5　曲率の導入

重力と曲率，極座標のテンソル代数・テンソル解析，クリストッフェル記号

5.1　重力と曲率の関係　（5.1）～（5.2）

重力赤方偏移の実験　（5.1）

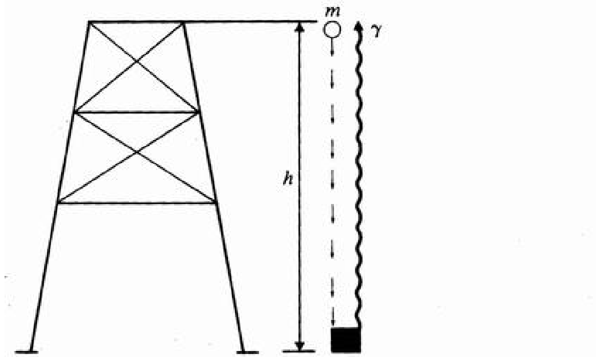


図 5.1　質量 m が高さ h の塔から落とされる．一番下での全質量はエネルギーに変えられ，光子として頂上へ戻される．光子がさかのぼるとき，落下するさいに質量が得たエネルギーを失わなければ永久運動となる．したがって重力場をさかのぼるさいに光は赤方偏移する．

◆
$$\frac{E'}{E}=\frac{h\nu'}{h\nu}=\frac{mc^2}{mc^2+mgh+\mathrm{O}(v^4)}=1-\frac{gh}{c^2}+\mathrm{O}(v^4) \qquad (5.1)$$

練習問題 1　（5.1）～（5.2）

地上で静止したローレンツ系が存在しないこと　()

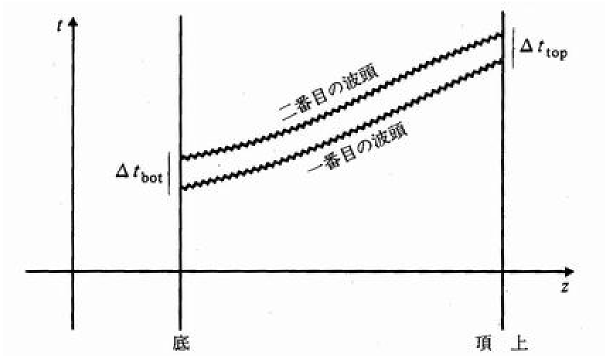


図 5.2　時間的に変化しない重力場では，電磁波の引き続く二つの“波頭”は同一の経路を運動しなければならない．赤方偏移［式(5.1)］のため，頂上でのそれらの間の時間間隔は，底での間隔よりも長くなる．したがって頂上での観測者は，底にある時計がゆっくり進むように“見る”．

等価原理　()

再び赤方偏移の実験　　　　（5.2）

$$\frac{\nu(\text{自由落下系})}{\nu'(\text{頂上での装置})} \cong 1 + \frac{gh}{c^2} \tag{5.2}$$

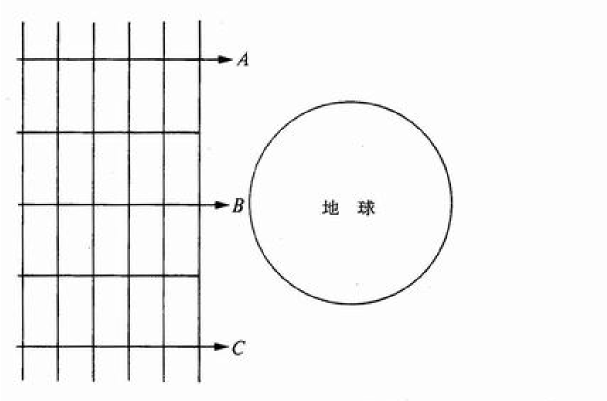


図 5.3　剛体的な系は地球の場の中では剛体的なままでは自由落下できない．

局所慣性系　　　　()

潮汐力　　　　()

練習問題 2　　　()

曲率の役割　　　　()

5.2　極座標でのテンソル代数　　　（5.3）～（5.35）

ベクトルと１形式　　　（5.7）～（5.15）

【表記法】シュッツ著では一般座標 $\{\xi, \eta\}$ を使っているが，本書では極座標 $\{r, \theta\}$ で統一している．一般式は $\{r, \theta\}$ を $\{\xi, \eta\}$ に置き換えるだけでよい．

ユークリッド平面のデカルト座標 $\{x, y\}$ と極座標 $\{r, \theta\}$

ベクトルの成分の座標変換は,

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad x = r\cos\theta \tag{5.3}$$

$$\theta = \arctan(y/x), \quad y = r\sin\theta$$

小さな増分の変換

$$\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ -\dfrac{y}{r^2} & \dfrac{x}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{1}{r}\sin\theta & \dfrac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

ヤコビアン

$$\det\begin{pmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y \\ \partial\theta/\partial x & \partial\theta/\partial y \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5.6}$$

$$\det\begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5.6}$$

ヤコビアンが一点で 0 になるなら，変換はそこで特異であるという．

式（5.5）の繰り返しになるが,

$$\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = \left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

$$\Delta x^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} \Delta x^{\beta}, \quad \Delta x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} \Delta x^{\beta}, \quad \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}\right) = \left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}$$

(5.8)

ベクトルの成分の座標逆変換は,

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta \tag{5.3}$$

$$\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta\\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta r\\ \Delta\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = \left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right)\begin{pmatrix}\Delta r\\ \Delta\theta\end{pmatrix}$$

$$\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right) = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x/r & -y\\ y/r & x\end{pmatrix}$$

(5.13)

ベクトルの成分の座標変換は,

$$V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}V^{\beta} \tag{5.9}$$

１形式の定義

$$\tilde{d}\phi \to \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \tag{5.10}$$

偏微分の規則

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial y},\quad \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{5.11}$$

１形式の成分の座標変換は,

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial r} & \dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix} \tag{5.12}$$

$$\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right) = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix} \tag{5.13}$$

$$\left(\tilde{d}\phi\right)_{\beta'} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\left(\tilde{d}\phi\right)_{\alpha} \tag{5.14}$$

$$\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right)\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right) =$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial x} & \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\theta} + \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial\theta}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\theta} + \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix} \tag{5.15}$$

合成関数の微分の規則と偏微分の定義から,

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial r} & \dfrac{\partial r}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial r} & \dfrac{\partial\theta}{\partial\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{5.16}$$

ゆえに

$$\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right)^{-1} = \left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right)^{T}$$

【ポイント】ベクトル成分の逆変換行列$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}$は変換行列$\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}$の逆行列である.それは,変換行列$\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}$の偏微分の分母と分子を入れ換えた行列の転置行列である.また,特殊相対論のローレンツ変換の変換行列も本来同じ意味である.2.9 練習問題 11 を参照.

練習問題 3　　(5.6)
練習問題 7　　(5.3) ～ (5.15)
練習問題 8　　(5.7) ～ (5.13)

曲線とベクトル　　　　　　　　　　　　（5.17）～（5.20）

◆　曲線：$\{\xi = f(s), \eta = g(s), a \le s \le b\}$　　　　　　（5.17）

$$\{\xi = f'(s'), \eta = g'(s'), a' \le s' \le b'\} \tag{5.18}$$

$$\phi = \phi(\xi(s), \eta(s))$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \left\langle \tilde{d}\phi, \vec{V} \right\rangle \tag{5.19}$$

where $\vec{V} \to \left(\frac{d\xi}{ds}, \frac{d\eta}{ds}\right)$,　$\tilde{d}\phi \to \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}, \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)$

$$\begin{pmatrix} d\xi/ds \\ d\eta/ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx/ds \\ dy/ds \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

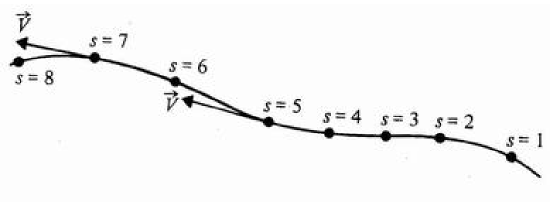


図 5.4　曲線とそのパラメーターとその接ベクトル

練習問題 4　　　（5.18）

練習問題 5　　　()

極座標基底１形式と極座標基底ベクトル　　　（5.21）～（5.27）

基底ベクトルの座標変換は,

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial y/\partial r \\ \partial x/\partial\theta & \partial y/\partial\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} = \left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right) \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix}$$

（5.21）（5.23）

基底１形式の座標変換は,

$$\begin{pmatrix} \tilde{d}r \\ \tilde{d}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y \\ \partial\theta/\partial x & \partial\theta/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}x \\ \tilde{d}y \end{pmatrix} = \left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right) \begin{pmatrix} \tilde{d}x \\ \tilde{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}x \\ \tilde{d}y \end{pmatrix}$$

（5.26）（5.27）

基底が単位基底でないことを示す.

$$\left|\vec{e}_\theta\right|^2 = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$$

$$\left|\vec{e}_r\right|^2 = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\left|\tilde{d}r\right|^2 = \tilde{d}r \cdot \tilde{d}r = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\left|\tilde{d}\theta\right|^2 = \tilde{d}\theta \cdot \tilde{d}\theta = \frac{1}{r^2}\sin^2\theta + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta = \frac{1}{r^2}$$

