8　アインシュタイン方程式

アインシュタイン方程式，重力場の方程式，ニュートン近似（極限），ゲージ変換，ローレンツ・ゲージ条件

8.1　重力場の方程式の目的と正当性　　（8.1）～（8.9）

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \qquad \left(\left[\nabla^2\phi\right] = \mathrm{s}^{-2}\right) \qquad (8.1)$$

$$\phi = -\frac{Gm}{r} \qquad \left(\left[\phi\right] = \mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\right) \qquad (8.2)$$

式（8.1）はポアソン方程式（Poisson's equation）で，真空中以外にも一般化された重力場の方程式である．

【表記法】$\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \nabla\cdot\nabla$（ナブラドットナブラ）

練習問題 1　　（8.1）～（8.2）

$$G^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta} \qquad (8.7)$$

練習問題 18　　()

距離化単位

練習問題 2　　()
練習問題 3　　(8.2)

8.2　アインシュタイン方程式　　（8.10）～（8.11）

$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta} \qquad (8.10)$$

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \qquad (8.11)$$

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R \qquad (6.98)$$

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta} - \Lambda g^{\alpha\beta} \qquad (8.10')$$

where　$G^{\alpha\beta}$：アインシュタイン・テンソル（$\left[G^{\alpha\beta}\right] = \mathrm{m}^{-2}$）

$R^{\alpha\beta}$：リッチ・テンソル，R：リッチ・スカラー

$T^{\alpha\beta}$：ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）（$\left[T^{\alpha\beta}\right] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$（圧力））

G：万有引力定数（$G = 6.673\times10^{-11}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot s^{-2}$）

Λ：宇宙定数

8.3　弱い重力場でのアインシュタイン方程式　　（8.12）～（8.42）

近似的ローレンツ座標系　　（8.12）～（8.13）

弱い重力場は時空がほぼ平坦なものである．近似的ローレンツ座標系は，

◆
$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \qquad (8.12)$$

$$\left|h_{\alpha\beta}\right| << 1 \qquad (8.13)$$

ひとつの近似的ローレンツ座標系を別の近似的ローレンツ座標系に移す座標変換には，バックグラウンドのローレンツ変換とゲージ変換の二つのタイプがある．

練習問題 6　　（8.12）～（8.13）

バックグラウンドのローレンツ変換　　（8.14）～（8.19）

特殊相対論でのローレンツ変換行列

$$\left(\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (8.14)$$

where　$\beta = \frac{v}{c} < 1,\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$

弱い重力場に対し“バックグラウンドのローレンツ変換”を

$$x^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}x^{\beta} \qquad (8.15)$$

メトリックテンソルの変換は，

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}\eta_{\mu\nu} + \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}h_{\mu\nu} \qquad (8.16)$$

ローレンツ変換では，

$$\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}\eta_{\mu\nu} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \qquad (8.17)$$

であるから，

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \qquad (8.18)$$

ここで，

◆ $$h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}h_{\mu\nu} \qquad (8.19)$$

ゲージ変換　　(8.20) ～ (8.24)

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}\left(x^{\beta}\right)$$

where $\left|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right| << 1$

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \xi^{\alpha}{}_{,\beta} \qquad (8.20)$$

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} - \xi^{\alpha}{}_{,\beta} + \mathrm{O}\left(\left|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right|^{2}\right) \qquad (8.21)$$

練習問題 4　　(8.20) ～ (8.21)

メトリックの変換は，式 (8.12)，(8.21) を使って，

$$g_{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}g_{\mu\nu} = \left(\delta^{\mu}{}_{\alpha} - \xi^{\mu}{}_{,\alpha}\right)\left(\delta^{\nu}{}_{\beta} - \xi^{\nu}{}_{,\beta}\right)\left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right)$$

微小量の 1 次までを考えると，

$$g_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \qquad (8.22)$$

ここで，

$$\xi_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}\xi^{\beta} \qquad (8.23)$$

この式から，座標変換の影響は $h_{\alpha\beta}$ を

◆ $$h_{\alpha\beta} \to h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \qquad (8.24)$$

式 (8.34) 風に書くと，

◆ $$h^{(\mathrm{new})}_{\alpha\beta} = h^{(\mathrm{old})}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \qquad (8.24\mathrm{b})$$

と定義し直すことである．$\left|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right|$ がすべて小さければ，新しく得られる $h_{\alpha\beta}$ もまた小さく，適切な座標系に留まっている．この変換をゲージ変換という．

リーマン・テンソル　　(8.25)

添字を下げたリーマン・テンソル定義式

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\lambda}R^{\lambda}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) \qquad (6.68)$$

は，

◆ $$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \qquad (8.12)$$

を使うと，線形近似でのリーマン・テンソルは，

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) \qquad (8.25)$$

と書ける．添字を下げないリーマン・テンソル定義式

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}\right) \qquad (6.67)$$

に式 (8.12) を使って，線形近似でのリーマン・テンソルは，

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}\left(h_{\sigma\nu,\beta\mu} - h_{\sigma\mu,\beta\nu} + h_{\beta\mu,\sigma\nu} - h_{\beta\nu,\sigma\mu}\right) \qquad (8.25\mathrm{b})$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h^{\alpha}{}_{\nu,\beta\mu} - h^{\alpha}{}_{\mu,\beta\nu} + h_{\beta\mu}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} - h_{\beta\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\mu}\right) \qquad (8.25\mathrm{b'})$$

と書ける．これらの成分はゲージ独立であって，式 (8.24) で変化しない．ゲージ変換のような微小な座標変換では成分を微小にしか変化させない．しかし，成分自体がすでに微小量なので，その変化は 2 次のオーダーとなり，1 次の表現式 (8.25) は変化しない．

練習問題 5　　(8.25)

弱い場でのアインシュタイン方程式　　(8.26) ～ (8.42)

$$h^{\mu}{}_{\beta} = \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} \tag{8.26}$$

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\nu\beta} h^{\mu}{}_{\beta} \tag{8.27}$$

トレース

$$h \equiv h^{\alpha}{}_{\alpha} \tag{8.28}$$

練習問題 7　　　（8.29）～（8.31）

式（8.29）と（8.31）の両辺に $\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}$ を掛けて添字を下げる．

$$\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}\bar{h}^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}\eta^{\alpha\beta}h$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{8.29b}$$

$$\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}h^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}\bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}\eta^{\alpha\beta}\bar{h}$$

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \tag{8.31b}$$

練習問題 8　　　（8.25）～（8.32）

$$f^{,\mu} = \eta^{\mu\nu} f_{,\nu}$$

ローレンツ・ゲージ条件

◆

$$\bar{h}^{\mu\nu(\mathrm{new})}{}_{,\nu} = 0 \tag{8.33}$$

$$\bar{h}^{(\mathrm{old})\mu\nu}{}_{,\nu} \neq 0$$

練習問題 12　　　（8.34）

発散は,

$$\bar{h}^{(\mathrm{new})\mu\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}^{(\mathrm{old})\mu\nu}{}_{,\nu} + \xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} \tag{8.35}$$

$$\bar{h}^{(\mathrm{new})\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

となるゲージを求める．

$$\Box\xi^{\mu} = \xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}^{(\mathrm{old})\mu\nu}{}_{,\nu} \tag{8.36}$$

ダランベルシャンの定義式

$$\Box f = f^{,\mu}{}_{,\mu} = \eta^{\mu\nu} f_{,\mu\nu} = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) f \tag{8.37}$$

【注意】上式のカッコ内の符号はミンコフスキー・メトリックが $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ の場合である． $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ のときは符号が反転する．

３次元の非斉次の波動方程式

$$\Box f = g \tag{8.38}$$

斉次の波動方程式

$$\Box\eta^{\mu} = 0 \tag{8.39}$$

ローレンツ・ゲージ

$$\Box\left(\xi^{\mu} + \eta^{\mu}\right) = \bar{h}^{(\mathrm{old})\mu\nu}{}_{,\nu} \tag{8.40}$$

