7　曲がった時空での物理

アインシュタイン・テンソル，重力ポテンシャル，測地線方程式，キリング方程式

7.1　微分幾何から重力へ　　（7.1）～（7.7）

特殊相対論での粒子の保存則

$$(nU^{\alpha})_{,\alpha}=0 \tag{7.1}$$

ここで，n は瞬時的共同座標系（MCR 系）での粒子密度であり，U^{α} は流体要素の 4 元速度である．上式は局所慣性系での粒子の保存則である．
上式を強い等価原理によって曲った時空へ一般化すると，

$$(nU^{\alpha})_{;\alpha}=0 \tag{7.2}$$

問題にあるように，粒子の生成，消滅がある場合は，

$$(nU^{\alpha})_{;\alpha}=R \tag{7.3}$$

R はリッチ・スカラーで次式で与えられる．

◆ $$R\equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} \tag{6.92}$$

平坦な時空では，リーマン・テンソルは消えるから，式（7.3）は式（7.1）に帰着する．

練習問題 1　　（7.1）～（7.3）

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0 \tag{7.6}$$

$$T^{\mu\nu}=(\rho+p/c^2)U^{\mu}U^{\nu}+pg^{\mu\nu} \tag{7.7}$$

◆ $$ds^2=-(1+2\phi/c^2)c^2dt^2+(1-2\phi/c^2)(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{7.8}$$

練習問題 5　　（7.38）～（7.40）

7.2　少し曲った時空での物理　　（7.8）～（7.24）

弱い重力場に対して，通常のニュートン・ポテンシャル ϕ が完全にメトリックを決め，次の形をとる．

◆ $$ds^2=-(1+2\phi/c^2)c^2dt^2+(1-2\phi/c^2)(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{7.8}$$

where　$\phi=-GM/r$，$|m\phi|<<mc^2$，$|\phi|/c^2<<1$，ϕ は c^2 と同次元

自由落下粒子の運動を計算する．その 4 元速度を $\vec{U}$，4 元運動量を $\vec{p}$ とする．静止質量ゼロ以外のすべての粒子に対して，$\vec{p}=m\vec{U}$，$\vec{U}=d\vec{x}/d\tau$ である．粒子の経路は測地線であり，固有時間 τ はアフィンパラメータなので，$\vec{U}$ は測地線方程式を満たす．（$\vec{U}$ は接ベクトルである．）

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{U}=0 \tag{7.9}$$

τ の代わりに τ/m を用いる．これもアフィンパラメータである．

$$d\vec{x}/d(\tau/m)=md\vec{x}/d\tau=\vec{p}$$

も測地線方程式を満たす．

$$\nabla_{\vec{p}}\vec{p}=0 \tag{7.10}$$

光子は $m=0$ で $\vec{U}$ は存在しないが，きちんと定義できる $\vec{p}$ をもつから，この方程式は光子でも成り立つ．もし粒子が式（7.8）の座標で非相対論的な速度をもつなら，式（7.10）に対する近似的な式を見つけることができる．
練習問題 6 から式（7.10）は，

$$(\nabla_{\vec{p}}\vec{p})^{\alpha}=p^{\beta}p^{\alpha}{}_{;\beta}=p^{\beta}p^{\alpha}{}_{,\beta}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}p^{\mu}p^{\beta}=0 \tag{7.11'}$$

この方程式の第 0 成分は，

$$p^{\alpha}p^{0}{}_{,\alpha}+\Gamma^{0}{}_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta}=0 \tag{7.11}$$

粒子の速度は非相対論的で $p^0>>p^i$，$p^{\alpha}\partial_{\alpha}=mU^{\alpha}\partial_{\alpha}=md/d\tau$ だから，

$$m\frac{d}{d\tau}p^0+\Gamma^{0}{}_{00}(p^0)^2=0 \quad （次元は\ \mathrm{M}^2\cdot\mathrm{Accel}=\mathrm{M}\cdot\mathrm{Force}） \tag{7.12}$$

$$\Gamma^{0}{}_{00}=\frac{1}{2}g^{0\alpha}(g_{\alpha0,0}+g_{\alpha0,0}-g_{00,\alpha}) \quad （次元は\ \mathrm{L}^{-1}） \tag{7.13}$$

$[g_{\alpha\beta}]$ は対角的だから，$[g^{\alpha\beta}]$ も対角的でその要素は $[g_{\alpha\beta}]$ の対応する要素の逆

数である．したがって，$g^{0\alpha}$ は $\alpha=0$ の場合のみゼロでなく，

$$\Gamma^{0}{}_{00}=\frac{1}{2}g^{00}g_{00,0}=\frac{1}{2}\frac{1}{-(1+2\phi/c^2)}(-2\phi/c^2)_{,0}$$

$$=\phi_{,0}/c^2+\mathrm{O}\left(\phi^2/c^2\right) \qquad (7.14)$$

式（7.12）から，$p^0=mc$ と置き換えて，

$$m\frac{d}{d\tau}p^0=-\frac{\partial\phi/c^2}{c\partial\tau}m^2c^2$$

$$\frac{d}{d\tau}p^0=-m\frac{\partial\phi}{c\partial\tau} \qquad （次元は\mathrm{M}\cdot\mathrm{Accel}=\mathrm{Force}）\quad (7.15)$$

cp^0 はこの系での粒子のエネルギーだから，これは重力場が時間によらなければエネルギーは保存されることを意味する．cp^0 はこの系でのみ粒子のエネルギーになる．