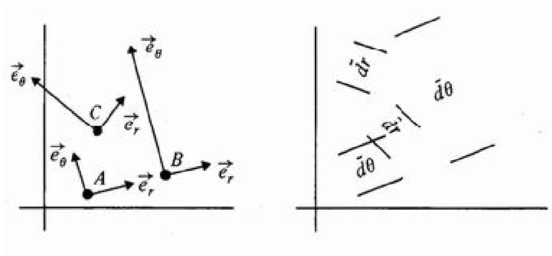


図 5.5　極座標に対する基底ベクトルと基底一形式

練習問題 6　　　()

メトリックテンソル

$$\boldsymbol{g}\left(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta\right) = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{（デカルト座標）} \tag{5.29}$$

$$g_{\alpha'\beta'} = \boldsymbol{g}\left(\vec{e}_{\alpha'}, \vec{e}_{\beta'}\right) = \vec{e}_{\alpha'} \cdot \vec{e}_{\beta'} \tag{5.30}$$

$$g_{rr} = 1,\quad g_{\theta\theta} = r^2,\quad g_{r\theta} = 0 \tag{5.31}$$

$$\left(g_{\alpha\beta}\right)_{\text{polar}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \tag{5.32}$$

線要素

◆ $$\vec{dl}\cdot\vec{dl} = ds^2 = \left|dr\vec{e}_r + d\theta\vec{e}_\theta\right|^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \qquad (5.33)$$

$$\boldsymbol{g} = g_{\alpha\beta}\tilde{d}x^\alpha \otimes \tilde{d}x^\beta = \tilde{d}r \otimes \tilde{d}r + r^2\tilde{d}\theta \otimes \tilde{d}\theta$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix} \qquad (5.34)$$

$$\left(\vec{d}\phi\right)^\alpha = g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta} \qquad (5.35)$$

$$\left(\vec{d}\phi\right)^r = g^{r\beta}\phi_{,\beta} = g^{rr}\phi_{,r} + g^{r\theta}\phi_{,\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$\left(\vec{d}\phi\right)^\theta = g^{\theta\beta}\phi_{,\beta} = g^{\theta r}\phi_{,r} + g^{\theta\theta}\phi_{,\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \qquad (5.36)$$

5.3　極座標におけるテンソル解析　（5.35）～（5.67）

基底ベクトルの微分　（5.36）～（5.37）

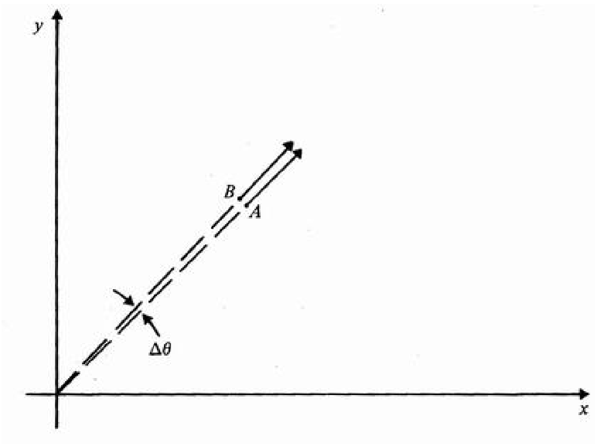


図5.6　θ が $\Delta\theta$ だけ変化したときの $\vec{e}_r$ の変化

$$\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y) = 0 = \Gamma^\mu{}_{rr}\vec{e}_\mu \qquad (5.37a)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_r = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta = \Gamma^\mu{}_{r\theta}\vec{e}_\mu \qquad (5.37b)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta = \Gamma^\mu{}_{\theta r}\vec{e}_\mu \qquad (5.38a)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta = -r\cos\theta\,\vec{e}_x + r\sin\theta\,\vec{e}_y = -r\,\vec{e}_r = \Gamma^\mu{}_{\theta\theta}\vec{e}_\mu \qquad (5.38b)$$

練習問題 9　　（5.36）～（5.37）

一般のベクトルの微分　（5.39）～（5.43）

クリストッフェル記号　（5.44）～（5.45）

クリストッフェル記号導入式

$$\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\vec{e}_\mu \qquad (5.45)$$

（5.37）～（5.38）から,

クリストッフェル記号の極座標での値

$$\Gamma^\mu{}_{rr} = \Gamma^r{}_{r\theta} = \Gamma^r{}_{\theta r} = \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = 0\,,\quad \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta r} = \frac{1}{r}\,,\quad \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r \qquad (5.45)$$

共変微分　（5.46）～（5.53）

$\vec{V}$ の共変微分は,

$$\nabla_\beta\vec{V} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta}(V^\alpha\vec{e}_\alpha) = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}\vec{e}_\alpha + V^\alpha\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \qquad (5.43)$$

$$= V^\alpha{}_{,\beta}\vec{e}_\alpha + V^\alpha\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\vec{e}_\mu$$

$$= V^\alpha{}_{,\beta}\vec{e}_\alpha + V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\vec{e}_\alpha \qquad (5.46)\quad(5.47)$$

$$= \left(V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\right)\vec{e}_\alpha \qquad (5.48)\quad(5.49)$$

$$= V^\alpha{}_{;\beta}\vec{e}_\alpha \qquad (5.51)$$

共変微分の定義式

◆ $$\nabla_\beta\vec{V} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\beta} = V^\alpha{}_{;\beta}\vec{e}_\alpha \qquad (5.51)$$

◆ $$V^\alpha{}_{;\beta} \equiv V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \qquad (5.48)$$

$$\nabla\vec{V} = V^{\alpha}{}_{;\beta}\vec{e}_{\alpha} \otimes \tilde{\omega}^{\beta} \qquad (5.51b)$$

ベクトルの共変微分の成分

$$(\nabla\vec{V})^{\alpha}{}_{\beta} = (\nabla_{\beta}\vec{V})^{\alpha} = V^{\alpha}{}_{;\beta} \equiv V^{\alpha}{}_{,\beta} + V^{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} \qquad (5.52)$$

$\nabla\vec{V}$ は，ベクトル場 $\vec{e}_{\beta}$ をベクトル $\partial\vec{V}/\partial x^{\beta}$ に写像する（1,1）テンソルである．

スカラーは，基底ベクトルに依存しないから，スカラーの共変微分は，勾配であり，クリストッフェル記号は現れず，偏微分だけ現れる．

$$\nabla_{\alpha} f = \partial_{\alpha} f = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} = f_{,\alpha}, \quad \nabla f = \tilde{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}\tilde{d}x^{\alpha} = f_{,\alpha}\tilde{d}x^{\alpha} \qquad (5.52)$$

練習問題 10　　　(5.52)

練習問題 17　　　(5.44)　(5.50)

発散とラプラシアン　　　(5.54) ～ (5.58)

極座標での発散の定義式

$$V^{\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{\partial V^{r}}{\partial r} + \frac{\partial V^{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}V^{r}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV^{r}) + \frac{\partial}{\partial \theta}V^{\theta} \qquad (5.56)$$

$$\nabla\cdot\nabla\phi \equiv \nabla^{2}\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}\phi}{\partial\theta^{2}} \qquad (5.57)$$

$$\nabla^{2}\phi = \frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}\phi}{\partial y^{2}} \qquad (5.58)$$

練習問題 11　　　(5.50) ～ (5.56)

１形式と高階のテンソル微分　　　(5.58) ～ (5.67)

１形式の共変微分を求めるために，スカラーが１形式とベクトルの縮約であるという性質を利用する．積の微分の規則と (5.49) を使って，

$$\phi = p_{\alpha}V^{\alpha} \qquad (5.59)$$

$$\nabla_{\beta}\phi = \phi_{,\beta} = \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}V^{\alpha} + p_{\alpha}\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \qquad (5.60)$$

$$\nabla_{\beta}\phi = \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}V^{\alpha} + p_{\alpha}V^{\alpha}{}_{;\beta} - p_{\alpha}V^{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} \qquad (5.61)$$

$$\nabla_{\beta}\phi = \left(\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - p_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\right)V^{\alpha} + p_{\alpha}V^{\alpha}{}_{;\beta} \qquad (5.62)$$

１形式の共変微分の定義式

◆ $$(\nabla_{\beta}\tilde{p})_{\alpha} \equiv (\nabla\tilde{p})_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - p_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \qquad (5.63)$$

$$\nabla_{\beta}\tilde{p} = \frac{\partial\tilde{p}}{\partial x^{\beta}} = p_{\alpha;\beta}\tilde{\omega}^{\alpha} \qquad (5.63b)$$

$$\nabla\tilde{p} = p_{\alpha;\beta}\tilde{\omega}^{\alpha} \otimes \tilde{\omega}^{\beta} \qquad (5.63c)$$

式 (5.61) を書き換えて，

スカラーの共変微分の定義式

◆ $$\nabla_{\beta}(p_{\alpha}V^{\alpha}) = p_{\alpha;\beta}V^{\alpha} + p_{\alpha}V^{\alpha}{}_{;\beta} \qquad (5.64)$$

(0,2)，(2,0)，(1,1)テンソルの共変微分の定義式

◆ $$\nabla_{\beta}T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} - T_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} \qquad (5.65)$$

◆ $$\nabla_{\beta}A^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}{}_{,\beta} + A^{\alpha\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + A^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} \qquad (5.66)$$