練習問題 10　　(8.41)

弱い重力場でのアインシュタイン方程式（線形理論での場の方程式）

◆ $$\Box \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \tag{8.42}$$

練習問題 9　　(8.32)
練習問題 11　　(8.33)

8.4　ニュートン重力場　　(8.43) ～ (8.60)

ニュートンの極限　　(8.43) ～ (8.50)

練習問題 13　　()
練習問題 14　　(8.46) ～ (8.50)
練習問題 15　　(8.50)
練習問題 16　　(8.50)
練習問題 17　　()
練習問題 19　　(8.45)
練習問題 20　　(8.61) ～ (8.62)

節の中で使われている公式と問題

（8.1）～（8.2）

練習問題 1
　次のようにして式 (8.2) が式 (8.1) の解であることを示せ．質点が原点 $r=0$ にあり，球対称な重力場をつくっているとする．次に，半径 r の球面にガウスの法則を適用して，

$$\frac{d\phi}{dr}=\frac{Gm}{r^2}$$

であることを導け．この式から式（8.2）を導け．（無限遠でのふるまいを考えよ．）

ガウスの発散定理

$$\int_S \nabla\phi\cdot dS=\int_V (\nabla\cdot\nabla\phi)dV$$

where　V　は S が囲む体積

から，式（8.1）を使って，

$$右辺=\int_V (\nabla\cdot\nabla\phi)dV=4\pi G\int_V \rho dV=4\pi Gm$$

半径 r での重力ポテンシャルは一定であるから，S を半径 r の球面として，

$$左辺=\int_S \nabla\phi\cdot dS=\nabla\phi\int_S dS=4\pi r^2\nabla\phi$$

したがって，

$$\nabla\phi=\frac{Gm}{r^2}$$

この問題の場合は，ポテンシャルの傾きは半径方向であるから，

$$\nabla\phi=\frac{d\phi}{dr}=\frac{Gm}{r^2}$$

これを積分して，

$$\phi=-\frac{Gm}{r} \tag{8.2}$$

【別解】

重力場（ポテンシャルの傾き）を $\boldsymbol{f}=\nabla\phi$，$B$ は物体に関する体積分，V は閉曲面 S 内に対する体積分として，ガウスの発散定理から，

$$\int_B\int_S d\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_B\int_V (\nabla\cdot d\boldsymbol{f})dV$$

$$右辺=\int_B\int_V (\nabla\cdot d\boldsymbol{f})dV=\int_B\int_V (\nabla\cdot\nabla d\phi)dV=\int_V (\nabla^2\phi)dV$$

$$左辺=\int_B\int_S d\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_B\int_S G\frac{\rho dV}{r^2}\cos\theta dS=G\int_B \rho dV\int_S \frac{\cos\theta dS}{r^2}=4\pi G\int_B \rho dV$$

したがって，次のポアソン方程式（Poisson's equation）が得られる．

$$\nabla^2\phi=4\pi G\rho \tag{8.1}$$

【reference】

http://www.geol.sci.hiroshima-u.ac.jp/~nakakuki/naibutsu/resume2007/lec-05-20070621.pdf

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 2

(a)　SI 系での G と c の値を使って次の有用な変換の換算率を導け．

$$G/c^2 = 7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m\,kg^{-1}} = 1$$

$$c^5/G = 3.629\times10^{52}\,\mathrm{J\,s^{-1}} = 1$$

(b)　表 8.1 に掲げた定数の SI 単位の値から距離化単位の値を求めよ．

表 8.1　S I 単位と距離化単位による基本定数の値の比較

定数	S I 単位での値	距離化単位での値
c	$2.998\times10^{8}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$	1
G	$6.673\times10^{-11}\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$	1
$\hbar$	$1.055\times10^{-34}\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$	$2.612\times10^{-70}\mathrm{m^2}$
m_e	$9.110\times10^{-31}\mathrm{kg}$	$6.764\times10^{-58}\mathrm{m}$
m_p	$1.673\times10^{-27}\mathrm{kg}$	$1.242\times10^{-54}\mathrm{m}$
$M_\odot$	$1.989\times10^{30}\mathrm{kg}$	$1.477\times10^{3}\mathrm{m}$
$M_\oplus$	$5.973\times10^{24}\mathrm{kg}$	$4.435\times10^{-3}\mathrm{m}$
$L_\odot$	$3.90\times10^{26}\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-3}}$	1.07×10^{-26}

注意：m_e と m_p はそれぞれ電子と陽子の質量で、$M_\odot$ と $M_\oplus$ はそれぞれ太陽と地球の質量を表す．また $L_\odot$ は太陽の光度（ここの S I 単位はジュール/秒に等しい）である．

(c)　次の量を距離化単位で表せ．

(i)　密度（中性子量での典型的な値）$\rho = 10^{17}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

(ii)　圧力（中性子量での典型的な値）$p = 10^{33}\,\mathrm{kg\cdot s^{-2}\cdot m^{-1}}$

(iii)　地球表面での重力加速度 $g = 9.80\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

(iv)　超新星の光度 $L = 10^{41}\,\mathrm{J\cdot s^{-1}}$

(d)　自然界において，次元をもった３つの定数 c，G，$\hbar$ は基本的なものと考えられている．$c = G = 1$ とすることで，$\hbar$ は m^2 の単位をもつ．したがって，$\hbar^{1/2}$ が長さの基本的な単位を与えることになり，プランク長さという．表 8.1 から $\hbar^{1/2} = 1.616\times10^{-35}\,\mathrm{m}$ と求められる．この数値は相対論と重力と量子論の基本的定数を含んでいるので，物理学者はこの長さが量子重力において重要

な役割を果たすと考えている．SI 系での c，G，$\hbar$ の値を使ってこの長さを表現してみよ．同様にして変数の換算率を使って，c，G，$\hbar$ からつくられる質量と時間の単位をもった基本的な数値，プランク質量，プランク時間を計算せよ．これらの基本的な数値を素粒子論で知られている典型的な質量，長さ，時間尺度と比較せよ．

(a)　$G/c^2 = 6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}\cdot s^{-2}/\left(2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}\cdot s^{-1}\right)^2$

$$= 7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m\,kg^{-1}}$$

$$c^5/G = \left(2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}\cdot s^{-1}\right)^5/6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}\cdot s^{-2}$$

$$= 3.629\times10^{52}\,\mathrm{J\,s^{-1}}$$

（注意）$\mathrm{N = kg\cdot m\cdot s^{-2}}$，$\mathrm{J = N\cdot m = kg\cdot m^2\cdot s^{-2}}$，$\mathrm{W = J\cdot s^{-1} = kg\cdot m^2\cdot s^{-3}}$

(b)　問題(a)から，次の二式で単位 kg と s を機械的に m に換算する．

$$\mathrm{kg} = 7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}$$

$$\mathrm{s} = 2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}$$

$$\hbar = 1.055\times10^{-34}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$$

$$= 1.055\times10^{-34}\,\mathrm{m^2}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}\times\left(2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}\right)^{-1}$$

$$= 2.612\times10^{-70}\,\mathrm{m^2}$$

$$m_e = 9.110\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

$$= 9.110\times10^{-31}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}$$

$$= 6.764\times10^{-58}\,\mathrm{m}$$

$$m_p = 1.673\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

$$= 1.673\times10^{-27}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}$$

$$= 1.242\times10^{-54}\,\mathrm{m}$$

$$M_\Theta = 1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg}$$

$$= 1.989\times10^{30}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}$$

$$= 1.477\times10^{3}\,\mathrm{m}$$

$M_{\oplus}=5.973\times10^{24}\,\mathrm{kg}$

$=5.973\times10^{24}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}$

$=4.435\times10^{-3}\,\mathrm{m}$

$L_{\Theta}=3.90\times10^{26}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-3}$