測地線方程式の空間成分は，ニュートンの法則 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=d\boldsymbol{p}/dt$ に対応する．

$$p^{\alpha}p^{i}{}_{,\alpha}+\Gamma^{i}{}_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta}=0 \qquad (7.16)$$

速度の最低次のオーダーで，$p^0>>p^i$ を使って，

$$m\frac{dp^i}{d\tau}+\Gamma^{i}{}_{00}\left(p^0\right)^2=0 \qquad （次元は\mathrm{M}^2\cdot\mathrm{Accel}）\quad (7.17)$$

$p^0=mc$ と置き換えて，

$$\frac{dp^i}{d\tau}=-mc^2\Gamma^{i}{}_{00} \qquad （次元は\mathrm{M}\cdot\mathrm{Accel}=\mathrm{Force}）\quad (7.18)$$

$$\Gamma^{i}{}_{00}=\frac{1}{2}g^{i\alpha}\left(g_{\alpha0,0}+g_{\alpha0,0}-g_{00,\alpha}\right) \qquad (7.19)$$

$\left[g^{\alpha\beta}\right]$ は対角的だから

$$g^{i\alpha}=\left(1-2\phi/c^2\right)^{-1}\delta^{i\alpha} \qquad (7.20)$$

$$\Gamma^{i}{}_{00}=\frac{1}{2}\left(1-2\phi/c^2\right)^{-1}\delta^{ij}\left(2g_{j0,0}-g_{00,j}\right) \qquad (7.21)$$

ここで，$\delta^{i\alpha}$ はゼロだから α を j に変えた．$g_{j0}=0$ であることから，

$$\Gamma^{i}{}_{00}=-\frac{1}{2}g_{00,j}\delta^{ij}+\mathrm{O}\left(\phi^2/c^2\right) \qquad (7.22)$$

$$\Gamma^{i}{}_{00}=-\frac{1}{2}\left(-2\phi/c^2\right)_{,j}\delta^{ij} \qquad (7.23)$$

これから式（7.17）の運動方程式は（7.18）から次のようになる．

$$\frac{dp^i}{d\tau}=-m\phi_{,j}\delta^{ij} \qquad （次元は\mathrm{M}\cdot\mathrm{Accel}=\mathrm{Force}）\quad (7.24)$$

重力場の力は $-m\nabla\phi$ だから，これはニュートン理論の通常の方程式である．

エネルギー保存の方程式と運動方程式の両方が，メトリックがほとんどミンコフスキー・メトリックである（$|\phi|/c^2<<1$）ことと粒子の速度が非相対論である（$p^0>>p^i$）ことの２つの仮定の下に導かれた．

（7.8）（7.15）（7.24）

練習問題 2　　（7.8）～（7.24）

練習問題 3　　（7.8）～（7.24）

練習問題 4　　（7.8）～（7.24）

7.4　保存量　（7.25）～（7.37）

一般的には，運動量$\vec{p}$の成分が粒子の軌跡に沿って一定であるような座標系は存在しないが，例外がある．

練習問題 6　（7.10）～（7.25）

$$m\frac{dp_\beta}{d\tau}=\Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}p^\alpha p_\gamma \tag{7.26}$$

右辺は，

$$\begin{aligned}\Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}p^\alpha p_\gamma &=\frac{1}{2}g^{\gamma\nu}\left(g_{\nu\beta,\alpha}+g_{\nu\alpha,\beta}-g_{\alpha\beta,\nu}\right)p^\alpha p_\gamma\\ &=\frac{1}{2}\left(g_{\nu\beta,\alpha}+g_{\nu\alpha,\beta}-g_{\alpha\beta,\nu}\right)g^{\gamma\nu}p_\gamma p^\alpha\\ &=\frac{1}{2}\left(g_{\nu\beta,\alpha}+g_{\nu\alpha,\beta}-g_{\alpha\beta,\nu}\right)p^\nu p^\alpha\end{aligned} \tag{7.27}$$

$p^\nu p^\alpha$はνとαに関して対称であり，

$$\Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}p^\alpha p_\gamma=\frac{1}{2}g_{\nu\alpha,\beta}p^\nu p^\alpha \tag{7.28}$$

測地線方程式は一般的に

◆　$$m\frac{dp_\beta}{d\tau}=\frac{1}{2}g_{\nu\alpha,\beta}p^\nu p^\alpha \qquad \text{（次元は}\mathrm{M}^2\cdot\mathrm{Accel}=\mathrm{M}\cdot\mathrm{Force}\text{）} \tag{7.29}$$

もし$g_{\alpha\nu}$のすべての成分がある固定されたβに対してx^βによらないならば，p_βは粒子のどんな軌跡にそっても一定となる．

仮に，定常的な重力場があるとすると，メトリックの成分が時間によらない座標系を見つけることができ，p_0が保存する．実際は，ほとんどの自由落下局所慣性系で時間に依存したメトリック成分をもつ．自由落下粒子はその位置つまり時間とともに変わっていく重力場を見るからである．

メトリック成分が定常的な系は特別であり，通常，地上の実験室である．この系では粒子の重力ポテンシャルエネルギーを含んでいる．

◆　$$ds^2=-\left(1+2\phi/c^2\right)c^2dt^2+\left(1-2\phi/c^2\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) \tag{7.8}$$

のメトリックを用いて，

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{p}&=-m^2c^2=g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta\\ &=-\left(1+2\phi/c^2\right)\left(p^0\right)^2+\left(1-2\phi/c^2\right)\left[\left(p^x\right)^2+\left(p^y\right)^2+\left(p^z\right)^2\right]\end{aligned} \tag{7.30}$$