◆ $$\nabla_{\beta}B^{\mu}{}_{\nu} = B^{\mu}{}_{\nu,\beta} + B^{\alpha}{}_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - B^{\mu}{}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} \qquad (5.67)$$

$\nabla_{\beta}T_{\mu\nu}$ は ∇T の成分，$\nabla_{\beta}A^{\mu\nu}$ は ∇A の成分，$\nabla_{\beta}B^{\mu}{}_{\nu}$ は ∇B の成分である．

練習問題 12　　　(5.62)

練習問題 13　　　()

練習問題 14　　　(5.65)

練習問題 15　　　(5.66)

5.4　クリストッフェル記号とメトリック　　　(5.68) ～ (5.76)

$\vec{V}$ を任意のベクトルとして，それに付随する１形式

$$\tilde{V} = \boldsymbol{g}(\vec{V},\ \ )$$

$$\nabla_{\beta}\tilde{V} = \boldsymbol{g}(\nabla_{\beta}\vec{V},\ \ ) \qquad (5.68)$$

次式が成り立つ．（上式の成分表示）

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^{\mu}{}_{;\beta} \tag{5.69}$$

線形性から，

$$V_{\alpha;\beta} = \left(g_{\alpha\mu} V^{\mu}\right)_{;\beta} = g_{\alpha\mu;\beta} V^{\mu} + g_{\alpha\mu} V^{\mu}{}_{;\beta}$$

比べて，$g_{\alpha\mu;\beta} V^{\mu} = 0$ が任意の $\vec{V}$ で成り立っているから，

$$g_{\alpha\mu;\beta} = 0 \tag{5.72}$$

すべての座標系でメトリックの共変微分は 0 である．

練習問題 20　（5.74）～（5.75）
練習問題 21　（5.96）
練習問題 22　（5.68）

メトリックからのクリストッフェル記号の計算　（5.74）～（5.76）

$$\phi_{,\beta;\alpha} = \phi_{,\alpha;\beta} \tag{5.74}$$

練習問題 16　（5.74）～（5.75）

$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ のテンソル性　()

5.5　非座標基底　（5.77）～（5.96）

極座標基底　()

極単位基底　（5.77）～（5.88）

練習問題 18　（5.78）
練習問題 19　（5.81）～（5.84）

非座標基底に関する一般的注意　（5.89）～（5.96）

節の中で使われている公式と問題

5.1　重力と曲率の関係　（5.1）～（5.2）

重力赤方偏移の実験　（5.1）

練習問題 1

地上で静止したローレンツ系が存在しないこと　()

等価原理　()

再び赤方偏移の実験　（5.2）

局所慣性系　()

潮汐力　()

練習問題 2

曲率の役割　()

5.2　極座標でのテンソル代数　（5.3）～（5.36）

練習問題 3

ベクトルと１形式　（5.7）～（5.15）

練習問題 7，8

曲線とベクトル　（5.16）～（5.19）

練習問題 4，5

極座標基底１形式と極座標基底ベクトル　（5.20）～（5.27）

練習問題 6

メトリックとテンソル　（5.28）～（5.36）

5.3　極座標におけるテンソル解析　（5.37）～（5.67）

基底ベクトルの微分　（5.37）～（5.38）

練習問題 9

一般のベクトルの微分　（5.39）～（5.43）

（5.1）～（5.2）

練習問題 1
　より現実的な仮定のもとに式（5.1）を導いた議論をくり返せ．底で質点の運動エネルギーの一部 ε が光子に変換され，上方に打ち上げられ，残りのエネルギーは有用な形態で底にとどまる．仮に式（5.1）が破れたとして，永久機関を考えだせ．

【ポイント】式（5.1）は，模式的に導出したものであり，一般相対性理論を使った厳密な導出法は別にやる． $\mathrm{O}(v^4)$ はランダウの記号で，誤差項を表す．ラテンアルファベットのオーを用いる．ローマ字のオーを用いるのも多い．
【準備】テーラー展開を使ったべき級数展開は次式である．

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots,\quad (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^4+\cdots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots,\quad (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{8}\beta^4+\cdots$$

塔の頂上から静止質量 m の粒子を自由落下させると，地面では速度 $v=\sqrt{2gh}$ となる．ここで観測される総エネルギーは，

$$E=mc^2\gamma=mc^2(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}=mc^2+\frac{1}{2}mv^2+\frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2}+\cdots$$

$\frac{1}{2}mv^2=mgh$ だから，

$$E\cong mc^2+\frac{1}{2}mv^2+\mathrm{O}(v^4)=mc^2+mgh+\mathrm{O}(v^4)$$

$$\text{where}\quad 1>>\beta^2>>\beta^4>>\cdots,\quad mc^2>>\frac{1}{2}mv^2=mgh>>\mathrm{O}(v^4)$$

このエネルギーを持ったままマジカルな方法で光子に変換され，真上に打ち上げられる．塔の頂上に戻ったとき，エネルギーは重力によって失い，エネルギー保存則により最初のエネルギーと同じになる．

$$E'=mc^2$$

それを比較すると，

$$\frac{E'}{E}=\frac{mc^2}{mc^2+mgh+\mathrm{O}(v^4)}=\left(1+\frac{gh}{c^2}+\frac{\mathrm{O}(v^4)}{mc^2}\right)^{-1}\cong 1-\frac{gh}{c^2} \quad (5.1)$$

これは前出の近似式を使った結果である．近似式を使わない場合，

$$\frac{E'}{E}=\frac{mc^2}{mc^2\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}}=\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{8}\beta^4+\cdots$$

地上到達速度は，$\beta^2=\frac{v^2}{c^2}=\frac{2gh}{c^2}$ だから，

$$\frac{E'}{E}=1-\frac{gh}{c^2}-\frac{1}{2}\frac{g^2h^2}{c^4}+\cdots\cong 1-\frac{gh}{c^2} \quad (5.1)$$

光子どうしで比較すると，$E=h\nu$，$E'=h\nu'$ だから次の赤方偏移の式を得る．

$$\frac{\nu'}{\nu}\cong 1-\frac{gh}{c^2}$$

$$Z_g=\frac{\nu-\nu'}{\nu}=1-\frac{\nu'}{\nu}\cong\frac{gh}{c^2}$$

塔の頂上に戻ってきた光子のエネルギーが重力によるロスがないと仮定すると，元のエネルギーより大きいことになる．つまり，落下時に獲得した重力ポテンシャル分の運動エネルギーだけ増えていく．

光子を往復させると，この仮定から永久機関が成り立ってしまう．したがって，この仮定は否定される．つまり，エネルギー保存則により，落下時に獲得した重力ポテンシャルエネルギー分だけ上昇時に失うことになる．

本来，光子の静止質量は 0 であり，速度は常に光速なので，マジカルといえども任意の静止質量と任意の速度の仮定は成り立たないが，重力ポテンシャル分のエネルギーがロスしていく，つまり，周波数が低くなり波長が長くなるのは，実験と矛盾しない事実である．

次に，自由落下系では赤方偏移が起こらないことを示す．

光子が地上から発射されたときに静止していて，その後に自由落下する系を考える．光子は距離 h を登るから，頂上につくまでに時間 $\Delta t=h/c$ を要する．この時間に自由落下系は実験装置に対して下向きに速度 gh/c を得る．

赤方偏移の公式（2.9 練習問題 25）は，

$$\frac{\nu'}{\nu}=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

したがって，自由落下系が観測する光子の振動数と塔の頂上で観測するそれとを比較すると，

$$\frac{\nu(\text{自由落下系})}{\nu'(\text{頂上での装置})}=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}=\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cong 1+\beta$$

自由落下系の速度は，$\beta=v/c=gh/c^2$ であるから，

$$\frac{\nu(\text{自由落下系})}{\nu'(\text{頂上での装置})}\cong 1+\frac{gh}{c^2} \quad (5.2)$$

式（5.1）と比較して，高次を無視すると，

$$\nu(\text{地上で発射された光子})=\nu(\text{自由落下系で頂上についた光子})$$

これから，自由落下系では赤方偏移が起きないと言える．これは自由落下系が慣性系である証拠である．

【注意】上の導出法は模式的であり，重力による赤方偏移と自由落下による青方偏移が塔の頂上で打ち消しあうような印象をあたえがちであるが，自由落下系はいつでも重力による赤方偏移が起きない慣性系である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（）

練習問題 2

一様な重力場はなぜ地球上で潮の満干を引き起こさないかを説明せよ．

満潮とは海面が上昇することをいう．重力場が一様ならば，すべてが自由落下して，下向き以外の力は現れないので，潮の満干は起きないはずである．これは事実と異なる．実際には，月と太陽の重力の影響で，自由落下以外の力が現れ，潮の満干を引き起こす．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.6）

練習問題 3

(a)　座標変換 $(x,y)\to(\xi,\eta),\ \xi=x,\ \eta=1$ が式（5.6）を満たさないことを示せ．

(b)　次の座標変換は良いふるまいをするか？ヤコビアンを計算し，変換が特異になるすべての点を求めよ．

(i)　$\xi=(x^2+y^2)^{1/2}$，$\eta=\arctan(y/x)$

(ii)　$\xi=\ln x$，$\eta=y$

(iii)　$\xi=\arctan(y/x)$，$\eta=(x^2+y^2)^{-1/2}$

ヤコビアン

$$\det\begin{pmatrix}\partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y\\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y\end{pmatrix}\neq 0 \tag{5.6}$$