$=3.90\times10^{26}\,\mathrm{m}^2\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}\times\left(2.998\times10^8\,\mathrm{m}\right)^{-3}$

$=1.07\times10^{-26}$

(c)

(i)　$\rho=10^{17}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}=10^{17}\,\mathrm{m}^{-3}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}=7.425\times10^{-11}\,\mathrm{m}^{-2}$

(ii)　$p=10^{33}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{m}^{-1}=10^{33}\,\mathrm{m}^{-1}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}\times\left(2.998\times10^8\,\mathrm{m}\right)^{-2}$

$=8.261\times10^{-12}\,\mathrm{m}^{-2}$

(iii)　$g=9.80\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}=9.80\,\mathrm{m}\times\left(2.998\times10^8\,\mathrm{m}\right)^{-2}=1.090\times10^{-16}\,\mathrm{m}^{-1}$

(iv)　$L=10^{41}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}=10^{41}/3.629\times10^{52}=2.756\times10^{-12}$

(d)　問題(b)から，

$\hbar=2.612\times10^{-70}\,\mathrm{m}^2$

$\hbar^{1/2}=1.616\times10^{-35}\,\mathrm{m}$

単位 m を機械的に kg に換算する．

$m_{PL}=1.616\times10^{-35}\times\left(7.425\times10^{-28}\right)^{-1}\mathrm{kg}=2.176\times10^{-8}\,\mathrm{kg}$

単位 m を機械的に s に換算する．

$t_{PL}=1.616\times10^{-35}\times\times\left(2.998\times10^8\right)^{-1}\mathrm{s}=5.390\times10^{-44}\,\mathrm{s}$

典型的な素粒子の寿命は，$10^{-24}\,\mathrm{s}$以上である．既知の最も重い粒子の質量は，$10^{-29}\,\mathrm{kg}$以下である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(8.2)

練習問題 3

距離化単位で計算せよ．

(a)　太陽のニュートン・ポテンシャルの太陽表面での値．

太陽半径は$6.960\times10^8\,\mathrm{m}$

(b)　太陽のニュートン・ポテンシャルの地球軌道での値．

$r=1\mathrm{AU}=1.496\times10^{11}\,\mathrm{m}$

(c)　地球のニュートン・ポテンシャルの地球表面での値．

地球半径は$6.371\times10^6\,\mathrm{m}$

(d)　太陽のまわりを軌道運動する地球の速度

(e)　(b)の値が(c)より大きいことに気づいたはずである．それでは，なぜ地球上では太陽より地球の引力を強く感じるのであろうか？

(f)　ニュートン理論では，質量Mの物体のまわりの円軌道において，ϕをニュートン・ポテンシャルとすると，その速度が$v^2=-\phi$となることを示せ．

(a)　$G=6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$，$m_{\Theta}=1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg}$，$r=6.960\times10^8\,\mathrm{m}$

$$\phi=-\frac{Gm}{r} \tag{8.2}$$

$=-6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}\times1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg}/6.960\times10^8\,\mathrm{m}$

$=-1.907\times10^{11}\,\mathrm{m^2s^{-2}}$

$=-1.907\times10^{11}\,\mathrm{m}^2\times\left(2.998\times10^8\,\mathrm{m}\right)^{-2}$

$=-2.122\times10^{-6}$

(b)　$G=6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$，$m_{\Theta}=1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg}$，$r=1.496\times10^{11}\,\mathrm{m}$

$$\phi=-\frac{Gm}{r} \tag{8.2}$$

$=-6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}\times1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg}/1.496\times10^{11}\,\mathrm{m}$

$=-8.872\times10^8\,\mathrm{m^2s^{-2}}$

$$= -8.872\times10^{8}\,\mathrm{m}^2\times\left(2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}\right)^{-2}$$

$$= -9.871\times10^{-9}$$

(c)　$G = 6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$，　$m_\oplus = 5.973\times10^{24}\,\mathrm{kg}$，　$r = 6.371\times10^{6}\,\mathrm{m}$

$$\phi = -\frac{Gm}{r} \tag{8.2}$$

$$= -6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}\times5.973\times10^{24}\,\mathrm{kg}/6.371\times10^{6}\,\mathrm{m}$$

$$= -6.256\times10^{7}\,\mathrm{m^2s^{-2}}$$

$$= -6.256\times10^{7}\,\mathrm{m}^2\times\left(2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}\right)^{-2}$$

$$= -6.961\times10^{-10}$$

(d)　$\dfrac{2\times\pi\times1.496\times10^{11}\,\mathrm{m}}{365.25\times24\times3600\mathrm{s}} = 2.979\times10^{4}\,\mathrm{m/s}$

$$= 2.979\times10^{4}\,\mathrm{m}\times\left(2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}\right)^{-1} = 9.935\times10^{-5}$$

(e)　太陽の引力と地球の公転の遠心力がバランスしているので，地球上では，太陽の引力の影響は余り感じられない．

(f)　引力と遠心力がバランスするので，

$$f = G\frac{m_\Theta m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$v^2 = G\frac{m_\Theta}{r} = -\phi$$

問題(b)　太陽のニュートン・ポテンシャルの地球軌道での値．
問題(d)　太陽のまわりを軌道運動する地球の速度
を使って，検証すると，

$$\left(2.979\times10^{4}\,\mathrm{m/s}\right)^2 = -8.872\times10^{8}\,\mathrm{m^2s^{-2}}$$

$$\left(9.935\times10^{-5}\right)^2 = -9.871\times10^{-9}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.20）～（8.21）

練習問題 4

(a)　A を $n\times n$ 行列で，すべての要素が小さく $\left|A_{ij}\right| << 1/n$ であるとし，I を単位行列とする．このとき

$$(I+A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + A^4 - \cdots +$$

であることを，次のように証明せよ．(i)　右辺の級数が絶対収束することを，n^2 個の要素について証明し，また　(ii)　右辺に $(I+A)$ を掛けたものが I になることを証明する．

(b)　(a)を使って，式（8.20）から式（8.21）を確かめよ．

(a)　$\left|A_{ij}\right| << 1/n$ ならば，すべての固有値の絶対値が 1 未満になり，絶対収束するらしい？？？証明は略．
与式の左辺に $(I+A)$ を掛けると，

$$(I+A)^{-1}(I+A) = I$$

与式の右辺に $(I+A)$ を掛けると，

$$(I+A)\left(I - A + A^2 - A^3 + A^4 - \cdots +\right)$$

$$\left(I - A + A^2 - A^3 + A^4 - \cdots +\right) + \left(A - A^2 + A^3 - A^4 - \cdots +\right) = I$$

したがって，与式が証明された．

(b)　座標の微小変化で，成分が位置の関数であるベクトル ξ^α によって生成される座標変換式（微小ゲージ変換）を考える．

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta)$$

ξ^α が $\left|\xi^\alpha{}_{,\beta}\right| << 1$ という意味で微小であるとすると，

$$\Lambda^{\alpha'}{}_\beta = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha{}_\beta + \xi^\alpha{}_{,\beta} \tag{8.20}$$

$\delta^\alpha{}_\beta$ は単位行列だから，

$$\left(\Lambda^{\alpha'}{}_\beta\right) = I + \left(\xi^\alpha{}_{,\beta}\right)$$

逆変換行列つまり逆行列を求める．

$$\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right)=\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right)^{-1}=\left(I+\left(\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right)\right)^{-1}$$

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}=\delta^{\alpha}{}_{\beta}-\xi^{\alpha}{}_{,\beta}+\left(\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right)^{2}-\left(\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right)^{3}+\left(\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right)^{4}+\cdots$$

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}=\delta^{\alpha}{}_{\beta}-\xi^{\alpha}{}_{,\beta}+\mathrm{O}\left(\left|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right|^{2}\right) \tag{8.21}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.25）