$\boldsymbol{p}^2\equiv\left(p^x\right)^2+\left(p^y\right)^2+\left(p^z\right)^2$と書いて，

$$\left(p^0\right)^2=\left[m^2c^2+\left(1-2\phi/c^2\right)\left(\boldsymbol{p}^2\right)\right]\left(1+2\phi/c^2\right)^{-1} \tag{7.31}$$

$|\phi|/c^2<<1$，$|\boldsymbol{p}|<<mc$の近似を続けると，

$$\left(p^0\right)^2\approx m^2c^2\left(1-2\phi/c^2+\boldsymbol{p}^2/m^2c^2\right) \tag{7.32a}$$

$$p^0\approx mc\left(1-\phi/c^2+\boldsymbol{p}^2/2m^2c^2\right) \tag{7.32b}$$

添字を下げると，

$$p_0=g_{0\alpha}p^\alpha=g_{00}p^0=-\left(1+2\phi/c^2\right)p^0 \tag{7.33}$$

◆　$$-p^0\approx mc\left(1+\phi/c^2+\boldsymbol{p}^2/2m^2c^2\right)=mc+m\phi/c+\boldsymbol{p}^2/2mc \tag{7.34}$$

第１項mは粒子の静止質量，第２項$m\phi$は重力ポテンシャルエネルギー，第３項$\boldsymbol{p}^2/2m$は運動エネルギーである．この式は，粒子の軌跡に沿って，p_0の一定を意味し，ニュートンの保存エネルギーの概念を一般化している．

一般の重力場は，どんな座標系でも定常的でなく，したがってどんな保存エネルギーも定義できない．

同様にメトリックが軸対称なら$g_{\alpha\beta}$が対称軸のまわりの角φによらないような座標系を見つけることができる．そのときp_φが保存される．

練習問題 7　（7.29）

練習問題 8　（7.41）～（7.43）

練習問題 9　（7.44）

練習問題 10　（7.45）

節の中で使われている公式と問題

7.1　微分幾何から重力へ　（7.1）～（7.7）

問題 1

7.2　少し曲った時空での物理　（7.8）～（7.24）

問題 2，3，4，5

7.3　曲った時空での直観　()

7.4　保存量　（7.25）～（7.37）

問題 6，7，8，9，10

（7.1）～（7.3）

練習問題 1

式（7.3）が式（7.1）の曲った時空への正しい一般化としたら，それをどのように解釈するか？

静止している流体を考えると，局所慣性系で$U^0 = c, U^i = 0$，すると$\partial n / \partial t = R$から式（7.3）は曲率による粒子の生成，消滅を意味する．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（7.8）～（7.24）

練習問題 2

式（7.8）に対し $g^{\alpha\beta}$ を ϕ の 1 次まで計算せよ．

練習問題 3

式（7.8）メトリックについて，すべてのクリストッフェル記号を ϕ の 1 次まで計算せよ． ϕ は (ct, x, y, z) の一般の関数とせよ．

練習問題 4

式 (7.15) と式 (7.24) が g_{00} のみによっていることを確かめよ． g_{xx} の形は，それが $1+\mathrm{O}(\phi)$ である限り影響を与えない．

（練習問題 2 の解答）

式（7.8）のメトリックは，

$$\left(g_{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix} -\left(1+\dfrac{2\phi}{c^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{2\phi}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\dfrac{2\phi}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\dfrac{2\phi}{c^2} \end{pmatrix}$$

$$-\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)^{-1}\approx-\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right),\quad \left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)^{-1}\approx 1+\frac{2\phi}{c^2}$$

だから，メトリックの逆行列は，

$$\left(g^{\alpha\beta}\right)\approx\begin{pmatrix} -\left(1-\dfrac{2\phi}{c^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\dfrac{2\phi}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\dfrac{2\phi}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\dfrac{2\phi}{c^2} \end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（練習問題 3 の解答）

クリストッフェル記号の定義式

◆ $$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(g_{\beta\mu,\nu}+g_{\beta\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\beta}\right) \qquad (6.32)$$

を使って，

$$\Gamma^{0}{}_{00}=\frac{1}{2}g^{00}\left(g_{00,0}+g_{00,0}-g_{00,0}\right)=\frac{1}{2}g^{00}g_{00,0}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\frac{d}{dt}\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)=\phi_{,0}/c^2=\dot{\phi}/c^2$$

$$\Gamma^{0}{}_{0i}=\frac{1}{2}g^{00}\left(g_{00,i}+g_{0i,0}-g_{0i,0}\right)=\frac{1}{2}g^{00}g_{00,i}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\frac{d}{dx^i}\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)=\phi_{,i}/c^2$$

$$\Gamma^{0}{}_{ij}=\frac{1}{2}g^{00}\left(g_{0i,j}+g_{0j,i}-g_{ij,0}\right)=-\frac{1}{2}g^{00}g_{ij,0}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\frac{d}{dt}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ij}=-\dot{\phi}\delta_{ij}/c^2$$

$$\Gamma^{i}{}_{00}=\frac{1}{2}g^{ii}\left(g_{i0,0}+g_{i0,0}-g_{00,i}\right)=-\frac{1}{2}g^{ii}g_{00,i}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)\frac{d}{dx^i}\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)=\phi_{,i}/c^2$$

$$\Gamma^{i}{}_{0j}=\frac{1}{2}g^{ii}\left(g_{i0,j}+g_{ij,0}-g_{0j,i}\right)=\frac{1}{2}g^{ii}g_{ij,0}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)\frac{d}{dt}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ij}=-\dot{\phi}\delta_{ij}/c^2$$