【ポイント】座標変換先が質のよい座標であるためには，元の任意の二つの違った点が座標変換先でも違った点に対応させせられる必要がある．これは，座標変換式の変換行列の行列式（ヤコビアン）がゼロでなければよい．

(a)　$\dfrac{\partial\xi}{\partial x}=1$，$\dfrac{\partial\xi}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial\eta}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial\eta}{\partial y}=0$

$$\det\begin{pmatrix}\partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y\\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

(b) (i)　これは極座標である．

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}x,\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}y$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\det\begin{pmatrix}\partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y\\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

原点 $x=y=0$ 以外では質の良い座標系である．すなわち，(x,y) を (ξ,η) へと一対一で写像する．

(ii)

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{1}{x},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=1$$

$$\det\begin{pmatrix}\partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y\\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{x} & 0\\ 0 & y\end{vmatrix}=\frac{y}{x}$$

$x<0$ で定義されず，$x=0$ で発散し，それ以外では質の良い座標系である．すなわち (x,y) の右半分を (ξ,η) の全平面に写像する．

(iii)　　これは単位円の内と外の入換えである．

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=-(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}x,\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=-(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}y$$

$$\det\begin{pmatrix}\partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y\\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\\ \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{vmatrix}=\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

原点 $x=y=0$ と無限遠以外では質の良い座標系である．すなわち一対一で対応する．

＋＋＋

（5.18）

> 練習問題 4
> $\{x=f(\lambda),\ y=g(\lambda),\ 0\le\lambda\le 1\}$ によって定義される曲線がある．接ベクトル $(dx/d\lambda,\ dy/d\lambda)$ が実際にこの曲線に接することを示せ．

【ポイント】この問題は，

3　特殊相対論におけるテンソル解析

3.3　(0, 1) テンソル：１形式

関数の微分は１形式である

の繰り返しである．

ここでは，２次元 (x,y) 座標空間を考える．x, y はパラメーター λ の関数とすると，x, y がつくる曲線は，λ がつくる１次元実数軸から２次元曲線経路への写像である．

スカラー場 ϕ を次式とする．

$$\phi=\phi(x(\lambda),\ y(\lambda))$$

接ベクトルは次式である．

$$\frac{d}{d\lambda}=\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{dy}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{dx}{d\lambda}\vec{e}_x+\frac{dy}{d\lambda}\vec{e}_y$$

where $dx/d\lambda$，$dy/d\lambda$ は接ベクトルの成分

$\partial/\partial x=\vec{e}_x$，$\partial/\partial y=\vec{e}_y$ は基底ベクトル

接１形式（勾配）は次式である．

$$\tilde{d}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\tilde{d}x^i=\frac{\partial\phi}{\partial x}\tilde{d}x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\tilde{d}y=\frac{\partial\phi}{\partial x}\tilde{\omega}^x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\tilde{\omega}^y$$

where $\partial\phi/\partial x$，$\partial\phi/\partial y$ は接１形式の成分

$\tilde{d}x=\tilde{\omega}^x$，$\tilde{d}y=\tilde{\omega}^y$ は基底１形式

スカラー場 ϕ の曲線に沿っての微分（スカラー場 ϕ の λ 方向の微分）は，接ベクトルと接１形式の縮約である．

$$\frac{d\phi}{d\lambda}=\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}=\frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{dy}{d\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial y}=\left\langle\tilde{d}\phi,\ \frac{d}{d\lambda}\right\rangle \qquad (5.18)$$

接ベクトル $d/d\lambda$ と接 1 形式 $\tilde{d}\phi$ はスカラー場 ϕ をつくるお互いに関数の関係にある．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 5

次の曲線を描け．どれが同じ経路をもつか？またパラメーターがゼロのときのそれらの接ベクトルを求めよ．

(a)　$x=\sin\lambda,\ y=\cos\lambda$

(b)　$x=\cos(2\pi t^2),\ y=\sin(2\pi t^2+\pi)$

(c)　$x=s,\ y=s+4$

(d)　$x=s^2,\ y=-(s-2)(s+2)$

(d)　$x=u,\ y=1$

(a)　$x^2+y^2=\sin^2\lambda+\cos^2\lambda=1$

経路は，原点が中心の半径 1 の円．

$$\left[\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=0}=[\cos\lambda]_{\lambda=0}=1,\quad \left[\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=0}=[-\sin\lambda]_{\lambda=0}=0$$

$$\frac{d}{d\lambda}\to(1,0)$$

(b)　$x^2+y^2=\cos^2(2\pi t^2)+\sin^2(2\pi t^2+\pi)=\cos^2(2\pi t^2)+\sin^2(2\pi t^2)=1$

経路は，原点が中心の半径 1 の円．

$$\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]_{t=0}=\left[-4\pi t\sin(2\pi t^2)\right]_{t=0}=0,\quad \left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t=0}=\left[4\pi t\cos(2\pi t^2)\right]_{t=0}=0$$

$$\frac{d}{dt}\to(0,0)$$

(c)　$y=x+4$

経路は，直線．

$$\left[\frac{\partial x}{\partial s}\right]_{s=0}=1,\quad \left[\frac{\partial y}{\partial s}\right]_{s=0}=1$$

$$\frac{d}{ds}\to(1,1)$$

(d)　$y=-s^2+4=-|x|+4$

経路は，y 軸対称の２本の直線.

$$\left[\frac{\partial x}{\partial s}\right]_{s=0} = [2s]_{s=0} = 0\,,\quad \left[\frac{\partial y}{\partial s}\right]_{s=0} = [-2s]_{s=0} = 0$$

$$\frac{d}{ds} \to (0, 0)$$

(e)　$y = 1$

経路は，x 軸に平行な直線.

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]_{u=0} = 1\,,\quad \left[\frac{\partial y}{\partial u}\right]_{s=0} = 0$$

$$\frac{d}{du} \to (1, 0)$$

＋＋＋

()

練習問題 6

図 5.5 の抽像を正当化せよ.

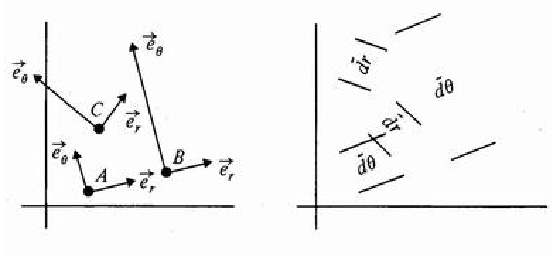


図 5.5　極座標に対する基底ベクトルと基底一形式

$\vec{e}_r$ は，原点から放射状の向きで大きさは１である.

$\vec{e}_\theta$ は，$\vec{e}_r$ に垂直で，つまり，原点を中心とする円の円周の向きで，大きさは原点からの距離と等しい.

$\tilde{d}\,r$ は，原点から放射状の向きに垂直な面（原点を中心とする円の円周に接する面）を貫く１形式で，大きさは１つまり貫く面の数は１である.

$\tilde{d}\theta$ は，$\tilde{d}\,r$ が貫く面に垂直な面，つまり，原点を中心とする円の円周の向きに垂直な面（原点からの放射状の面）を貫く１形式で，大きさつまり貫く面の数は原点からの距離の逆数である．したがって，面の間の距離は原点からの距離に等しくなる.

＋＋＋

（5.3）～（5.15）

練習問題 7

デカルト座標 (x, y)（プライムなしの添字）から極座標 (r, θ)（プライム付きの添字）への変換に対する変換行列 $\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}$，$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ のすべての要素を計算せよ．

ベクトルの成分の座標変換は，

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctan(y/x) \qquad (5.3)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \qquad (5.4)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \qquad (5.5)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} x = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} y = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + (y/x)^2}\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{r^2}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{1 + (y/x)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{r^2}$$

$$\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right) = \begin{pmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y \\ \partial\theta/\partial x & \partial\theta/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y/r^2 & x/r^2 \end{pmatrix} \qquad (5.4)$$

ベクトルの成分の座標逆変換は，

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad (5.3)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right) \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial x}{\partial\theta} = -r\sin\theta = -y$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial y}{\partial\theta} = r\cos\theta = x$$

$$\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & -y \\ y/r & x \end{pmatrix} \qquad (5.13)$$

$$\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right)\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5.15)$$

ゆえに

$$\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right)^{-1} = \left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right)$$

++++++++++++++++++++++++++++++++++

（5.7）～（5.13）

練習問題 8

(a)　（練習問題 7 の結果を用いよ．）$f = x^2 + y^2 + 2xy$ とし，デカルト座標で $\vec{V} \to (x^2 + 3y, y^2 + 3x)$，$\vec{W} \to (1,1)$ とする．f を r と θ の関数として計算し，極座標での $\vec{V}$ と $\vec{W}$ の成分を r と θ の関数として表せ.

(b)　デカルト座標での $\tilde{d}f$ の成分を求めよ．またその極座標での成分を(i)極座標での直接の計算から，(ii)デカルト座標からの変換から求めよ.

(c)　(i)極座標でのメトリックテンソルを用い，$\vec{V}$ と $\vec{W}$ に付随する 1 形式 $\tilde{V}$，$\tilde{W}$ の極座標成分を求めよ．(ii) $\vec{V}$，$\vec{W}$ のデカルト座標の成分から変換によってそれらの極座標成分を求めよ.