練習問題 5

(a)　$h_{\alpha\beta}=\xi_{\alpha,\beta}+\xi_{\beta,\alpha}$ ならば，式（8.25）はゼロとなることを示せ．

(b)　このことから，式（8.25）がゲージ不変であることを議論せよ．

(c)　このことと 7.6 節の練習問題 10 との関係を述べよ．

(a)　$h_{\alpha\beta}=\xi_{\alpha,\beta}+\xi_{\beta,\alpha}$ を代入して，

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(h_{\alpha\nu,\beta\mu}+h_{\beta\mu,\alpha\nu}-h_{\alpha\mu,\beta\nu}-h_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) \tag{8.25}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}(\xi_{\alpha,\nu\beta\mu}+\xi_{\nu,\alpha\beta\mu}+\xi_{\beta,\mu\alpha\nu}+\xi_{\mu,\beta\alpha\nu}\\&\qquad-\xi_{\alpha,\mu\beta\nu}-\xi_{\mu,\alpha\beta\nu}-\xi_{\beta,\nu\alpha\mu}-\xi_{\nu,\beta\alpha\mu})\\&=0\end{aligned}$$

(b)　$h_{\alpha\beta}=\xi_{\alpha,\beta}+\xi_{\beta,\alpha}$ を代入して，

$$g_{\alpha'\beta'}=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}-\xi_{\alpha,\beta}-\xi_{\beta,\alpha} \tag{8.22}$$

$$=\eta_{\alpha\beta}$$

◆

$$h_{\alpha\beta}\rightarrow h'_{\alpha\beta}=h_{\alpha\beta}-\xi_{\alpha,\beta}-\xi_{\beta,\alpha} \tag{8.24}$$

$$=\xi_{\alpha,\beta}+\xi_{\beta,\alpha}-\xi_{\alpha,\beta}-\xi_{\beta,\alpha}=0$$

つまり，ゲージ不変である．

(c)

$$\nabla_{\alpha}\xi_{\beta}+\nabla_{\beta}\xi_{\alpha}=0 \tag{7.45}$$

7.6 練習問題 10 は共変微分を使っているので，曲った時空での場である．本問での式は偏微分を使っているので，ほぼ平坦な場である．

$$h_{\alpha\beta}=\xi_{\alpha,\beta}+\xi_{\beta,\alpha}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.12）～（8.13）

練習問題 6

弱い重力場の理論では $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ で，$\left|h_{\mu\nu}\right| << 1$ を仮定する．同様に，$g^{\mu\nu}$ は $\eta^{\mu\nu}$ とあまり変わらず，たとえば $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ と書けるとする．練習問題 4(a)を使って，$\delta g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu} + O(h^2)$ であることを示せ．したがって，$\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$ は $g^{\mu\nu}$ の平坦からのずれではないことを示せ．

曲った時空が平坦な時空からのずれが小さい場合，リーマン・メトリック $g_{\mu\nu}$ はミンコフスキー・メトリック $\eta_{\mu\nu}$ を使って次のように書ける．

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{8.12}$$

$$\left|h_{\mu\nu}\right| << 1 \tag{8.13}$$

上付添字メトリックは下付添字メトリックの逆行列だから，

$$\left(g^{\mu\nu}\right) = \left(g_{\mu\nu}\right)^{-1} = \left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right)^{-1}$$

練習問題 4(a)を使って，

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \left(h^{\mu\nu}\right)^2 - \left(h^{\mu\nu}\right)^3 + \left(h^{\mu\nu}\right)^4 - \cdots$$

ランダウの誤差項を使って，

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O\left(h^2\right)$$

ここで，

$$\delta g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu} + O\left(h^2\right)$$

とすれば，

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$$

と書ける．

上式から，$\delta g^{\mu\nu}$ が平坦からのずれであって，$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$ は平坦からのずれではない

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.29）～（8.31）

練習問題 7

(a)　$\bar{h} \equiv \bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = -h \equiv -h^{\alpha}{}_{\alpha}$ を証明せよ．

(b)　式（8.31）を証明せよ．

(a)　トレース反転テンソル

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h \tag{8.29}$$

の各項のトレースをとる．

$$\bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}\bar{h}^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}h$$

$$= h^{\alpha}{}_{\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}{}_{\alpha}h^{\alpha}{}_{\alpha} = h^{\alpha}{}_{\alpha} - 2h^{\alpha}{}_{\alpha} = -h^{\alpha}{}_{\alpha}$$

$$\bar{h} \equiv \bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = -h \equiv -h^{\alpha}{}_{\alpha} \qquad (8.28)\quad(8.30)$$

(b)　式（8.30）を式（8.29）に代入すると，

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h}$$

$$h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h} \tag{8.31}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.25）～（8.32）

練習問題 8

式（8.32）を次の順序で示せ．

(a)　$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \eta^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta\mu\nu} + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^{2}\right)$であることを示せ．

(b)　これから $R_{\alpha\beta}$ を $h_{\mu\nu}$ の 1 次まで計算せよ．

(c)　$g_{\alpha\beta} R = \eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^{2}\right)$であることを示せ．

(d)　これによって，

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} R$$

であること，つまり式 (8.29) の意味で，線形化された $G_{\alpha\beta}$ は線形化された $R_{\alpha\beta}$ のトレース反転であることをいえ．

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} h \tag{8.29}$$

(e)　このことを使って，式（8.32）の計算をもう少し簡単化せよ．

(a)　次式を使って，

$$g^{\alpha\sigma} = \eta^{\alpha\sigma} + h^{\alpha\sigma} \tag{8.12b}$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = g^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta\mu\nu}$$

$$= \eta^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta\mu\nu} + h^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta\mu\nu}$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \eta^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta\mu\nu} + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^{2}\right)$$

(b)　次式とリッチ・テンソルの定義式

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) \tag{8.25}$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \eta^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta\mu\nu} + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^{2}\right)$$

◆　$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \tag{6.91}$$

を使って，線形近似でのリッチ・テンソルは，

$$R_{\alpha\beta} = \eta^{\mu\sigma} R_{\sigma\alpha\mu\beta} + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^{2}\right)$$

$$= \eta^{\mu\sigma}\frac{1}{2}\left(h_{\sigma\beta,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu,\sigma\beta} - h_{\sigma\mu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\sigma\mu}\right) + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^{2}\right)$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(h^{\mu}{}_{\beta,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - h^{\mu}{}_{\mu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}\right) + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^{2}\right) \tag{8.25c}$$

where $h^{\mu}{}_{\mu} = h$

(c)　リッチ・スカラーの定義式を使って，

◆　$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} \tag{6.92}$$

$$g_{\alpha\beta} R = g_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \left(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\right)\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$g_{\alpha\beta} R = \eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^{2}\right)$$

(d)　アインシュタイン・テンソルの定義式は，

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$$

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\right) R = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} R + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}\right)$$

(e)

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(h^{\mu}{}_{\beta,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - h^{\mu}{}_{\mu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}\right) + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^{2}\right) \tag{8.25c}$$

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

を使って，線形近似でのリッチ・スカラーは，

$$R = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left(h^{\mu}{}_{\beta,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - h^{\mu}{}_{\mu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(h^{\mu\alpha}{}_{,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu}{}^{,\alpha\mu} - h^{\mu}{}_{\mu,\alpha}{}^{,\alpha} - h^{\beta}{}_{\beta,\mu}{}^{,\mu}\right)$$

$$R = h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} - h_{,\mu}{}^{,\mu} \tag{8.25d}$$

where $h^{\mu}{}_{\mu} = h$，$h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} = h_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}$