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{ii}\left(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)\left[\frac{d}{dx^k}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ij} + \frac{d}{dx^j}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ik} - \frac{d}{dx^i}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{jk}\right]$$

$$= \phi_{,i}\delta_{jk}/c^2 - \phi_{,j}\delta_{ik}/c^2 - \phi_{,k}\delta_{ij}/c^2$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（7.38）～（7.40）

練習問題 5

(a)　完全流体では，ニュートン極限での式（7.6）の空間部分が式（7.8）のメトリックに対して次の形に帰着することを確かめよ．

$$\boldsymbol{v}_{,t} + (\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{v} + \nabla p/\rho + \nabla\phi = 0 \qquad (7.38)$$

これは重力場内の非相対論的な流体運動に対するオイラーの式として知られている．

(b)　同じ仮定の下で式（7.6）の時間成分を検討し，その各項を解釈せよ．

(c)　式（7.38）は静的な重力場での静的流体（$v=0$）が静水力学平衡の式

$$\nabla p + \rho\nabla\phi = 0 \qquad (7.39)$$

に従うことを意味する．メトリックテンソルは，$\vec{e}_0$ が時間的で $g_{i0}=0$，$g_{\alpha\beta,0}=0$ のとき静的とよばれる．式（7.6）から静的な流体（$U^i=0$，$p_{,0}=0$ など）が相対論的静水力学平衡の式に従うことを示せ．

$$p_{,i} + \left(\rho c^2 + p\right)\left[\frac{1}{2}\ln\left(-g_{00}\right)\right]_{,i} = 0 \qquad (7.40)$$

(d)　以上から少なくとも静的な情況では g_{00} と $-\exp(2\phi)$ の間に密接な関係があることが示唆される．ϕ は同様な情況でのニュートン・ポテンシャルである．式（7.8）と練習問題 4 がこのことと矛盾していないことを示せ．

【ポイント】4.10 練習問題 12～18 の議論がほぼそのまま使うことができる．平坦な空間の式から曲った空間の式にするには，次のものを置き換える．

偏微分カンマ $(,)(\partial_\beta)$ ⇒共変微分セミコロン $(;)(\nabla_\beta)$

ミンコフスキー・メトリック $(\eta_{\alpha\beta})$ ⇒リーマン・メトリック $(g_{\alpha\beta})$

(a)　エネルギー・運動量保存則は，

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \qquad (4.34)\Rightarrow(7.6)$$

ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）は，

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \qquad (4.37)\Rightarrow(7.7)$$

（$T^{\mu\nu}$, ρc^2, p の次元は $\mathrm{Energy}\cdot \mathrm{L}^{-3} = \mathrm{Froce}\cdot \mathrm{L}^{-2}$）

二式を合わせて，

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)U^{\mu}U^{\nu} + pg^{\mu\nu}\right]_{;\nu} = 0 \qquad (4.39) \Rightarrow (7.7b)$$

練習問題 1 から，

$$\left(nU^{\beta}\right)_{;\beta} = 0 \qquad (4.40) \Rightarrow (7.2)$$

も仮定して，

$$nU^{\beta}\left(\frac{\rho + p/c^2}{n}U^{\alpha}\right)_{;\beta} + p_{;\beta}g^{\alpha\beta} = 0 \qquad (4.45) \Rightarrow (7.7c)$$

これから空間成分の次式が導出できる．

$$(\rho + p/c^2)a_i + p_{,i} = 0 \qquad \text{（次元は}\ \mathrm{Froce}\cdot \mathrm{L}^{-3}\text{）} \qquad (4.54)$$

$$\text{where} \quad \boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}, \quad a_i = U_{i,\beta}U^{\beta} \qquad (4.56)$$

曲った空間で一般化すると，

$$\boldsymbol{v}_{,t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \nabla p/\rho + \nabla\phi = 0 \quad \text{（次元は Accel）} \qquad (7.38)$$

$$\text{where} \quad v << c, \quad p << \rho c^2$$

(b)　4.10 練習問題 15 から，

時間成分は，

$$\frac{d\rho}{d\tau} - \frac{\rho + p/c^2}{n}\frac{dn}{d\tau} = 0 \qquad (4.49)$$

(c)　4.10 練習問題 16 から，

$$\left(\rho + p/c^2\right)U^{i}{}_{;\beta}U^{\beta} + p_{;\beta}g^{i\beta} = 0 \qquad (4.52) \Rightarrow (7.40b)$$

式（6.32）を使って，

$$U^{i}{}_{;\beta}U^{\beta} = U^{i}{}_{,\beta}U^{\beta} + U^{\sigma}\Gamma^{i}{}_{\sigma\beta}U^{\beta} = U^{\sigma}\Gamma^{i}{}_{\sigma\beta}U^{\beta}$$

$$= \frac{1}{2}g^{\alpha i}(g_{\alpha\beta,\sigma} + g_{\alpha\sigma,\beta} - g_{\beta\sigma,\alpha})U^{\sigma}U^{\beta}$$

（$\alpha = i \quad \sigma = \beta = 0$ のときゼロでない）

$$= \frac{1}{2}g^{ii}(g_{i0,0} + g_{i0,0} - g_{00,i})U^0U^0$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{00}c^2}g_{00,i}c^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln\left|g_{00}\right|\right]_{,i}$$