(a)　練習問題 7 の式（5.7）を使って，

$$\begin{pmatrix} \vec{V}^r \\ \vec{V}^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y/r^2 & x/r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2+3y \\ y^2+3x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{r}(x^3+y^3+6xy) \\ \frac{1}{r^2}(-x^2y-3y^2+xy^2+3x^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r^2(\cos^3\theta+\sin^3\theta)+6r\sin\theta\cos\theta \\ 3(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{W}^r \\ \vec{W}^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y/r^2 & x/r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}(x+y) \\ \frac{1}{r^2}(-y+x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta+\sin\theta \\ \frac{1}{r}(\cos\theta-\sin\theta) \end{pmatrix}$$

(b) (i)　先に f を極座標に変換しておく

$$f = x^2+y^2+2xy = r^2+2r^2\cos\theta\sin\theta = r^2(1+\sin 2\theta)$$

$$(\tilde{d}f)^r = \partial f/\partial r = 2r(1+\sin 2\theta)$$

$$(\tilde{d}f)^\theta = \partial f/\partial\theta = 2r^2\cos 2\theta$$

(ii)　$\tilde{d}f$ のデカルト座標での成分を先に求めておく.

$$\partial f/\partial x = 2x+2y, \quad \partial f/\partial y = 2x+2y$$

練習問題 7 の式（5.12）（5.13）を使って，

$$\begin{pmatrix} \partial\phi/\partial r \\ \partial\phi/\partial\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x+2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{r}(x^2+y^2+2xy) \\ 2(-xy-y^2+x^2+xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r}f \\ 2(x^2-y^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2r(1+\sin 2\theta) \\ 2r^2\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

(c)(i)

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_r \\ \tilde{V}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2(\cos^3\theta+\sin^3\theta)+6r(\sin\theta\cos\theta) \\ 3\cos 2\theta-(r/2)\sin 2\theta(\cos\theta-\sin\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r^2(\cos^3\theta+\sin^3\theta)+6r\sin\theta\cos\theta \\ 3r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+r^3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{W}_r \\ \tilde{W}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta+\sin\theta \\ \frac{1}{r}(\cos\theta-\sin\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta+\sin\theta \\ r(\cos\theta-\sin\theta) \end{pmatrix}$$

(ii)　練習問題 7 の式（5.13）を使って，デカルト座標では，ベクトルと 1 形式の成分は同じだから，

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_r \\ \tilde{V}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V}_x \\ \tilde{V}_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2+3y \\ y^2+3x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{r}(x^3+y^3+6xy) \\ -x^2y-3y^2+xy^2+3x^2 \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} r^2(\cos^3\theta+\sin^3\theta)+6r\sin\theta\cos\theta \\ 3r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+r^3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta) \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \widetilde{W}_r \\ \widetilde{W}_\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{W}_x \\ \widetilde{W}_y \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} \cos\theta+\sin\theta \\ r(\cos\theta-\sin\theta) \end{pmatrix}
$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.36）～（5.37）

練習問題 9

図 5.6 のような図を書いて，式（5.37）を説明せよ．

$$
\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r=\frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta\,\vec{e}_x+\sin\theta\,\vec{e}_y)=0=\Gamma^{\mu}{}_{rr}\vec{e}_\mu \tag{5.36a}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_r=-\sin\theta\,\vec{e}_x+\cos\theta\,\vec{e}_y=\frac{1}{r}\vec{e}_\theta=\Gamma^{\mu}{}_{r\theta}\vec{e}_\mu \tag{5.36b}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_\theta=-\sin\theta\,\vec{e}_x+\cos\theta\,\vec{e}_y=\frac{1}{r}\vec{e}_\theta=\Gamma^{\mu}{}_{\theta r}\vec{e}_\mu \tag{5.37a}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta=-r\cos\theta\,\vec{e}_x+r\sin\theta\,\vec{e}_y=-r\,\vec{e}_r=\Gamma^{\mu}{}_{\theta\theta}\vec{e}_\mu \tag{5.37b}
$$

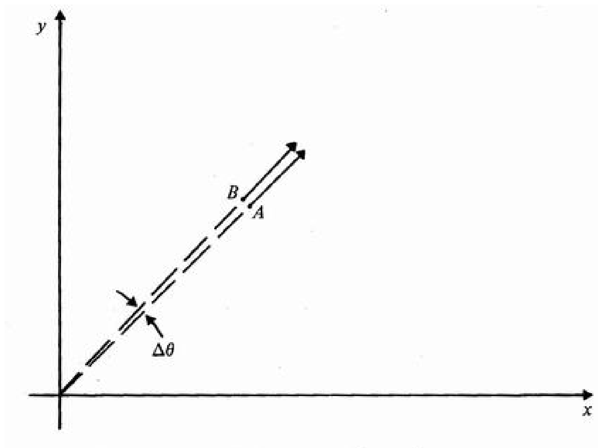


図 5.6　θ が $\Delta\theta$ だけ変化したときの $\vec{e}_r$ の変化

式（5.36b）は，$\vec{e}_r$ の θ に関する微分である．原点から等距離 r にあり $\Delta\theta$ だけ違った方向にある二つの近傍の点 A と B で，$\vec{e}_r$ は原点からの放射状を向いていて，$\vec{e}_r$ の差は $\vec{e}_\theta$ と同じ向きつまり原点を中心とする円の円周方向のベクトルである．したがって，式（5.36b）は確からしい．

式（5.36a）は，$\vec{e}_r$ の r に関する微分である．原点からの放射状の直線上の距離 Δr 離れている二つの近傍の点で，$\vec{e}_r$ の差は直線上にある大きさ一定のベクトルの差であるので 0 である．したがって，式（5.36a）は確からしい．
式（5.37b）は，$\vec{e}_\theta$ の θ に関する微分である．原点から等距離 r にあり $\Delta\theta$ だけ違った方向にある二つの近傍の点ＡとＢで，$\vec{e}_\theta$ は原点を中心とする円の円周方向のベクトルであり，$\Delta\theta$ だけ向きが違う．$\vec{e}_\theta$ の差は原点への向きのベクトルであり，$\vec{e}_r$ と逆向きである．したがって，式（5.37b）は確からしい．
式（5.37a）は，$\vec{e}_\theta$ の r に関する微分である．原点からの放射状の直線上の距離 Δr 離れている二つの近傍の点で，$\vec{e}_\theta$ は原点を中心とする円の円周方向のベクトルであり，向きは同じであるが大きさが異なる．その差は $\vec{e}_\theta$ と同じ向きである．したがって，式（5.37a）は確からしい．
＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.51）

練習問題 10
　式（5.51）で定義された $\nabla\vec{V}$ が（1,1）テンソルであることを証明せよ．

$$(\nabla\vec{V})^\alpha{}_\beta = (\nabla_\beta\vec{V})^\alpha = V^\alpha{}_{;\beta} \equiv V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \qquad (5.51)$$

式（5.51）は，ベクトル $\vec{V}$ の共変微分 $\nabla\vec{V}$ の成分である．共変微分は，共変成分を 1 つ増やす操作である．したがって，ベクトルの共変微分は，（1,1）テンソルになる．
練習問題 17 で式（5.51）がテンソルとしてふるまうことを証明する．
＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.49）～（5.55）

練習問題 11

（練習問題 7 と 8 を用いる．）デカルト座標での成分が $(x^2+3y,\, y^2+3x)$ であるベクトル $\vec{V}$ に対して以下の量を計算せよ．

(a)　デカルト座標での $V^{\alpha}{}_{,\beta}$,

(b)　極座標への変換 $\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}V^{\alpha}{}_{,\beta}$,

(c)　式（5.49）で（5.44）のクリストッフェル記号を使って極座標での成分 $V^{\mu'}{}_{;\nu'}$,

(d)　(a)の結果を使って発散 $V^{\alpha}{}_{,\alpha}$,

(e)　(b)あるいは(c)の結果を使って発散 $V^{\mu'}{}_{;\mu'}$,

(f)　式（5.55）を直接使って発散 $V^{\mu'}{}_{;\mu'}$

クリストッフェル記号の極座標での値

$$\Gamma^{\mu}{}_{rr}=\Gamma^{r}{}_{r\theta}=\Gamma^{r}{}_{\theta r}=\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta}=0,\quad \Gamma^{\theta}{}_{r\theta}=\Gamma^{\theta}{}_{\theta r}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^{r}{}_{\theta\theta}=-r \tag{5.44}$$

共変微分の定義式

◆ $$\nabla_{\beta}\vec{V}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^{\beta}}=V^{\alpha}{}_{;\beta}\vec{e}_{\alpha} \tag{5.50}$$

◆ $$V^{\alpha}{}_{;\beta}\equiv V^{\alpha}{}_{,\beta}+V^{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} \tag{5.49}$$

$$\nabla\vec{V}=V^{\alpha}{}_{;\beta}\vec{e}_{\alpha}\otimes\tilde{\omega}^{\beta} \tag{5.50b}$$

極座標での発散の定義式

$$V^{\alpha}{}_{;\alpha}=\frac{\partial V^{r}}{\partial r}+\frac{\partial V^{\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}V^{r}$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV^{r})+\frac{\partial}{\partial\theta}V^{\theta} \tag{5.55}$$