もう一度

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(h^{\mu}{}_{\beta,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - h^{\mu}{}_{\mu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}\right) + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^{2}\right) \tag{8.25c}$$

$$\eta_{\alpha\beta} R = \eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

を使って，

$$G_{\alpha\beta}=R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R$$
$$=\frac{1}{2}\left[h^{\mu}{}_{\beta,\alpha\mu}+h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu}-h_{,\alpha\beta}-h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}-\eta_{\alpha\beta}\left(h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu}-h_{,\mu}{}^{,\mu}\right)\right]$$

（8.32'）

$$h^{\alpha\beta}=\bar{h}^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h} \qquad (8.31)$$

を使って，

$$G_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left[\left(\bar{h}^{\mu}{}_{\beta}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\beta}\bar{h}\right)_{,\alpha\mu}+\left(\bar{h}_{\alpha\mu}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}\bar{h}\right)_{,\beta}{}^{,\mu}+\bar{h}_{,\alpha\beta}\right.$$
$$\left.-\left(\bar{h}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}\right)_{,\mu}{}^{,\mu}-\eta_{\alpha\beta}\left(\bar{h}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}\right)^{,\mu\nu}-\eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{,\mu}{}^{,\mu}\right]$$

$$G_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left[\bar{h}^{\mu}{}_{\beta,\alpha\mu}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\beta}\bar{h}_{,\alpha\mu}+\bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}\bar{h}_{,\beta}{}^{,\mu}+\bar{h}_{,\alpha\beta}\right.$$
$$\left.-\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}+\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{,\mu}{}^{,\mu}-\eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}+\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\bar{h}^{,\mu\nu}-\eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{,\mu}{}^{,\mu}\right]$$

上式の第 2，4，5 項は打消しあう．上式の第 6，7，9，10 項は次式の第 1 項になる．上式の第 1 項は次式の第 4 項になる．

アインシュタイン・テンソルの中途形

$$G_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}+\eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}-\bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu}-\bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu}\right] \qquad (8.32)$$

where $\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}=\Box\bar{h}_{\alpha\beta}$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.32）

練習問題 9

(a)　式（8.32）から G_{00} と G_{0i} が $\bar{h}_{\alpha\beta}$ の時間について２階の微分を含まないことを示せ．したがって，６個の方程式 $G_{ij}=\dfrac{8\pi G}{c^4}T_{ij}$ のみが力学的な方程式である．方程式 $G_{0\alpha}=\dfrac{8\pi G}{c^4}T_{0\alpha}$ は束縛方程式とよばれる．それらの式は，ほかの６個の方程式の初期データの関係を与えており，それらのデータをまったく自由に選ぶことはできない．

(b)　式（8.42）は μ と ν がゼロであっても時間の 2 階微分を含んでいる．これは(a)と矛盾しないか？それはなぜか？

(a)

$$G_{00}=-\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{00,\mu}{}^{,\mu}+\eta_{00}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}-\bar{h}_{0\mu,0}{}^{,\mu}-\bar{h}_{0\mu,0}{}^{,\mu}\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{00,\mu}{}^{,\mu}-\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}-2\bar{h}_{0\mu,0}{}^{,\mu}\right]$$
$$G_{0i}=-\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{0i,\mu}{}^{,\mu}+\eta_{0i}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}-\bar{h}_{0\mu,i}{}^{,\mu}-\bar{h}_{i\mu,0}{}^{,\mu}\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{0i,\mu}{}^{,\mu}-\bar{h}_{0\mu,i}{}^{,\mu}-\bar{h}_{i\mu,0}{}^{,\mu}\right]$$
$$G_{ij}=-\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{ij,\mu}{}^{,\mu}+\eta_{ij}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}-\bar{h}_{i\mu,j}{}^{,\mu}-\bar{h}_{j\mu,i}{}^{,\mu}\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{ij,\mu}{}^{,\mu}+\delta_{ij}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}-2\bar{h}_{i\mu,j}{}^{,\mu}\right]$$

$G^{\alpha 0}$ は，$g^{\alpha\beta}$ の時間の１回と空間の１回の微分の関数であり，G^{ij} は，g^{ij} の時間の２回の微分と $g^{\alpha\beta}$ の時間の１回の微分の関数である．したがって，$g^{\alpha 0}$ の時間の２回微分はこの方程式に含まれていない．運動方程式は時間の２回微分の方程式であるので，運動方程式と束縛方程式の位置は次のとおりである．

$$
\left(G^{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix} 束 & 束 & 束 & 束 \\ (束) & 運 & 運 & 運 \\ (束) & (運) & 運 & 運 \\ (束) & (運) & (運) & 運 \end{pmatrix}
$$

where 運；運動方程式，束；束縛方程式，

( )；独立でない（対称テンソルのため）

(b)　ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）の成分 $T^{\mu 0}$ はエネルギーであり，T^{ij} は運動量であるから．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.41）

練習問題 10

ローレンツ条件式（8.33）を使って，$G_{\alpha\beta}$ を式（8.41）に簡単化せよ．

アインシュタイン・テンソルの中途形の式（8.32）をさらに変形していく．

式（8.33）を使うと，式（8.32）の第 2，3，4 項はゼロである．

$$
G_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}
$$

ダランベルシャンの定義式（8.37）から，

$$
G^{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\Box\bar{h}^{\alpha\beta} \tag{8.41}
$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.33）

練習問題 11
　マクスウェル方程式を特殊相対論的に書くと，スカラーポテンシャルϕと３次元ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}_i$（符号は$\boldsymbol{E}_i=-\phi_{,i}-\boldsymbol{A}_{i,0}$で定義する）を一形式の成分$\boldsymbol{A}_0=-\phi$，$\boldsymbol{A}_i$(一形式)$=\boldsymbol{A}_i$(三次元ベクトル)として考えることになる．ゲージ変換は$\phi\to\phi-\partial f/\partial t$，$\boldsymbol{A}_i\to\boldsymbol{A}_i+f_{,i}$という置き換えである．この変換では電場と磁場は変化しない．ローレンツ・ゲージは$\partial\phi/c^2\partial t+\nabla_i\boldsymbol{A}^i=0$となるゲージである．ゲージ変換とローレンツ・ゲージ条件を４次元テンソル記法で書け．線形化した重力理論での同様な方程式との類似点を示せ．

電磁ポテンシャル表現されたマクスウェル方程式は，

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \quad ①$$

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \quad ②$$

$$\Box\phi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ③$$

$$\Box\boldsymbol{A}-\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\mu_0\boldsymbol{j} \quad ④$$

電磁ポテンシャル（スカラーポテンシャルϕとベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$）を次のものとする．これは４元テンソルである．

$$\vec{A}\to\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\phi & \boldsymbol{A}\end{pmatrix},\quad \tilde{A}\to\begin{pmatrix}-\frac{1}{c}\phi & \boldsymbol{A}\end{pmatrix} \quad ⑤$$

次式は②式を書き換えたものである．

$$\boldsymbol{E}_i=-\phi_{,i}-\boldsymbol{A}_{i,0} \quad ⑥$$

③式と④式のカッコ内をゼロにするものをローレンツ・ゲージ条件という．

$$\partial\phi/c^2\partial t+\nabla_i\boldsymbol{A}^i=0$$

与式のゲージ変換

$$\phi\to\phi-\partial f/\partial t \quad ⑦$$

$$\boldsymbol{A}_i\to\boldsymbol{A}_i+f_{,i} \quad ⑧$$

を①式と②式に代入しても，方程式の形は変わらず，ゲージ不変である．
ローレンツ・ゲージ条件を書き換えると，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}=\partial_\mu A^\mu=0 \quad ⑨$$

ゲージ変換を書き換えると，

$$\phi\to\phi+f_{,t} \quad ⑩$$

$$A^i\to A^i-\nabla_i f \quad ⑪$$

電磁場と重力場を比較する．
マクスウェル方程式のローレンツ・ゲージ条件

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}=\partial_\mu A^\mu=0 \quad \text{(mx7.3)}$$