スカラーの共変微分はただの偏微分であるから，

$$p_{;\beta}g^{i\beta} = p_{,\beta}g^{i\beta} = p_{,i}$$

式（7.40b）は，

$$p_{,i} + \left(\rho c^2 + p\right)\left[\frac{1}{2}\ln\left(-g_{00}\right)\right]_{,i} = 0 \qquad (7.40)$$

(d)　ニュートン・ポテンシャルは別に詳しくやる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（7.10）～（7.25）

> 練習問題 6
> 　式（7.10）から式（7.25）を導け．

【ポイント】練習問題 4 から判るように式（7.10）は自由落下粒子の運動方程式つまり測地線方程式である．したがって式（7.25）も測地線方程式である．実際に式（7.25）は次式からも導出できる．

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \qquad (6.51)$$

5 章で定義した共変微分は，基底ベクトルによる共変微分であり，次式で定義される．

$$\nabla_\beta \vec{V} = \left(V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\right)\vec{e}_\alpha \qquad (5.47)$$

$$= V^\alpha{}_{;\beta}\vec{e}_\alpha \qquad (5.50)$$

成分式は，次式となる．

$$\left(\nabla_\beta \vec{V}\right)^\alpha = V^\alpha{}_{;\beta} \equiv V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \qquad (5.49)$$

接ベクトルによる，または一般化して，ベクトルによるベクトルの共変微分を次式で定義する．

$$\nabla_{\vec{W}}\vec{V} = W^\beta\nabla_\beta\vec{V}$$

$$= W^\beta\left(V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\right)\vec{e}_\alpha$$

$$= W^\beta V^\alpha{}_{;\beta}\vec{e}_\alpha \qquad \text{①}$$

成分式は，次式となる．

$$\left(\nabla_{\vec{W}}\vec{V}\right)^\alpha = W^\beta V^\alpha{}_{;\beta} = W^\beta\left(V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\right) \qquad \text{②}$$

式（7.10）から，$\vec{V} = \vec{W} = \vec{p}$ とすれば，

$$\left(\nabla_{\vec{p}}\vec{p}\right)^\alpha = p^\beta p^\alpha{}_{;\beta} = p^\beta p^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}p^\mu p^\beta = 0 \qquad (7.11')$$

ここで添字は適当に調整してある．

式（7.10）から，次式が得られる．

$$\nabla_{\vec{p}}\tilde{p} = 0 \qquad (7.10')$$

$$(\nabla_\beta\tilde{p})_\alpha \equiv (\nabla\tilde{p})_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - p_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \qquad (5.62)$$

を使って，ベクトルによる 1 形式の共変微分を次式で定義する．

$$\nabla_{\vec{W}}\tilde{V} = W^\beta\nabla_\beta\tilde{V}$$

$$= W^\beta\left(V_{\alpha,\beta} - V_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\right)\vec{e}_\alpha$$

$$= W^\beta V_{\alpha;\beta}\vec{e}_\alpha \qquad \text{③}$$

成分式は，次式となる．

$$\left(\nabla_{\vec{W}}\tilde{V}\right)^\alpha = W^\beta V_{\alpha;\beta} = W^\beta\left(V_{\alpha,\beta} - V_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\right) \qquad \text{④}$$

式（7.10'）から，$\tilde{V} = \tilde{p}, \vec{W} = \vec{p}$ とすれば，次式が得られる．

$$p^\beta p_{\alpha;\beta} = 0$$

$$p^\beta p_{\alpha,\beta} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}p^\beta p_\mu = 0$$

添字は適当に調整して，

$$p^\alpha p_{\beta;\alpha} = 0 \qquad (7.25)$$

$$p^\alpha p_{\beta,\alpha} - \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}p^\alpha p_\gamma = 0 \qquad \text{⑤}$$

測地線方程式（6.51）から式（7.11'）導出する．式（6.51）のアフィンパラメーターを固有時間とする．

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \qquad (6.51)$$

4 元速度 $U^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{d\tau}$ を使って，

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}U^\mu U^\beta = 0 \qquad \text{⑥}$$

4 元運動量 $p^\alpha = mU^\alpha$ を使って，

$$m\frac{dp^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}p^\mu p^\beta = 0 \qquad \text{⑦}$$

$$m\frac{dp^{\alpha}}{d\tau}=m\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\frac{dp^{\alpha}}{dx^{\beta}}=mU^{\beta}\frac{dp^{\alpha}}{dx^{\beta}}=p^{\beta}p^{\alpha}{}_{,\beta} \qquad ⑧$$

だから，

$$\left(\nabla_{\vec{p}}\vec{p}\right)^{\alpha}=p^{\beta}p^{\alpha}{}_{;\beta}=p^{\beta}p^{\alpha}{}_{,\beta}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}p^{\mu}p^{\beta}=0 \qquad (7.11')$$

前述により上式から式（7.25）が導出できる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（7.29）

練習問題 7

線要素によって与えられた次の四つのメトリックを考える．

(i)　$ds^2=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$

(ii)　$ds^2=-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2+\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2\right)$

ここでは M は定数である．

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2\right)$$

（幾何学単位）

(iii)　$$ds^2=-\frac{\Delta-a^2\sin^2\theta}{\rho^2}dt^2-2a\frac{2Mr\sin^2\theta}{\rho^2}dtd\phi+\frac{\left(r^2+a^2\right)^2-a^2\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\sin^2\theta\,d\phi^2+\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2+\rho^2d\theta^2$$

