表現で、重力波も x 軸に沿って伝播している場合 $\theta = \pm\pi/2$ の極限を調べよ。重力波と平行に移動する光に何が起るであろうか。

(9.66) ~ (9.71)

練習問題 28

(a) 式 (9.68) を用いて式 (9.66) でやったように $\bar{h}_{\mu\nu}$ をつくり、波の位相一定の面が、 $A_{\mu\nu}$ に対しては外向きに、 $Z_{\mu\nu}$ に対しては内向きに動くことを示せ。

(b) 式 (9.69) ~ (9.71) で省略した計算を行え。

$$\bar{h}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}(x^i) \exp(-i\Omega t) \tag{9.66}$$

$$(\nabla^2 + \Omega^2) B_{\mu\nu} = -16\pi S_{\mu\nu} \tag{9.67}$$

$$B_{\mu\nu} = \frac{A_{\mu\nu}}{r} e^{i\Omega r} + \frac{Z_{\mu\nu}}{r} e^{-i\Omega r} \tag{9.68}$$

$$\int \Omega^2 B_{\mu\nu} d^3x \leq \Omega^2 |B_{\mu\nu}|_{\max} 4\pi \varepsilon^3 / 3 \tag{9.69}$$

$$\int \nabla^2 B_{\mu\nu} d^3x = \oint n \cdot \nabla B_{\mu\nu} dS \tag{9.70}$$

$$\oint n \cdot \nabla B_{\mu\nu} dS = 4\pi \varepsilon^2 \left(\frac{d}{dr} B_{\mu\nu} \right)_{r=\varepsilon} \approx -4\pi A_{\mu\nu} \tag{9.71}$$

+++++

(9.67) ~ (9.74), (9.151) ~ (9.162)

練習問題 29

源の外の真空領域 (すなわち, そこで $S_{\mu\nu} = 0$) での式 (9.67) は, 変数分離法によって解くことができる. $\bar{h}_{\mu\nu}$ が $\sum_{lm} A_{\mu\nu}^{lm} f_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) / \sqrt{r}$ の形の解をもつと仮定する. ここで Y_{lm} は球面調和関数である.

(a) $f_l(r)$ は次の方程式を満たすことを示せ.

$$f_l'' + \frac{1}{r} f_l' + \left[\Omega^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} \right] f_l = 0$$

(b) 最も一般的な球対称な解は式 (9.68) で与えられることを示せ.

(c) 変数 $S = \Omega r$ を代入して, f_l が次の方程式を満たすことを示せ.

$$s^2 \frac{d^2 f_l}{ds^2} + s \frac{df_l}{ds} + \left[s^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] f_l = 0 \quad (9.151)$$

この式はベッセル方程式として知られており, その解は次数 $l+1/2$ のベッセル関数とよばれる. その関数の性質は物理学のほとんどの教科書で説明されている.

(d) 式 (9.151) への代入によって, 関数 f_l / \sqrt{s} が次の球面ベッセル関数と球面ノイマン関数の線形結合であることを示せ.

$$j_l(s) = (-1)^l s^l \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \right)^l \left(\frac{\sin s}{s} \right) \quad (9.152)$$

$$n_l(s) = (-1)^{l+1} s^l \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \right)^l \left(\frac{\cos s}{s} \right) \quad (9.153)$$

(e) 式 (9.152) と (9.153) を用いて, $s \gg 1$ に対する j_l と n_l は次のようにふるまうことを示せ.

$$j_l(s) \sim \frac{1}{s} \sin \left(s - \frac{l\pi}{2} \right) \quad (9.154)$$

$$n_l(s) \sim -\frac{1}{s} \cos \left(s - \frac{l\pi}{2} \right) \quad (9.155)$$

(f) 同様に $s \ll 1$ に対するふるまいは次のように与えられることを示せ.