重力場でのローレンツ・ゲージ条件

◆ $$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0 \quad (8.33)$$

マクスウェル方程式から導かれる波動方程式

$$\partial^\nu\partial_\nu A^\mu=\Box A^\mu=-\mu_0 J^\mu \quad \text{(mx7.6)}$$

弱い重力場でのアインシュタイン方程式（線形理論での場の方程式）

◆ $$\Box\bar{h}^{\mu\nu}=-\frac{16\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \quad (8.42)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.34）

練習問題 12

式（8.34）を証明せよ．

◆ $$h_{\alpha\beta}^{(\mathrm{new})} = h_{\alpha\beta}^{(\mathrm{old})} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \qquad (8.24\mathrm{b})$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \qquad (8.29\mathrm{b})$$

これらを使って，

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(\mathrm{new})} = h_{\mu\nu}^{(\mathrm{new})} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{(\mathrm{new})} = h_{\mu\nu}^{(\mathrm{old})} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(h^{\alpha}{}_{\alpha} - 2\xi^{\alpha}{}_{,\alpha}\right)$$

where $h^{(\mathrm{new})} = h^{\alpha}{}_{\alpha} - 2\xi^{\alpha}{}_{,\alpha}$

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(\mathrm{old})} = h_{\mu\nu}^{(\mathrm{old})} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\alpha}{}_{\alpha}$$

として，

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(\mathrm{new})} = \bar{h}_{\mu\nu}^{(\mathrm{old})} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha} \qquad (8.34)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（）

練習問題 13

ニュートン的な系に対する不等式$\left|T^{00}\right| >> \left|T^{0i}\right| >> \left|T^{ij}\right|$は, 練習問題 2(c), 3(d)〜(e)で例が示されている．この関係が一般にも成り立つことを物理的に説明せよ．

$T^{\mu\nu}$は，ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）という．

T^{00}；エネルギー密度

T^{0j}；x^j方向へのエネルギーの流れ

T^{i0}；i成分の運動量密度

T^{ij}；x^j方向へのi成分の運動量の流れ

物質の平均自由行程が全体のスケールに比べて短いとき，流体近似が可能である.さらに流体の静止系で,圧力が等方的であり（応力テンソルが対角的であり），粘性のない場合，完全流体として考えることができる．このとき，

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + p/c^2\right)U^{\mu}U^{\nu} + g^{\mu\nu}p$$

非相対論的（ニュートン的）な場合，

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}, \quad \left|\beta^i\right| = \left|v^i/c\right| << 1, \quad \rho c^2 >> p$$

である．

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho\beta_x & \rho\beta_y & \rho\beta_z \\ \rho\beta_x & p + \rho{\beta_x}^2 & \rho\beta_x\beta_y & \rho\beta_z\beta_x \\ \rho\beta_y & \rho\beta_x\beta_y & p + \rho{\beta_y}^2 & \rho\beta_y\beta_z \\ \rho\beta_z & \rho\beta_z\beta_x & \rho\beta_y\beta_z & p + \rho{\beta_z}^2 \end{pmatrix}$$

したがって，

$$\left|\rho c^2\right| >> \left|\rho\beta_i\right| >> \left|p + \rho{\beta_i}^2\right|$$

$$\left|T^{00}\right| >> \left|T^{0i}\right| >> \left|T^{ij}\right|$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.46）〜（8.50）

練習問題 14
　式（8.46）と成分 $h_{\alpha\beta}$ の間に成り立つ不等式を使って，式（8.47）〜（8.50）を書け．

ニュートンの重力理論が成り立つのは，重力場が十分に弱くて光速度に近い速度まで加速しないとき，つまり，

$$|m\phi| << mc^2, \quad |\phi|/c^2 << 1$$

このとき，練習問題 13 の式

$$\left|T^{00}\right| >> \left|T^{0i}\right| >> \left|T^{ij}\right|$$

が成り立つ．さらに，
弱い重力場でのアインシュタイン方程式（線形理論での場の方程式）

◆ $$\Box \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \tag{8.42}$$

によって，

$$\left|\bar{h}^{00}\right| >> \left|\bar{h}^{0i}\right| >> \left|\bar{h}^{ij}\right|$$

となる．
$T^{00} = \rho c^2 + \mathrm{O}\left(\rho v^2\right)$ だから，

$$\Box \bar{h}^{00} = -\frac{16\pi G\rho}{c^2} \tag{8.43}$$

$$\Box = \nabla^2 + \mathrm{O}\left(v^2\nabla^2\right) \tag{8.44}$$

と書けるので，

$$\nabla^2 \bar{h}^{00} = -\frac{16\pi G\rho}{c^2} \tag{8.45}$$

これを

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho \tag{8.1}$$

と比べて，

$$\bar{h}^{00} = 4\phi / c^2 \quad (8.46)$$

$\bar{h}^{\alpha\beta}$ のほかの成分はこのオーダーでは無視できるので，

$$h = h^{\alpha}{}_{\alpha} = -\bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = \bar{h}^{00} \quad (8.47)$$

であって，このことから，

$$h^{00} = -2\phi / c^2 \quad (8.48)$$

$$h^{xx} = h^{yy} = h^{zz} = -2\phi / c^2 \quad (8.49)$$

メトリックを計算すると，

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 - 2\phi / c^2$$

$$g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = \eta_{xx} + h_{xx} = \eta_{yy} + h_{yy} = \eta_{zz} + h_{zz} = 1 - 2\phi / c^2$$

だから，線要素は，

$$ds^2 = -\left(1 + 2\phi / c^2\right)c^2 dt^2 + \left(1 - 2\phi / c^2\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \quad (8.50)$$

where　$\phi = -GM / r$，$|m\phi| << mc^2$，$|\phi| / c^2 << 1$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.50）

練習問題 15

弱い重力場の問題（あるいはほかの場合でも）を扱うには適切な座標系を使うべきであるが，物理的な結果は座標に依存しない言葉で表現すべきであることを議論した．この立場からすると，ニュートン極限を導いたやり方は不十分である．７章では，式（8.50）のメトリックがニュートンの法則 $d\mathbf{p} / dt = -m\nabla\phi$ を与えることを示したにすぎないからである．明らかにこの式は座標時間と位置座標を含んだ座標依存性のある方程式である．そして，明らかに４次元的な適切なテンソル方程式ではない．物理的な測定によって，相対論的な結果がニュートン的な結果に一致することを確かめることができることを示して，上記の議論の欠陥を補え.(たとえば，ある軌道上での固有時間とその固有な円周の長さの関係はどうなっているか？)

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.50）

練習問題 16

式（8.10）で $8\pi G/c^4$ を k で置き換え，この置き換えによって変化する以後の式をたどっていって，ニュートン極限を書き直せ．$k=8\pi G/c^4$ のときのみ，式（8.50）が再現されることを確かめよ．

【Reference】
Peter Dunsby "Tensors and Relativity"
http://www.mth.uct.ac.za/omei/gr/
私のＨＰに PDF 版が用意されている．PDF の pp142-147 を参照のこと．

広江　克彦（通称 EMAN）「相対性理論」
http://eman-physics.net/relativity/contents.html
私のＨＰに PDF 版が用意されている．PDF の pp167-172 を参照のこと．
＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（）

練習問題 17

(a)　静的な中性子星のまわりに，固有の円周の長さが $6\times10^{11}\,\mathrm{m}$ の円軌道を描いている小さな惑星がある．その軌道周期は惑星の固有時間で 200 日である．中性子星の質量 M を求めよ．

(b)　静的なブラックホールのまわりに，５個の衛星が円軌道を描いている．固有の円周の長さと固有軌道周期は下の表に与えてある．(a)の方法によって，ブラックホールの質量を求めよ．各衛星から得られた結果の傾向を説明せよ．