（幾何学単位）

ここで M と a は定数で，$\Delta=r^2-2Mr+a^2$，$\rho^2=r^2+a^2\cos^2\theta$ とする．

(iv)　$ds^2=-c^2dt^2+R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2\right)\right]$

ここで k は定数，$R(t)$ は時間 t のみに依存する関数である．

第 1 のメトリックはすでにおなじみである．その他は後の章に出てくる．それらの名前は，それぞれシュワルツシルト・メトリック，カー・メトリック，ロバートソン - ウォーカー・メトリックとよばれている．

【注記】Schwarzschild，Kerr，Robertson-Walker

(a)　おのおののメトリックに対して自由落下粒子の 4 元運動量の保存する成分 p_a をあるだけ見つけよ．

(b)　6.9 節の練習問題 28 を使って，(i)を次の形に直す．

(i')　$ds^2=-c^2dt^2+dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2\right)$

これから(ii)と(iv)が球対称であると議論せよ．このことは保存する成分 p_a の数を増やすか？

(c)　(i')と(ii)～(iv)に対して $\theta=\pi/2$ と $p^\theta=0$ すなわち赤道面に接して始まった測地線は常に $\theta=\pi/2$ と $p^\theta=0$ であることが示される．

(i')，(ii)，(iii)の場合について，方程式 $\vec{p}\cdot\vec{p}=-m^2$ を用いて，p^r を m と他の保存量と位置の既知関数で表せ．

(d)　(iv)について，対称性は，もし測地線が $p^\theta=p^\phi=0$ で始まると，これらの量はゼロのままにとどまることを意味する．このことを用いて式（7.29）から，$k=0$ のとき，p_r が保存量であることを示せ．

(a)

【ポイント】たとえば，定常的な重力場があるとする．すると，メトリックの成分が時間によらない座標系を見つけることができ，そのような系では p_0 が保存する．

同様にメトリックが軸対称なら $g_{\alpha\beta}$ が対称軸のまわりの角 φ によらないような座標系を見つけることができる．そのとき p_φ が保存される．

(ii)

$$g_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}-\alpha^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha^{-2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

$$\alpha=(1-2M/r)^{1/2}$$

(iii)

$$g_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}-1+2Mr/\rho^2 & 0 & 0 & -\omega\varpi^2\\ 0 & \rho^2/\Delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \rho^2 & 0\\ -\omega\varpi^2 & 0 & 0 & \varpi^2\end{pmatrix}$$

$$\Delta=r^2+\alpha^2-2Mr$$
$$\rho^2=r^2+\alpha^2\cos^2\theta$$
$$\Sigma^2=(r^2+\alpha^2)^2+\alpha^2\Delta\sin^2\theta$$
$$\varpi=(\Sigma/\rho)\sin\theta$$
$$\omega=2\alpha Mr/\Sigma^2$$

（問題(a)の解）

(i)は，p_0 と p_i が保存される．

(ii)，(iii)は，p_0 が保存される．

問題(b)から，(ii)，(iv)は，球対称であるから，角度によりメトリックが変化しないので，p_i が保存される．

(b)　6.9 節の練習問題 28 から，座標変換式は，

$$x=r\sin\theta\cos\phi$$
$$y=r\sin\theta\sin\phi$$
$$z=r\cos\theta$$

線要素は，

$$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

したがって，式(i)から式(i')が導ける．

(i)　$ds^2=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$

(i')　$ds^2=-c^2dt^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2)$

(c)　(i')から，

$$-m^2=(p^0)^2+(p^r)^2+r^2\left((p^\theta)^2+\sin^2\theta(p^\phi)^2\right)$$

$$-m^2=(p^0)^2+(p^r)^2+r^2(p^\phi)^2$$

$$(p^r)^2=m^2+(p^0)^2++r^2(p^\phi)^2$$

(ii)から，

$$-m^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)(p^0)^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}(p^r)^2+r^2\left((p^\theta)^2+\sin^2\theta(p^\phi)^2\right)$$

$$-m^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(p^0\right)^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(p^r\right)^2+r^2\left(p^\phi\right)^2$$

$$\left(p^r\right)^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right)m^2-\left(p^0\right)^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)r^2\left(p^\phi\right)^2$$

(iii)から，

$$-m^2=-\frac{\Delta-a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\left(p^0\right)^2-2a\frac{2Mr\sin^2\theta}{\rho^2}p^0p^\phi$$

$$+\frac{\left(r^2+a^2\right)^2-a^2\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\sin^2\theta\left(p^\phi\right)^2+\frac{\rho^2}{\Delta}\left(p^r\right)^2+\rho^2\left(p^\theta\right)^2$$

$$-m^2=-\frac{\Delta-a^2}{\rho^2}\left(p^0\right)^2-2a\frac{2Mr}{\rho^2}p^0p^\phi$$

$$+\frac{\left(r^2+a^2\right)^2-a^2\Delta}{\rho^2}\left(p^\phi\right)^2+\frac{\rho^2}{\Delta}\left(p^r\right)^2$$

$$\left(p^r\right)^2=\frac{\Delta}{\rho^2}m^2-\Delta\frac{\Delta-a^2}{\rho^4}\left(p^0\right)^2-2a\Delta\frac{2Mr}{\rho^4}p^0p^\phi$$