$$j_l(s) \sim \frac{s^l}{(2l+1)!!} \quad (9.156)$$

$$n_l(s) \sim -\frac{(2l-1)!!}{s^{l+1}} \quad (9.157)$$

ここで, m がたとえ奇数の場合

$$(m)!! = m(m-2)(m-4)\cdots 3 \cdot 1 \quad (9.158)$$

(g) (e) から任意の l と m に対する式 (9.67) の外向きの波の解は次のようになることを示せ.

$$(\bar{h}_{\mu\nu})_{lm} = A_{\mu\nu}^{lm} h_l^{(1)}(\Omega r) e^{-i\Omega t} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (9.159)$$

ここで $h_l^{(1)}(\Omega r)$ は次の第一種の球面ハンケル関数とよばれるものである.

$$h_l^{(1)}(\Omega r) = j_l(\Omega r) + i n_l(\Omega r) \quad (9.160)$$

(h) 積分を行う前に式 (9.67) に $j_l(\Omega r) Y_{lm}^*(\theta, \phi)$ を掛けて, 式 (9.69) ~ (9.74) の計算をやり直せ. そのようにして積分されたとき, 式 (9.67) の左辺は次のようになることを示せ.

$$\varepsilon^2 \left(j_l(\Omega \varepsilon) \frac{d}{dr} B_{\mu\nu}(\varepsilon) - B_{\mu\nu}(\varepsilon) \frac{d}{dr} j_l(\Omega \varepsilon) \right)$$

$\Omega \varepsilon \ll 1$ のとき, これは $[r = \varepsilon$ は源の外と仮定するから, 上の式 (9.159) と式 (9.156) ~ (9.157) を用いて] 単に $i A_{\mu\nu}^{lm} / \Omega$ となることを示せ. 同様にして式 (9.67) の右辺は同じ近似で $-16\pi \Omega^l \int T_{\mu\nu} r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) d^3x / (2l+1)!!$ となることを示せ.

(i) 次に解は式 (9.159) で

$$A_{\mu\nu}^{lm} = 16\pi \Omega^{l+1} J_{\mu\nu}^{lm} / (2l+1)!! \quad (9.161)$$

としたものになることを示せ. ここで

$$J_{\mu\nu}^{lm} = \int T_{\mu\nu} r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) d^3x \quad (9.162)$$

(j) $l=0$ として, 式 (9.73) と (9.74) を導け.

(k) ある l に対して $J_{\mu\nu}^{lm} \neq 0$ ならば, 近似 $\Omega\varepsilon \ll 1$ によって無視した式 (9.161) の中の項は, $l+1$ に対する式 (9.161) の寄与の最も大きい項と同じオーダーになることを示せ. 特に式 (9.72) で $j_{\mu\nu} \neq 0$ なら式 (9.74) よりも精度のいい解を求めるためには, $l > 0$ の項ばかりでなく式 (9.69) のような式 (9.74) で無視した項も考慮に入れなければならない.

$$(\nabla^2 + \Omega^2)B_{\mu\nu} = -16\pi S_{\mu\nu} \tag{9.67}$$

$$B_{\mu\nu} = \frac{A_{\mu\nu}}{r} e^{i\Omega r} + \frac{Z_{\mu\nu}}{r} e^{-i\Omega r} \tag{9.68}$$

$$\int \Omega^2 B_{\mu\nu} d^3x \leq \Omega^2 |B_{\mu\nu}|_{\max} 4\pi\varepsilon^3 / 3 \tag{9.69}$$

$$\int \nabla^2 B_{\mu\nu} d^3x = \oint n \cdot \nabla B_{\mu\nu} dS \tag{9.70}$$

$$\oint n \cdot \nabla B_{\mu\nu} dS = 4\pi\varepsilon^3 \left(\frac{d}{dr} B_{\mu\nu} \right)_{r=\varepsilon} \approx -4\pi A_{\mu\nu} \tag{9.71}$$

$$J_{\mu\nu} = \int S_{\mu\nu} d^3x \tag{9.72}$$

$$A_{\mu\nu} = 4J_{\mu\nu} \tag{9.73}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = 4J_{\mu\nu} e^{i\Omega(r-t)} / r \tag{9.74}$$