(a)　$V^{1}{}_{,1}=2x$，$V^{1}{}_{,2}=3$，$V^{2}{}_{,1}=3$，$V^{2}{}_{,2}=2y$

(b)　変換式は,

$V^{\mu'}{}_{;\nu'}=\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha}\Lambda_{\nu'}{}^{\beta}V^{\alpha}{}_{,\beta}$

where

$$\left(\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha}\right)=\begin{pmatrix}\Lambda^{1'}{}_{1} & \Lambda^{1'}{}_{2}\\ \Lambda^{2'}{}_{1} & \Lambda^{2'}{}_{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x/r & y/r\\ -y/r^{2} & x/r^{2}\end{pmatrix}$$

$$\left(\Lambda_{\nu'}{}^{\beta}\right)=\left(\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\right)^{T}=\begin{pmatrix}\Lambda^{1}{}_{1'} & \Lambda^{1}{}_{2'}\\ \Lambda^{2}{}_{1'} & \Lambda^{2}{}_{2'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x/r & -y\\ y/r & x\end{pmatrix}$$

以下，上式の記号を使う．

$$(\nabla\vec{V})^{r}{}_{r}=V^{r}{}_{;r}=V^{1'}{}_{;1'}=\Lambda^{1'}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{1'}V^{\alpha}{}_{,\beta}$$
$$=\Lambda^{1'}{}_{1}\Lambda^{1}{}_{1'}V^{1}{}_{,1}+\Lambda^{1'}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{1'}V^{1}{}_{,2}+\Lambda^{1'}{}_{2}\Lambda^{1}{}_{1'}V^{2}{}_{,1}+\Lambda^{1'}{}_{2}\Lambda^{2}{}_{1'}V^{2}{}_{,2}$$
$$=\frac{x}{r}\frac{x}{r}2x+\frac{x}{r}\frac{y}{r}3+\frac{y}{r}\frac{x}{r}3+\frac{y}{r}\frac{y}{r}2y$$
$$=\frac{2x^{3}}{r^{2}}+\frac{2y^{3}}{r^{2}}+\frac{6xy}{r^{2}}$$
$$=2r(\cos^{3}\theta+\sin^{3}\theta)+6\cos\theta\sin\theta$$

$$(\nabla\vec{V})^{r}{}_{\theta}=V^{r}{}_{;\theta}=V^{1'}{}_{;2'}=\Lambda^{1'}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{2'}V^{\alpha}{}_{,\beta}$$
$$=\Lambda^{1'}{}_{1}\Lambda^{1}{}_{2'}V^{1}{}_{,1}+\Lambda^{1'}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{2'}V^{1}{}_{,2}+\Lambda^{1'}{}_{2}\Lambda^{1}{}_{2'}V^{2}{}_{,1}+\Lambda^{1'}{}_{2}\Lambda^{2}{}_{2'}V^{2}{}_{,2}$$
$$=\frac{x}{r}(-y)2x+\frac{x}{r}x3+\frac{y}{r}(-y)3+\frac{y}{r}x2y$$
$$=\frac{2}{r}xy(y-x)+\frac{3}{r}(x^{2}-y^{2})$$
$$=2r^{2}\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)+3r(\cos^{2}\theta-\sin^{2}\theta)$$

$$(\nabla\vec{V})^{\theta}{}_{r}=V^{\theta}{}_{;r}=V^{2'}{}_{;1'}=\Lambda^{2'}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{1'}V^{\alpha}{}_{,\beta}$$
$$=\Lambda^{2'}{}_{1}\Lambda^{1}{}_{1'}V^{1}{}_{,1}+\Lambda^{2'}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{1'}V^{1}{}_{,2}+\Lambda^{2'}{}_{2}\Lambda^{1}{}_{1'}V^{2}{}_{,1}+\Lambda^{2'}{}_{2}\Lambda^{2}{}_{1'}V^{2}{}_{,2}$$
$$=\frac{-y}{r^{2}}\frac{x}{r}2x+\frac{-y}{r^{2}}\frac{y}{r}3+\frac{x}{r^{2}}\frac{x}{r}3+\frac{x}{r^{2}}\frac{y}{r}2y$$
$$=\frac{2}{r^{3}}xy(y-x)+\frac{3}{r^{3}}(x^{2}-y^{2})$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)+\frac{3}{r}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$(\nabla\vec{V})^{\theta}{}_{\theta} = V^{\theta}{}_{;\theta} = V^{2'}{}_{;2'} = \Lambda^{2'}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{2'}V^{\alpha}{}_{,\beta}$$

$$= \Lambda^{2'}{}_{1}\Lambda^{1}{}_{2'}V^{1}{}_{,1} + \Lambda^{2'}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{2'}V^{1}{}_{,2} + \Lambda^{2'}{}_{2}\Lambda^{1}{}_{2'}V^{2}{}_{,1} + \Lambda^{2'}{}_{2}\Lambda^{2}{}_{2'}V^{2}{}_{,2}$$

$$= \frac{-y}{r^2}(-y)2x + \frac{-y}{r^2}x3 + \frac{x}{r^2}(-y)3 + \frac{x}{r^2}x2y$$

$$= \frac{2xy^2}{r^2} + \frac{-3xy}{r^2} + \frac{-3xy}{r^2} + \frac{2x^2y}{r^2}$$

$$= \frac{2}{r^2}xy(x+y) - \frac{6xy}{r^2}$$

$$= 2r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta) - 6\sin\theta\cos\theta$$

(c)　練習問題 8 の結果

$$\begin{pmatrix} \vec{V}^{r} \\ \vec{V}^{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2(\cos^3\theta+\sin^3\theta)+6r\sin\theta\cos\theta \\ 3(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta) \end{pmatrix}$$

を使って，

$$V^{r}{}_{,r} = 2r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)+6\cos\theta\sin\theta$$

$$V^{r}{}_{,\theta} = 3r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)+6r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$V^{\theta}{}_{,r} = \sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$$

$$V^{\theta}{}_{,\theta} = -r\cos^3\theta - r\sin^3\theta + 2r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta) - 12\sin\theta\cos\theta$$

練習問題 10 の式（5.44）（5.49）を使って，

$$V^{r}{}_{;r} = V^{r}{}_{,r} + V^{\mu}\Gamma^{r}{}_{\mu r} = V^{r}{}_{,r} + V^{r}\Gamma^{r}{}_{rr} + V^{\theta}\Gamma^{r}{}_{\theta r} = V^{r}{}_{,r}$$

$$= 2r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)+6\cos\theta\sin\theta$$

$$V^{r}{}_{;\theta} = V^{r}{}_{,\theta} + V^{\mu}\Gamma^{r}{}_{\mu\theta} = V^{r}{}_{,\theta} + V^{r}\Gamma^{r}{}_{r\theta} + V^{\theta}\Gamma^{r}{}_{\theta\theta} = V^{r}{}_{,\theta} - rV^{\theta}$$

$$= 2r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)+3r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$V^{\theta}{}_{;r} = V^{\theta}{}_{,r} + V^{\mu}\Gamma^{\theta}{}_{\mu r} = V^{\theta}{}_{,r} + V^{r}\Gamma^{\theta}{}_{rr} + V^{\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\theta r} = V^{\theta}{}_{,r} + \frac{1}{r}V^{\theta}$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)+\frac{3}{r}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$V^{\theta}{}_{;\theta} = V^{\theta}{}_{,\theta} + V^{\mu}\Gamma^{\theta}{}_{\mu\theta} = V^{\theta}{}_{,\theta} + V^{r}\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} + V^{\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} = V^{\theta}{}_{,\theta} + \frac{1}{r}V^{r}$$

$$= 2r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta) - 6\sin\theta\cos\theta$$

問題(b)と同じ結果.

(d)　$V^{\alpha}{}_{,\alpha} = V^{1}{}_{,1} + V^{2}{}_{,2} = 2x+2y$

(e)　$V^{\mu'}{}_{;\mu'} = V^{r}{}_{;r} + V^{\theta}{}_{;\theta}$

$$= 2r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)+6\cos\theta\sin\theta$$

$$+2r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)-6\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2r(\cos^3\theta+\sin^3\theta+\sin^2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^2\theta)$$

$$= 2r(\cos\theta+\sin\theta)$$

問題(d)と同じ結果.