固有の円周の長さ（m）	2.5×10^6	6.3×10^6	6.3×10^7	3.1×10^8	6.3×10^9
固有周期（秒）	8.4×10^{-3}	0.055	2.1	23	2.1×10^3

(a)　引力と遠心力のバランス式は，

$$f=G\frac{Mm}{r^2}=\frac{mv^2}{r}$$

$$M=\frac{rv^2}{G}$$

$v=\dfrac{2\pi r}{P}$ だから，

$$M=\frac{4\pi^2r^3}{P^2G}$$

$a=2\pi r$ として，

$$M=\frac{a^3}{2\pi P^2G}$$

$$M=\frac{\left(6\times10^{11}\,\mathrm{m}\right)^3}{2\pi\times(200\times24\times3600\mathrm{s})^2\times6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{kg}}$$

$$=1.73\times10^{30}\,\mathrm{kg}$$

（練習問題 2 から）

$$=1.73\times10^{30}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}$$

$= 1280\mathrm{m} \sim 1M_{\Theta}$

(b)

$$M = \frac{\left(2.5\times10^{6}\,\mathrm{m}\right)^{3}}{2\pi\times\left(8.4\times10^{-3}\,\mathrm{s}\right)^{2}\times6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m}^{3}/\mathrm{s}^{2}\cdot\mathrm{kg}}$$

$= 5.3\times10^{32}\,\mathrm{kg}$

$= 3.9\times10^{5}\,\mathrm{m} \sim 264M_{\Theta}$

$$M = \frac{\left(6.3\times10^{6}\,\mathrm{m}\right)^{3}}{2\pi\times(0.055\mathrm{s})^{2}\times6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m}^{3}/\mathrm{s}^{2}\cdot\mathrm{kg}}$$

$= 1.8\times10^{32}\,\mathrm{kg}$

$= 1.5\times10^{5}\,\mathrm{m} \sim 101M_{\Theta}$

$$M = \frac{\left(6.3\times10^{7}\,\mathrm{m}\right)^{3}}{2\pi\times(2.1\mathrm{s})^{2}\times6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m}^{3}/\mathrm{s}^{2}\cdot\mathrm{kg}}$$

$= 1.4\times10^{32}\,\mathrm{kg}$

$= 1.0\times10^{5}\,\mathrm{m} \sim 68M_{\Theta}$

$$M = \frac{\left(3.1\times10^{8}\,\mathrm{m}\right)^{3}}{2\pi\times(23\mathrm{s})^{2}\times6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m}^{3}/\mathrm{s}^{2}\cdot\mathrm{kg}}$$

$= 1.3\times10^{32}\,\mathrm{kg}$

$= 0.99\times10^{5}\,\mathrm{m} \sim 68M_{\Theta}$

$$M = \frac{\left(6.3\times10^{9}\,\mathrm{m}\right)^{3}}{2\pi\times\left(2.1\times10^{3}\,\mathrm{s}\right)^{2}\times6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m}^{3}/\mathrm{s}^{2}\cdot\mathrm{kg}}$$

$= 1.4\times10^{32}\,\mathrm{kg}$

$= 1.0\times10^{5}\,\mathrm{m} \sim 68M_{\Theta}$

算出式がニュートン的だから，円周が長いほど周期が長いほどニュートン的になるので，正しい質量を与える．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 18

Λ を適当にとり $k = 8\pi G/c^{4}$ として，宇宙項のある場の方程式（8.7）を考える．

(a)　ニュートン極限を求め，$|\Lambda|$ が十分小さいときのみ，惑星の運動を正しく導くことができるとことを示せ. 冥王星の軌道半径が $5.9\times10^{12}\,\mathrm{m}$ であるとすると，太陽系での測定によって，$|\Lambda|$ の上限はどうなるか？

(b)　Λ を式（8.7）の右辺に移項すると，$-\Lambda g^{\mu\nu}c^{4}/8\pi G$ を“からっぽの空間”のストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）と見なすことができる．宇宙のなかで，われわれの銀河の近傍の領域で観測される質量の密度は，一様分布を仮定すると，約 $10^{-27}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ である．(a)で求めた $|\Lambda|$ の上限値をとると，観測できる宇宙論的な影響が出てくると思うか？

(a)　冥王星の軌道半径での太陽の平均質量密度の影響を調べる．

$$\Lambda g^{00} = \frac{8\pi G}{c^{4}}T^{00} = \frac{8\pi G}{c^{4}}\rho c^{2} = \frac{8\pi G}{c^{2}}\rho$$

$$= \frac{8\pi\times6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m}^{3}/\mathrm{s}^{2}\cdot\mathrm{kg}}{\left(2.998\times10^{8}\,\mathrm{m/s}\right)^{2}}\frac{1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg}}{\frac{4}{3}\pi\left(5.9\times10^{12}\,\mathrm{m}\right)^{3}}$$

$$= 4.3\times10^{-35}\,\mathrm{m}^{-2}$$

$$|\Lambda| \le 4.3\times10^{-35}\,\mathrm{m}^{-2}$$

(b)　式（8.7）から，

$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^{4}}T^{\alpha\beta} - \Lambda g^{\alpha\beta}$$

$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^{4}}\left(T^{\alpha\beta} - \frac{c^{4}}{8\pi G}\Lambda g^{\alpha\beta}\right)$$

右辺の各項を比較する．

$$
\text{第１項} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{00} = \frac{8\pi G}{c^4}\rho c^2 = \frac{8\pi G}{c^2}\rho
$$

$$
= \frac{8\pi \times 6.67\times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/s^2\cdot kg}}{\left(2.998\times 10^{8}\,\mathrm{m/s}\right)^2}\times 10^{-27}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}
$$

$$
= 1.9\times 10^{-53}\,\mathrm{m^{-2}}
$$

$$
\text{第２項} = -\Lambda g^{00} = 4.3\times 10^{-35}\,\mathrm{m^{-2}}
$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.45）

練習問題 19

　この問題では，回転している重力源がニュートン的な解に対して，及ぼす１次の補正を計算する．ニュートンの重力理論では，重力源の角運動量は場に影響しない．つまり同じ $\rho(x^i)$ 分布で異なる角運動量をもつ二つの重力源は同じ場を与える．相対論では $T^{\mu\nu}$ のすべての成分が場をつくるので影響が現れる．

　(a)　一様密度 ρ で半径 R の球が一定角速度 Ω で x^3 軸のまわりに回転しているとする． ρ， Ω， R が時間的に一定であるとして，球の重心が静止しているようなローレンツ系をとって，成分 $T^{0\nu}$ を書き下せ．各成分に対して， ΩR に関して最低次の項を計算せよ．

　(b)　$\nabla^2 f = g$ の一般解で，無限遠でゼロになるものは，式（8.2）を一般化したもので，

$$
f(x) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{g(y)}{|x-y|} d^3 y
$$

と書け， g が小領域でゼロでないとき式（8.2）に移行する．(a)で示された重力源について，このことを使って式（8.42）を $\bar{h}^{00}$ と $\bar{h}^{0j}$ について解け．物体の外部についての解を， r^{-1} のゼロでない最低次の項まで計算せよ．ここで， r は球の中心からの距離である． $\bar{h}^{0j}$ についての結果を物体の角運動量を使って表せ．この近似の範囲で，メトリックテンソルを求め，それを球座標に変換せよ．

　(c)　メトリックは t にも角度 ϕ にも依存しないので，この物体のまわりで軌道運動する粒子では，軌道に沿って p_0 と p_ϕ が一定になる（7.4 節参照）．赤道面上で半径 r の円軌道を描く質量がゼロでない粒子を考える．正の方向（中心の天体の回転と同じ方向の回転）と負の方向での軌道周期の差を最低次まで計算せよ．（周期を軌道を一周して $\Delta\phi = 2\pi$ 変化するのにかかる座標時間として定義せよ．）