$$+\Delta\frac{\left(r^2+a^2\right)^2-a^2\Delta}{\rho^4}\left(p^\phi\right)^2$$

(d)　式（7.29）と(iv)から，

$$m\frac{dp_r}{d\tau}=\frac{1}{2}g_{\nu\alpha,r}p^\nu p^\alpha$$

$$=-(1)_{,r}\left(p^0\right)^2+\left(\frac{R^2(t)}{1-kr^2}\right)_{,r}\left(p^r\right)^2$$

$$+\left(R^2(t)r^2\right)_{,r}\left(p^\theta\right)^2+\left(R^2(t)r^2\sin^2\theta\right)_{,r}\left(p^\phi\right)^2$$

$$=0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（7.41）～（7.43）

練習問題 8

ある座標系でメトリックの成分 $g_{\alpha\beta}$ がある座標 x^μ に依存しないとする．

(a)　任意のストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）に対して保存則 $T^\nu{}_{\mu;\nu}=0$ が次式となることを示せ．

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}T^\nu{}_\mu\right)_{,\nu}=0 \tag{7.41}$$

(b)　この座標系で各空間的超平面 $x^0=\text{Const.}$ のある有限領域だけ $T^{\mu\beta}\neq 0$ だとする．このとき式（7.41）が次のことを意味することを示せ． n_ν を超平面の単位垂直とすると，次の量は x^0 によらない．

$$\int_{x^0=\text{const.}}T^\nu{}_\mu\sqrt{-g}\,n_\nu d^3x$$

これは式（7.29）の後で述べた保存則の連続体への一般化である．

7.4　保存量を参照のこと．

(c)　球面極座標 (ct, r, θ, ϕ) をもつ大域的慣性系で平坦なミンコフスキー空間を考える．(b)から次の量が t によらないことを示せ．

$$J=\int_{t=\text{const.}}T^0{}_\phi r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \tag{7.42}$$

これは系の全角運動量である．

(d)　(c)の積分をデカルト座標 (ct, x, y, z) での $T^{\alpha\beta}$ の成分で表し，次の形になることを示せ．

$$J=\int\left(xT^{y0}-yT^{x0}\right)dxdydz \tag{7.43}$$

これは z 軸まわりの粒子の角運動量に対する非相対論的表現 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_z$ の連続体版である．

(a)

$$\nabla_\beta B^\mu{}_\nu=B^\mu{}_{\nu,\beta}+B^\alpha{}_\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}-B^\mu{}_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} \tag{5.66}$$

を使って，（添字を適当に書き換えて）

$$\left(T^{\nu}{}_{\mu}\right)_{;\nu}=T^{\nu}{}_{\mu,\nu}+T^{\alpha}{}_{\mu}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\nu}-T^{\nu}{}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$$

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\sqrt{-g} \tag{6.40}$$

を使って，（ダミーを書き換えて）

$$\left(T^{\nu}{}_{\mu}\right)_{;\nu}=\frac{\partial T^{\nu}{}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{T^{\nu}{}_{\mu}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\sqrt{-g}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}T^{\nu}{}_{\mu}\right)$$

(b)　ガウスの発散定理

◆ $$\int V^{\alpha}{}_{,\alpha}d^4x=\oint V^{\alpha}n_{\alpha}d^3s \tag{4.57}$$

または，

$$\int\left(\sqrt{-g}V^{\alpha}\right)_{,\alpha}d^4x=\oint V^{\alpha}n_{\alpha}\sqrt{-g}d^3S \tag{6.44}$$

を応用すると，

$$\int\left(\sqrt{-g}T^{\nu}{}_{\mu}\right)_{,\nu}d^4x=\oint\sqrt{-g}T^{\nu}{}_{\mu}n_{\nu}d^3x$$

ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）の発散がゼロであるとは，局所的なエネルギー・運動量保存則と同義である．

(c)　球面極座標 (ct,r,θ,ϕ) でのミンコフスキー・メトリックは，

$$\left(g_{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&r^2&0\\0&0&0&r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

だから，トレースは，

$$g=r^4\sin^2\theta$$

したがって，ガウスの発散定理を応用して，

$$J=\int_{t=\text{const.}}T^{0}{}_{\phi}r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi=\int\left(\sqrt{-g}T^{0}{}_{\mu}\right)_{,0}d^4x$$

(d)　座標変換式は，

$$x=r\sin\theta\cos\phi$$

$$y=r\sin\theta\sin\phi$$

$$z=r\cos\theta$$

？？？

式（7.43）の被積分項は角運動量密度であり，全角運動量 J が t によらないことを，場の方程式の帰結として与える．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（7.44）

練習問題 9

(a)　式（7.8）のメトリックに対するリーマン・テンソルの成分 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ を ϕ の１次まで求めよ．

(b)　測地線偏移の方程式（6.87）が（ϕ と速度の最低次で）次式になることを示せ．

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -\phi_{,ij}\xi^i \tag{7.44}$$

(c)　測地線がニュートン的な重力場の中の近傍の二点での静止状態から始まった自由粒子の世界線とするとき，(b)の方程式を解釈せよ．

◆

$$\nabla_V \nabla_V \xi^\alpha = R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} V^\mu V^\nu \xi^\beta \tag{6.87}$$

(a)