(f)　$V^{\alpha}{}_{;\alpha} = \dfrac{\partial V^{r}}{\partial r} + \dfrac{\partial V^{\theta}}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r}V^{r}$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV^{r}) + \frac{\partial}{\partial\theta}V^{\theta} \tag{5.55}$$

（上式は問題(c)の結果と同じであるので，以下は問題(e)と同じ．）

$$= 2r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)+6\cos\theta\sin\theta$$

$$+2r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)-6\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2r(\cos^3\theta+\sin^3\theta+\sin^2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^2\theta)$$

$$= 2r(\cos\theta+\sin\theta)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.62）

練習問題 12

デカルト座標成分が $(x^2+3y,\, y^2+3x)$ である 1 形式 $\tilde{p}$ に対して以下の量を計算せよ．

(a)　デカルト座標での $p_{\alpha,\beta}$，

(b)　極座標への変換 $\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}p_{\alpha,\beta}$，

(c)　式 (5.62) で (5.44) のクリストッフェル記号を使って極座標での $p_{\mu';\nu'}$，

◆

$$(\nabla_{\beta}\tilde{p})_{\alpha} \equiv (\nabla\tilde{p})_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - p_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \tag{5.62}$$

$$\nabla_{\beta}\tilde{p} = \frac{\partial\tilde{p}}{\partial x^{\beta}} = p_{\alpha;\beta}\tilde{\omega}^{\alpha} \tag{5.62b}$$

$$\nabla\tilde{p} = p_{\alpha;\beta}\tilde{\omega}^{\alpha}\otimes\tilde{\omega}^{\beta} \tag{5.62c}$$

(a)　$p_{1,1}=2x$，　$p_{1,2}=3$，　$p_{2,1}=3$，　$p_{2,2}=2y$

(b)　変換式は,

$$(\nabla\tilde{p})_{\alpha\beta} = \Lambda_{\nu'}{}^{\alpha}\Lambda_{\nu'}{}^{\beta}p_{\alpha,\beta}$$

where

$$\left(\Lambda_{\nu'}{}^{\mu}\right) = \left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}\right)^{T} = \begin{pmatrix}\Lambda^{1}{}_{1'} & \Lambda^{1}{}_{2'}\\ \Lambda^{2}{}_{1'} & \Lambda^{2}{}_{2'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x/r & -y\\ y/r & x\end{pmatrix}$$

以下，上式の記号を使う．

$$\begin{aligned}
(\nabla\tilde{p})_{rr} = p_{r;r} = p_{1';1'} &= \Lambda^{\alpha}{}_{1'}\Lambda^{\beta}{}_{1'}p_{\alpha,\beta}\\
&= \Lambda^{1}{}_{1'}\Lambda^{1}{}_{1'}p_{1,1} + \Lambda^{1}{}_{1'}\Lambda^{2}{}_{1'}p_{1,2} + \Lambda^{2}{}_{1'}\Lambda^{1}{}_{1'}p_{2,1} + \Lambda^{2}{}_{1'}\Lambda^{2}{}_{1'}p_{2,2}\\
&= \frac{x}{r}\frac{x}{r}2x + \frac{x}{r}\frac{y}{r}3 + \frac{y}{r}\frac{x}{r}3 + \frac{y}{r}\frac{y}{r}2y\\
&= \frac{2x^3}{r^2} + \frac{2y^3}{r^2} + \frac{6xy}{r^2}\\
&= 2r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) + 6\cos\theta\sin\theta = V^{r}{}_{;r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla\tilde{p})_{r\theta} = p_{r;\theta} = p_{1';2'} &= \Lambda^{\alpha}{}_{1'}\Lambda^{\beta}{}_{2'}p_{\alpha,\beta}\\
&= \Lambda^{1}{}_{1'}\Lambda^{1}{}_{2'}p_{1,1} + \Lambda^{1}{}_{1'}\Lambda^{2}{}_{2'}p_{1,2} + \Lambda^{2}{}_{1'}\Lambda^{1}{}_{2'}p_{2,1} + \Lambda^{2}{}_{1'}\Lambda^{2}{}_{2'}p_{2,2}\\
&= \frac{x}{r}(-y)2x + \frac{x}{r}x3 + \frac{y}{r}(-y)3 + \frac{y}{r}x2y\\
&= \frac{2}{r}xy(y-x) + \frac{3}{r}(x^2-y^2)\\
&= 2r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta) + 3r(\cos^2\theta-\sin^2\theta) = V^{r}{}_{;\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla\tilde{p})_{\theta r} = p_{\theta;r} = p_{2';1'} &= \Lambda^{\alpha}{}_{2'}\Lambda^{\beta}{}_{1'}p_{\alpha,\beta}\\
&= \Lambda^{1}{}_{2'}\Lambda^{1}{}_{1'}p_{1,1} + \Lambda^{1}{}_{2'}\Lambda^{2}{}_{1'}p_{1,2} + \Lambda^{2}{}_{2'}\Lambda^{1}{}_{1'}p_{2,1} + \Lambda^{2}{}_{2'}\Lambda^{2}{}_{1'}p_{2,2}\\
&= (-y)\frac{x}{r}2x + (-y)\frac{y}{r}3 + x\frac{x}{r}3 + x\frac{y}{r}2y\\
&= \frac{2}{r}xy(y-x) + \frac{3}{r}(x^2-y^2)\\
&= 3r(\cos^2\theta-\sin^2\theta) + 2r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta) = r^2V^{\theta}{}_{;r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla\tilde{p})_{\theta\theta} = p_{\theta;\theta} = p_{2';2'} &= \Lambda^{\alpha}{}_{2'}\Lambda^{\beta}{}_{2'}p_{\alpha,\beta}\\
&= \Lambda^{1}{}_{2'}\Lambda^{1}{}_{2'}p_{1,1} + \Lambda^{1}{}_{2'}\Lambda^{2}{}_{2'}p_{1,2} + \Lambda^{2}{}_{2'}\Lambda^{1}{}_{2'}p_{2,1} + \Lambda^{2}{}_{2'}\Lambda^{2}{}_{2'}p_{2,2}\\
&= (-y)(-y)2x + (-y)x3 + x(-y)3 + xx2y\\
&= 2xy^2 - 3xy - 3xy + 2x^2y\\
&= 2xy(x+y) - 6xy\\
&= 2r^3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta) - 6r^2\sin\theta\cos\theta = r^2V^{\theta}{}_{;\theta}
\end{aligned}$$

(c)　練習問題 8 の結果

$$\begin{pmatrix}\tilde{p}_r\\ \tilde{p}_\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2(\cos^3\theta+\sin^3\theta) + 6r\sin\theta\cos\theta\\ 3r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta) + r^3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)\end{pmatrix}$$

を使って，

$$p_{r,r} = 2r(\cos^3\theta+\sin^3\theta) + 6\cos\theta\sin\theta$$

$$p_{r,\theta} = 3r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta) + 6r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$p_{\theta,r} = 6r(\cos^2\theta-\sin^2\theta) + 3r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$$

$$p_{\theta,\theta} = r^3(-\cos^3\theta-\sin^3\theta+2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)) - 12r^2\sin\theta\cos\theta$$

式（5.44）（5.62）を使って，

$$\Gamma^{\mu}{}_{rr}=\Gamma^{r}{}_{r\theta}=\Gamma^{r}{}_{\theta r}=\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta}=0,\quad \Gamma^{\theta}{}_{r\theta}=\Gamma^{\theta}{}_{\theta r}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^{r}{}_{\theta\theta}=-r \tag{5.44}$$

$$p_{r;r}=p_{r,r}-p_{\mu}\Gamma^{u}{}_{rr}=p_{r,r}-p_{r}\Gamma^{r}{}_{rr}-p_{\theta}\Gamma^{\theta}{}_{rr}=p_{r,r}$$

$$=2r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)+6\cos\theta\sin\theta=V^{r}{}_{;r}$$

$$p_{r;\theta}=p_{r,\theta}-p_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{r\theta}=p_{r,r}-p_{r}\Gamma^{r}{}_{r\theta}-p_{\theta}\Gamma^{\theta}{}_{r\theta}=p_{r,\theta}-\frac{1}{r}p_{\theta}$$

$$=2r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)+3r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=V^{r}{}_{;\theta}$$

$$p_{\theta;r}=p_{\theta,r}-p_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\theta r}=p_{\theta,r}-p_{r}\Gamma^{r}{}_{\theta r}-p_{\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\theta r}=p_{\theta,r}-\frac{1}{r}p_{\theta}$$

$$=3r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)=r^2V^{\theta}{}_{;r}$$

$$p_{\theta;\theta}=p_{\theta,\theta}-p_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\theta\theta}=p_{\theta,\theta}-p_{r}\Gamma^{r}{}_{\theta\theta}-p_{\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta}=p_{\theta,\theta}+rp_{r}$$

$$=2r^3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)-6r^2\sin\theta\cos\theta=r^2V^{\theta}{}_{;\theta}$$

問題(b)と同じ結果.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 13

問題 11 と 12 から，$g_{\mu'\alpha'}V^{\alpha'}{}_{;\nu'}=p_{\mu';\nu'}$ を確かめよ.

$$\begin{pmatrix} p_{r;r} & p_{r;\theta} \\ p_{\theta;r} & p_{\theta;\theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^{r}{}_{;r} & V^{r}{}_{;\theta} \\ V^{\theta}{}_{;r} & V^{\theta}{}_{;\theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V^{r}{}_{;r} & V^{r}{}_{;\theta} \\ r^2V^{\theta}{}_{;r} & r^2V^{\theta}{}_{;\theta} \end{pmatrix}$$

$$p_{r;r}=V^{r}{}_{;r},\quad p_{r;\theta}=V^{r}{}_{;\theta},\quad p_{\theta;r}=r^2V^{\theta}{}_{;r},\quad p_{\theta;\theta}=r^2V^{\theta}{}_{;\theta}$$

上式は，練習問題 12 で確かめられている.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.65）

練習問題 14

極座標成分が $(A^{rr}=r^2,\ \ A^{r\theta}=r\sin\theta,\ \ A^{\theta r}=r\cos\theta,\ \ A^{\theta\theta}=\tan\theta)$ であるテンソルに対して, すべての可能な添字につき極座標での式 (5.65) を計算せよ.