+++++

(9.82a)

練習問題 30

質量が $\{m_{(A)}, A=1, \dots, N\}$ でその位置が $\{x_{(A)}^i\}$ であるような N 個の離散的な点粒子の集合に対して式 (9.82a) を書き直せ.

$$I^{lm} = \int T^{00} x^l x^m d^3x \tag{9.82a}$$

+++++

(9.87)

練習問題 31

次の質量分布に対する 4 重極テンソル I_{jk} とそのトレースフリーテンソル \mathcal{I}_{jk} [式 (9.87)] を計算せよ.

- (a) 密度 $\rho(r,t)$ の球状の星. 式 (9.82) で座標原点を星の中心にとる.
- (b) (a)と同じ星. ただし, 座標原点を任意の点にとる.
- (c) 一様な密度 ρ で x, y, z 軸に向いた長さそれぞれ a, b, c の主軸をもつ楕円体.
- (d) (c)の楕円体. ただし z 軸のまわりに角速度 ω で回転しているとする.
- (e) 点 $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(-a, 0, 0)$, $(0, -a, 0)$ にある質量 m の 4 つの質点.
- (f) (e)の 4 つの質点. ただしそのすべてが半径 a の円を角速度 ω で z 軸のまわりに反時計回りに動いているとする.
- (g) 質量をもたないばねによって結びつけられている二つの質量 m の質点. おおのこの質点は距離 l_0 離れた平衡の位置のまわりに角速度 ω , 振幅 A で全体の重心を固定したまま振動しているものとする.
- (h) ばね定数 k , 平衡での長さ l_0 のばねで結びつけられている等しくない質量 m, M の二つの質点. ばねは振幅 $2A$ (全体としてのばねののび), その自然振動数で (全体の重心を固定したまま) 振動している.

$$\mathcal{I}_{jk} = I_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} I^l_l \tag{9.87}$$

+++++

練習問題 32

この問題で球面波に対して TT ゲージを適用する

- (a) 式 (9.83) を TT ゲージに変換するために, B^α を x^μ のゆっくり変化する関数として, ベクトル $\xi^\alpha = B^\alpha(x^\mu) \exp(i\Omega(r-t)/r)$ で生成されるゲージ変換を用いる. オーダー $1/r$ までの一般の変換則を見つけよ.
- (b) 新しい $\bar{h}_{\alpha\beta}$ がオーダー $1/r$ で次の 3 つの条件を満たすことを要求する. $\bar{h}_{0\mu} = 0$, $\bar{h}^\alpha_\alpha = 0$, $\bar{h}_{\mu j} n^j = 0$, ここで $n^j \equiv x^j / r$ は動径方向の単位ベクトルである. この要求とさらにオーダー $1/r$ で $\square \xi^\alpha = 0$ を満たすように B^α を見つけることができることを示せ.
- (c) TT ゲージで式 (9.84) ~ (9.87) が成り立つことを示せ.
- (d) 式 (9.103) を R で展開し, r^{-1} の項を落とすことで, 式 (9.104) で消去できなかった $\bar{h}_{0\mu}$ の高次の項が v^2 のオーダーのゲージ項であること, つまり式 (9.103) において \bar{h}_{00} では時間の 2 階微分までで, \bar{h}_{0j} では時間の 1 階微分までであることを示せ.

+++++

()

練習問題 33

(a) n^j を 3次元ユークリッド空間の単位ベクトルとする. $P^j_k = \delta^j_k - n^j n_k$ が n^j に直交する射影テンソルとなることを示せ. すなわち, 任意の V^j に対して (i) $P^j_k V^k$ が n^j に直交すること, (ii) $P^j_k P^k_l V^l = P^j_k V^k$ を示す.