(d)　このことから，中心天体の角運動量 $\boldsymbol{J}$ を求めるための実験法を考えよ．中心天体として太陽（$M=2\times10^{30}\,\mathrm{kg}$，$R=7\times10^{8}\,\mathrm{m}$，$\Omega=3\times10^{-6}\,\mathrm{s}^{-1}$ をとり，軌道運動する物体として地球（$r=1.5\times10^{11}\,\mathrm{m}$）をとろう．正の方向と負の方向で一年の差はいくらか？

(a)

$$T^{00}=\rho$$

$$T^{01}=-\rho\Omega x^2$$

$$T^{02}=\rho\Omega x^1$$

$$T^{03}=0$$

T^{ij} 成分は与えられている情報からは完全に決定されないが，それらは，$\rho v^i v^j$，すなわち，$\rho\Omega^2R^2$ のオーダーである．

(b)

$$\nabla^2\bar{h}^{00}=-\frac{16\pi G\rho}{c^2} \qquad (8.45)$$

$$\nabla^2\phi=4\pi G\rho \qquad (8.1)$$

から，

$$\bar{h}^{00}=-\frac{4\phi}{c^2}=\frac{4GM}{r}$$

$\bar{h}^{0i}$ に対しては，

$$\bar{h}^{0i}=-4\rho\Omega\int y^2\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|^{-1}d^3y$$

二項展開

$$\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|^{-1}=r^{-1}\left[1+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}/r^2+\mathrm{O}(R/r)^2\right]$$

を求める．対称性より，

$$\int y^i d^3y=0$$

$$\int y^i y^j d^3y=0 \quad (i\neq j)$$

$$\int y^1y^1d^3y=\int y^2y^2d^3y=\int y^3y^3d^3y=(4\pi/15)R^2$$

これから，

$$\bar{h}^{01}=-(16\pi/15)\rho R^5\Omega x^2/r^3$$

角運動量 J を用いると，

$$\bar{h}^{01}=-2Jx^2/r^3$$

$$\bar{h}^{02}=2Jx^1/r^3$$

$$\bar{h}^{03}=0$$

これらはすべて r^{-2} のように小さくなり，r^{-3} のオーダーまで正しい．$\nabla^2 f=g$ という方程式の研究によれば，上式は厳密に成り立つ．すなわち，すべての高次の項はゼロである．

T^{ij} が小さいので，$\bar{h}^{ij}$ 成分は，$\bar{h}^{00}$，$\bar{h}^{0i}$ に比べて小さい．したがって，

$$h^{\alpha\beta}=\bar{h}^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h} \qquad (8.31)$$

が $h^{\mu\nu}$ を与え，メトリックは，

$$g_{00}=-1+\frac{2GM}{r}+\mathrm{O}(\Omega^2R^2)$$

$$g_{01}=\frac{2Jx^2}{r^3}+\mathrm{O}(\Omega^3R^3)$$

$$g_{02}=-\frac{2Jx^1}{r^3}+\mathrm{O}(\Omega^3R^3)$$

$$g_{03}=0$$

$$g_{ij}=\delta_{ij}\left(1+\frac{2GM}{r}\right)+\mathrm{O}(\Omega^2R^2)$$

◆　$$ds^2=-(1+2\phi/c^2)c^2dt^2+(1-2\phi/c^2)(dx^2+dy^2+dz^2) \qquad (7.8)$$

where　$\phi=-GM/r$，$|m\phi|<<mc^2$，$|\phi|/c^2<<1$

と比較する．

標準的な球座標では，g_{00} は同じ，$g_{0r}=g_{0\theta}=0$，$g_{0\phi}=-2J/r$

線要素の空間部分は，

$$dl^2=\left[1+2GM/r-\mathrm{O}(\Omega^2R^2)\right](dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2)$$

(c)　そのような粒子は，$p_0 \equiv -E$，$p_\phi \equiv L$　$(E, L = \text{Const.})$，$p^r = p^\theta = 0$ とした測地線の方程式に従う．このオーダーまでで，規格化条件

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2$$

から，

$$E = m\left(1 - GM/r + L^2/2m^2 r\right)$$

が導かれ，これはニュートン理論と（静止質量を除いて）一致する．最低次までの測地線の方程式の r 成分から，

$$L = m(Mr)^{1/2}$$

が導かれるが，これもニュートン理論と一致する．一周期 $\Delta\phi = 2\pi$ は時間

$$\Delta t = (dt/d\phi)\Delta\phi$$

を要する．

$$dt/d\phi = (dt/d\tau)/(d\phi/d\tau) = U^0 U^\phi = p^0 p^\phi$$

であり，これは，E，L とメトリックで表される．直接的な計算から，

$$(\Delta t)\text{prograde} - (\Delta t)\text{retrograde} = -8\pi J/M$$

という r に依存しない答えが導かれる．原理的にはこれから物体の角運動量を，そのまわりを回る粒子の軌道をしらべることによって測定することができる．

(d)　太陽の慣性モーメント

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5} \times 2 \times 10^{30}\,\text{kg} \times \left(7 \times 10^8\,\text{m}\right)^2 = 4 \times 10^{47}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

太陽の角運動量

$$J = I\omega = 4 \times 10^{47}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \times 3 \times 10^{-6}\,\text{s}^{-1} = 1 \times 10^{42}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

問題(c)から，

$$8\pi J/M = \frac{8\pi \times 1 \times 10^{42}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{2 \times 10^{30}\,\text{kg}} = 1.3 \times 10^{13}\,\text{m}^2/\text{s}$$

$$\phi = -\frac{GM}{r} = -\frac{6.67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3/\text{s}^2 \cdot \text{kg} \times 2 \times 10^{30}\,\text{kg}}{1.5 \times 10^{11}\,\text{m}}$$

$$= -9 \times 10^8\,\text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v = \frac{2\pi \times 1.5 \times 10^{11}\,\text{m}}{365.24 \times 24 \times 3600\text{s}} = 9 \times 10^8\,\text{m}^2/\text{s}^2$$

？？？

0.16ms

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.61）～（8.62）

練習問題 20

この問題では能動重力質量密度という概念を導入する．式（8.42）で弱い場におけるアインシュタイン方程式を導いた後，速度の遅いニュートン極限の場合のみに限定して扱った．ここでは，速度が遅いとか圧力が密度よりも十分に小さいといった仮定ができない状況を扱ってみよう．

(a)　式（8.42）においてトレース反転操作を行い次式を導け．

$$\Box k^{\mu\nu} = -16\pi\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^{\alpha}{}_{\alpha}\eta^{\mu\nu}\right) \tag{8.61}$$

(b)　考える系が孤立しており定常状態にあるとすると，その系から遠く離れた場所では，式（8･50）を導く際に議論したように，重力場としては，h^{00} が一番大きな成分を与える･その系では内部の重力は弱いが圧力は強い場合，$h^{00} = -2\phi$ となることを示せ．ここで ϕ はニュートン的なポアソン方程式

$$\nabla^2\phi = 4\pi\left(\rho + T^k{}_k\right) \tag{8.62}$$

を満たす量である．完全流体の場合，この式の右辺は $4\pi(\rho + 3p)$ となり,それを一般相対論では能動重力質量密度という．系がニュートン的であると，$p << \rho$ なので,過常のニュートン極限になる．これはポスト･ニュートン効果の第二の例である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

【Referencies】

Petros Souvatzis “The linearized theory of gravitational radiation and the detection of gravitational waves”
http://www.teorfys.uu.se/courses/exjobb/
http://www.teorfys.uu.se/courses/exjobb/gravwavs.doc
Carl Philip Dettmann “General Relativity”
http://www.maths.bris.ac.uk/~macpd/
http://www.geol.sci.hiroshima-u.ac.jp/~nakakuki/naibutsu/resume2007/lec-05-20070621.pdf