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) \tag{6.68}$$

を使って，

$$R_{0i0j} = \frac{1}{2}\left(g_{0j,io} - g_{00,ij} + g_{i0,0j} - g_{ij,00}\right)$$

$$= \phi_{,ij}/c^2 + \delta_{ij}\phi_{,00}/c^2$$

$$R_{0ijk} = \frac{1}{2}\left(g_{0k,ij} - g_{0j,ik} + g_{ij,0k} - g_{ik,0j}\right)$$

$$= -\delta_{ij}\phi_{,0k}/c^2 + \delta_{ik}\phi_{,0j}/c^2$$

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(g_{il,jk} - g_{ik,jl} + g_{jk,il} - g_{jl,ik}\right)$$

$$= -\delta_{il}\phi_{,jk}/c^2 + \delta_{ik}\phi_{,jl}/c^2 - \delta_{jk}\phi_{,il}/c^2 + \delta_{jl}\phi_{,ik}/c^2$$

(b)　測地線偏移の方程式（6.87）は，6.9 練習問題 22 で導出した．

重力しかない場で自由粒子は，時間的またなヌル測地線に沿って行く．弱い場（$|\phi|/c^2 \ll 1$）では，ニュートンの法則

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{p}/dt = -m\nabla\phi$$

と等価である．

ニュートン物理での ξ^j だけ離れている近接した粒子の加速度は次式である．

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x})}{\partial x^i},\quad \frac{d^2(x^i+\xi^i)}{dt^2} = -\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})}{\partial x^i}$$

その差は次式となる．

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = \frac{\partial\phi(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} - \frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})}{\partial x^i}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\right)$$

$$\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi}) - \phi(\boldsymbol{x}) = \xi^j \frac{\partial\phi}{\partial x^j}$$

を使って，近接した粒子間の加速度の差は，

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}\xi^i = -\phi_{,ij}\xi^i \tag{7.44}$$

上式は，測地線偏移の方程式

◆

$$\nabla_V \nabla_V \xi^\alpha = R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} V^\mu V^\nu \xi^\beta \tag{6.87}$$

と明らかに同じである．

(c)　真空では，$\nabla^2\phi = 0$ だから，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j} = 0$$

したがって，

$$R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} V^\mu V^\nu = 0$$

$\vec{V}$ は任意であるから，次式が結論となる．

$$R_{\mu\nu} = 0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（7.45）

練習問題 10

(a)　もしベクトル場 ξ^α がキリング方程式

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0 \qquad (7.45)$$

を満たすならば，測地線に沿って $p^\alpha \xi_\alpha = \text{Const.}$ であることを示せ．これは式（7.29）から導いた保存則の座標不変な表現である．メトリックがキリング場を許すかどうかだけを知ればよい．

(b)　ミンコフスキー時空の 10 個のキリング場を見つけよ．

(c)　$\vec{\xi}$ と $\vec{\eta}$ がキリング場なら，定数の α, β に対して $\alpha\vec{\xi} + \beta\vec{\eta}$ もそうなることを示せ．

(d)　(b)のキリング場のローレンツ変換は単に(c)におけるような線形結合をつくることを示せ．

(e)　練習問題 7(a)の結果から，メトリック(ii)〜(iv)のキリング場を見つけよ．

◆

$$m\frac{dp_\beta}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} p^\nu p^\alpha \qquad (7.29)$$

【reference】

冨田　憲二「相対性理論」丸善

http://members3.jcom.home.ne.jp/nososnd/grel/kil.pdf

【参考】キリング方程式（7.45）を導出する．

6.9 練習問題 39 のリー微分を応用する．

(0,2)テンソル $A_{\lambda\sigma}$ のリー微分は，

$$L_{\vec{\xi}} A_{\lambda\sigma} = -\xi^\alpha{}_{;\lambda} A_{\alpha\sigma} - \xi^\alpha{}_{;\sigma} A_{\lambda\alpha} - A_{\lambda\sigma;\varsigma}\xi^\varsigma$$

メトリックテンソル $g_{\lambda\sigma}$ のリー微分は，$g_{\lambda\sigma;\varsigma} = 0$ だから，

$$\begin{aligned} L_{\vec{\xi}} g_{\lambda\sigma} &= -\xi^\alpha{}_{;\lambda} g_{\alpha\sigma} - \xi^\alpha{}_{;\sigma} g_{\lambda\alpha} \\ &= -\left(\xi_{\sigma;\lambda} + \xi_{\lambda;\sigma}\right) \end{aligned}$$

このメトリックテンソルのリー微分は，ξ^μ 方向の変位によるテンソルの関数形の変化率を表す．もし，ξ^μ 方向の変位に対して，メトリックテンソルの関数形の変らなければ，（添字を適当に書き換えて）

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = \xi_{\beta;\alpha} + \xi_{\alpha;\beta} = 0 \qquad (7.45)$$

(a)

(b)　ローレンツ基底では次のベクトル場がキリング場である．

$\vec{e}_t, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, x\vec{e}_y - y\vec{e}_x, y\vec{e}_z - z\vec{e}_y, z\vec{e}_x - x\vec{e}_z, t\vec{e}_x + x\vec{e}_t, t\vec{e}_y + y\vec{e}_t, t\vec{e}_z + z\vec{e}_t$,

式（7.45）の解の任意の定数係数の線形結合はまた式（7.45）の解だから，他のローレンツ系での同様のキリング場は上から得られる．

(c)　式（7.45）から，

$$\left(\alpha\xi_\mu + \beta\eta_\mu\right)_{;\nu} + \left(\alpha\xi_\nu + \beta\eta_\nu\right)_{;\mu} = \alpha\left(\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}\right) + \beta\left(\eta_{\mu;\nu} + \eta_{\nu;\mu}\right) = 0$$

(d)

(e)

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