(b) 式 (9.84) ~ (9.86) の TT ゲージ \bar{h}_{ij}^{TT} は次の式によって式 (9.83) のもとの \bar{h}_{kl} と関係していることを示せ.

$$\bar{h}_{ij}^{TT} = P^k_i P^l_j \bar{h}_{kl} - \frac{1}{2} P_{ij} (P^{kl} \bar{h}_{kl}) \tag{9.163}$$

ここでは n^j は z 方向を指している.

+++++

()

練習問題 34

F_{ik} がトレースフリー, すなわち $F^l_l = 0$ であることを示せ.

+++++

()

練習問題 35

練習問題 31 の系に対して, x, y, z 軸に沿ったトランスバース-トレースフリー 4 重極輻射場, 式 (9.85) ~ (9.86) あるいは式 (9.163) を計算せよ. 式 (9.91) を導いたときのように, x 軸と y 軸上で計算するとき, 添字を適当に変化させることを忘れないようにせよ.

+++++

()

練習問題 36

式 (9.163) を用いて, あるいは式 (9.85) ~ (9.86) で座標軸を回転させることにより, 式 (9.88) の簡単な振動子から x 軸に対して角度 θ 方向に放射される輻射の振幅と偏光を表す楕円の向きを計算せよ.

+++++

()

練習問題 37

式 (9.93) の ω と 2ω の項は質的に違っている. 2ω の項は振動子の振幅 A のみによっており, ω の項は A と質量の間隔 l_0 の両方によっている. 質量は l_0 の距離動くわけではないのに, なぜ l_0 が含まれるのか? その答は輻射の原因が応力であり, 応力はばねによって, l_0 の距離を伝達されるからである. これを見るには, 応力が大きな距離にわたって運ばれないような系について似たような計算を試みればよい. 質量の 2 つのペアを考えよう. おのおののペアは質量 m と $M \gg m$ の二つの粒子からなり, 各ペアの中の質量は自然振動数 ω をもつ短いばねで結びつけられているとする. ペアの重心はお互いに関して静止している. 2 つのばねは同じ振幅で, 振動の中心は $l_0 \gg A$ だけ離れ, おのおのの質量 m を振幅 A で正弦振動させている. その振動は位相がずれているとする. 練習問題 31(h) の計算を用いて, この系の輻射場は式 (9.93) で, ω の項を含んでいないものとなることを示せ. この系と式 (9.93) の系の違いは, 質量 m の運動を維持する応力が何に起因するかによると考えることができる.

+++++

()

練習問題 38

連星の式 (9.98) ~ (9.99) に対して, 練習問題 36 と同じことを計算せよ. ただし線形偏光の向きではなく, 楕円偏光の楕円の向きを見つめる.

+++++

()

練習問題 36

質量 m と M の 2 つの球状の星が $x - y$ 面で楕円軌道を描いてお互いのまわりを回っている. その軌道は全エネルギー E と角運動量 L をもつとする.

(a) ニュートン重力を用いて重心のまわりの両方の星の軌道の式を求めよ. 軌道周期 P , 最短距離 a , 離心率 e を E と L の関数として表せ.

(b) この系の I_{kj} を計算せよ.

(c) 式 (9.106) から, x 軸と z 軸に沿った TT 輻射場を計算せよ. $m = M$ で円軌道するとき, その結果が式 (9.98) ~ (9.99) になることを示せ.

+++++

()

練習問題 40

式 (9.101) から球対称な運動は重力波を出さないことを示せ.

+++++

()

練習問題 41
 式 (9.114) から本文中で示唆された方法で式 (9.115) を導け.

+++++

()

練習問題 42
 (a) 式 (9.116) を導け.
 (b) 式 (9.107) と (9.116) を重ね合せ, R が小さいと仮定することにより式 (9.117) , (9.118) を導け.
 (c) 本文に示された方法で式 (9.120) を導け.

+++++

()

練習問題 43

重力波に対して平均化したストレス - エネルギーテンソルを次のように定義する.

$$T_{\alpha\beta} = \left\langle \left\langle \bar{h}_{\mu\nu,\alpha} \bar{h}^{TT\mu\nu}{}_{,\beta} \right\rangle \right\rangle / 32\pi \quad (9.151)$$

(ここで $\langle \rangle$ は 1 周期にわたる時間と, すべての方向に 1 波長にわたる空間の両方の平均操作を表す.) すると式 (9.122) の流束 F は, その波の T^{0z} 成分となることを示せ. より詳しい議論から, もしこの平均が適当に定義されるなら, 式 (9.164) は実際に任意の波束のストレス - エネルギーテンソルと見なすことが示される. これはアイサクソン (Isaacson) ストレス - エネルギーとよばれる. 詳しいことは Misner ら (1973) を見よ.

+++++

()

練習問題 44

- (a) 式 (9.123) から式 (9.125) を導け.
- (b) 式 (9.125) から式 (9.127) を正当化せよ.
- (c) 練習問題 33(b)を用いて式 (9.122) から式 (9.127) を導け.

+++++

()

練習問題 45

(a) 式 (9.128) の積分を考える. この積分を次の方法で行う.

(i) 対称性の観点から $\int n^j n^k \sin \theta d\theta d\phi$ は, δ^{jk} に比例しなければならないことを示せ.

(ii) $j = k = z$ の場合を計算することによって, その比例定数を決めよ.

(b) 式 (9.129) に対して同じ方法を適用せよ. まず積分が δ^{ij} にしかよらないことを議論し, 与えられた右辺のテンソルがその添字の任意の 2 つを交換しても値が変わらないという対称性をもつ δ^{ij} だけからつくられる唯一のテンソルであることを示せ.

+++++

()

練習問題 46

式 (9.124) と t_{ij} が対称であることから式 (9.130), (9.131) を導け.

+++++

()

練習問題 47

(a) 粒子の角運動量は p_ϕ である. これから $x^i = \text{一定}$ の面を横切る連続的な系の角運動量流束は $T_{i\phi}$ であることを示せ. このことと練習問題 43 を用いて源から放出された重力波の角運動量の z 成分 [これは式 (9.164) の $T_{r\phi}$ を大きな半径の球面にわたって積分したものである] が次のように与えられることを示せ.

$$F_j = -\frac{1}{5}(\ddot{I}_{xl}\ddot{I}_{yl} - \ddot{I}_{yl}\ddot{I}_{xl}) \quad (9.152)$$

(b) $\bar{h}_{\mu\nu}^{TT}$ が $\cos(\Omega t - m\phi)$ のように書けるなら, 放出されるエネルギーと角運動量の比は Ω/m となることを示せ.

+++++

()

練習問題 48

式 (9.135) を計算せよ.

+++++

9 重力波 9.6 練習問題

()

練習問題 49

練習問題 39 の任意の連星系に対して次の間に答えよ.

(a) 1 周期にわたる平均のエネルギー損失率が次のようになることを示せ.

$$\langle dE/dt \rangle = -\frac{32}{5} \frac{\mu^2 (m+M)^3}{a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad (9.166)$$

また練習問題 47(a)から次式を示せ.

$$\langle dL/dt \rangle = -\frac{32}{5} \frac{\mu^2 (m+M)^{5/2}}{a^{7/2} (1-e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{8} e^2 \right) \quad (9.167)$$

ここで $\mu = \mu M / (m+M)$ は換算質量である.

(b) 次式を示せ.

$$\langle da/dt \rangle = -\frac{64}{5} \frac{\mu (m+M)^2}{a^3 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad (9.168)$$

$$\langle de/dt \rangle = -\frac{304}{15} \frac{\mu (m+M)^2 e}{a^4 (1-e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right) \quad (9.169)$$

$$\langle dP/dt \rangle = -\frac{192\pi}{5} \frac{\mu (m+M)^{3/2}}{a^{5/2} (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad (9.170)$$

(c) 式 (9.144) を確かめよ. [たとえ(a)ができなくても, (b)と(c)は行え.]

これらの式は Peters (1964) によって最初に導かれた.

+++++