◆ $$\nabla_\beta A^{\mu\nu}=A^{\mu\nu}{}_{,\beta}+A^{\alpha\nu}\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}+A^{\mu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} \qquad (5.65)$$

β に r または θ を入れて固定して, フリーの μ と ν に r または θ を順に入れていく. α はダミー. クリストッフェル記号の値は次式である.

$$\Gamma^\mu{}_{rr}=\Gamma^r{}_{r\theta}=\Gamma^r{}_{\theta r}=\Gamma^\theta{}_{\theta\theta}=0\,,\quad \Gamma^\theta{}_{r\theta}=\Gamma^\theta{}_{\theta r}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^r{}_{\theta\theta}=-r \qquad (5.44)$$

$$\nabla_r A^{rr}=A^{rr}{}_{,r}+A^{rr}\Gamma^r{}_{rr}+A^{\theta r}\Gamma^r{}_{\theta r}+A^{rr}\Gamma^r{}_{rr}+A^{r\theta}\Gamma^r{}_{\theta r}$$
$$=A^{rr}{}_{,r}=2r$$
$$\nabla_r A^{r\theta}=A^{r\theta}{}_{,r}+A^{r\theta}\Gamma^r{}_{rr}+A^{\theta\theta}\Gamma^r{}_{\theta r}+A^{rr}\Gamma^\theta{}_{rr}+A^{r\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta r}$$
$$=A^{r\theta}{}_{,r}+\frac{1}{r}A^{r\theta}=\sin\theta+\sin\theta=2\sin\theta$$
$$\nabla_r A^{\theta r}=A^{\theta r}{}_{,r}+A^{rr}\Gamma^\theta{}_{rr}+A^{\theta r}\Gamma^\theta{}_{\theta r}+A^{\theta r}\Gamma^r{}_{rr}+A^{\theta\theta}\Gamma^r{}_{\theta r}$$
$$=A^{\theta r}{}_{,r}+\frac{1}{r}A^{\theta r}=\cos\theta+\cos\theta=2\cos\theta$$
$$\nabla_r A^{\theta\theta}=A^{\theta\theta}{}_{,r}+A^{r\theta}\Gamma^\theta{}_{rr}+A^{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta r}+A^{\theta r}\Gamma^\theta{}_{rr}+A^{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta r}$$
$$=A^{\theta\theta}{}_{,r}+\frac{1}{r}A^{\theta\theta}+\frac{1}{r}A^{\theta\theta}=\frac{1}{r}\tan\theta+\frac{1}{r}\tan\theta=2\frac{1}{r}\tan\theta$$
$$\nabla_\theta A^{rr}=A^{rr}{}_{,\theta}+A^{rr}\Gamma^r{}_{r\theta}+A^{\theta r}\Gamma^r{}_{\theta\theta}+A^{rr}\Gamma^r{}_{r\theta}+A^{r\theta}\Gamma^r{}_{\theta\theta}$$
$$=A^{rr}{}_{,\theta}-rA^{\theta r}=-r^2\cos\theta$$
$$\nabla_\theta A^{r\theta}=A^{r\theta}{}_{,\theta}+A^{r\theta}\Gamma^r{}_{r\theta}+A^{\theta\theta}\Gamma^r{}_{\theta\theta}+A^{rr}\Gamma^\theta{}_{r\theta}+A^{r\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta\theta}$$
$$=A^{r\theta}{}_{,\theta}-rA^{\theta\theta}+\frac{1}{r}A^{rr}\Gamma^\theta{}_{r\theta}=r\cos\theta-r\tan\theta+r$$

$$\nabla_\theta A^{\theta r}=A^{\theta r}{}_{,\theta}+A^{rr}\Gamma^\theta{}_{r\theta}+A^{\theta r}\Gamma^\theta{}_{\theta\theta}+A^{\theta r}\Gamma^r{}_{r\theta}+A^{\theta\theta}\Gamma^r{}_{\theta\theta}$$
$$=A^{\theta r}{}_{,\theta}+\frac{1}{r}A^{rr}-rA^{\theta\theta}=-r\sin\theta+r-r\tan\theta$$
$$\nabla_\theta A^{\theta\theta}=A^{\theta\theta}{}_{,\theta}+A^{r\theta}\Gamma^\theta{}_{r\theta}+A^{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta\theta}+A^{\theta r}\Gamma^\theta{}_{r\theta}+A^{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta\theta}$$
$$=A^{\theta\theta}{}_{,\theta}+\frac{1}{r}A^{r\theta}+\frac{1}{r}A^{\theta r}=\sec^2\theta+\sin\theta+\cos\theta$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.66）

練習問題 15

極座標成分が $(V^r = 1,\ V^\theta = 0)$ であるベクトルに対して，極座標での 2 階の共変微分 $V^\alpha{}_{;\mu;\nu}$ のすべての成分を計算せよ．［ヒント：2 階の微分を求めるには，1 階微分 $V^\alpha{}_{;\mu}$ を（1,1）テンソルと見なす：式（5.66）］

$$V^\alpha{}_{;\beta} \equiv V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \qquad (5.49)$$

$$\Gamma^\mu{}_{rr} = \Gamma^r{}_{r\theta} = \Gamma^r{}_{\theta r} = \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = 0,\quad \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta r} = \frac{1}{r},\quad \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r \qquad (5.44)$$

を使って，

$$V^r{}_{;r} = V^r{}_{,r} + V^r \Gamma^r{}_{rr} + V^\theta \Gamma^r{}_{\theta r} = 0$$

$$V^\theta{}_{;r} = V^\theta{}_{,r} + V^r \Gamma^\theta{}_{rr} + V^\theta \Gamma^{\alpha\theta}{}_{\theta r} = 0$$

$$V^r{}_{;\theta} = V^r{}_{,\theta} + V^r \Gamma^r{}_{r\theta} + V^\theta \Gamma^r{}_{\theta\theta} = 0$$

$$V^\theta{}_{;\theta} = V^\theta{}_{,\theta} + V^r \Gamma^\theta{}_{r\theta} + V^\theta \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}$$

$V^\mu{}_{;\nu} = B^\mu{}_\nu$ として，

$$\nabla_\beta B^\mu{}_\nu = B^\mu{}_{\nu,\beta} + B^\alpha{}_\nu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - B^\mu{}_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} \qquad (5.66)$$

を使って，（式は 8 個）

$$\nabla_r B^r{}_r = B^r{}_{r,r} + B^r{}_r \Gamma^r{}_{rr} + B^\theta{}_r \Gamma^r{}_{\theta r} - B^r{}_r \Gamma^r{}_{rr} - B^r{}_\theta \Gamma^\theta{}_{rr}$$
$$= 0$$

$$\nabla_r B^r{}_\theta = B^r{}_{\theta,r} + B^r{}_\theta \Gamma^r{}_{rr} + B^\theta{}_\theta \Gamma^r{}_{\theta r} - B^r{}_r \Gamma^r{}_{\theta r} - B^r{}_\theta \Gamma^\theta{}_{\theta r}$$
$$= 0$$

$$\nabla_r B^\theta{}_r = B^\theta{}_{r,r} + B^r{}_r \Gamma^\theta{}_{rr} + B^\theta{}_r \Gamma^\theta{}_{\theta r} - B^\theta{}_r \Gamma^r{}_{rr} - B^\theta{}_\theta \Gamma^\theta{}_{rr}$$
$$= 0$$

$$\nabla_r B^\theta{}_\theta = B^\theta{}_{\theta,r} + B^r{}_\theta \Gamma^\theta{}_{rr} + B^\theta{}_\theta \Gamma^\theta{}_{\theta r} - B^\theta{}_r \Gamma^r{}_{\theta r} - B^\theta{}_\theta \Gamma^\theta{}_{\theta r}$$

$$= -\frac{1}{r^2}$$

$$\nabla_\theta B^r{}_r = B^r{}_{r,\theta} + B^r{}_r \Gamma^r{}_{r\theta} + B^\theta{}_r \Gamma^r{}_{\theta\theta} - B^r{}_r \Gamma^r{}_{r\theta} - B^r{}_\theta \Gamma^\theta{}_{r\theta}$$
$$= 0$$

$$\nabla_\theta B^r{}_\theta = B^r{}_{\theta,\theta} + B^r{}_\theta \Gamma^r{}_{r\theta} + B^\theta{}_\theta \Gamma^r{}_{\theta\theta} - B^r{}_r \Gamma^r{}_{\theta\theta} - B^r{}_\theta \Gamma^\theta{}_{\theta\theta}$$
$$= -1$$

$$\nabla_\theta B^\theta{}_r = B^\theta{}_{r,\theta} + B^r{}_r \Gamma^\theta{}_{r\theta} + B^\theta{}_r \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} - B^\theta{}_r \Gamma^r{}_{r\theta} - B^\theta{}_\theta \Gamma^\theta{}_{r\theta}$$
$$= -\frac{1}{r^2}$$

$$\nabla_\theta B^\theta{}_\theta = B^\theta{}_{\theta,\theta} + B^r{}_\theta \Gamma^\theta{}_{r\theta} + B^\theta{}_\theta \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} - B^\theta{}_r \Gamma^r{}_{\theta\theta} - B^\theta{}_\theta \Gamma^\theta{}_{\theta\theta}$$
$$= 0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.74）～（5.75）

練習問題 16
　式（5.74）から式（5.75）を導くさいに，省略した過程をすべて補え．

スカラー場ϕの１階微分$\nabla\phi$は，成分$\phi_{,\beta}$をもつ１形式である．２階共変微分$\nabla\nabla\phi$は，成分$\phi_{,\beta;\alpha}$をもつ（0,2）テンソルである．

練習問題 12 の式（5.62）を使って，

$$\phi_{,\beta;\alpha}=\phi_{,\beta,\alpha}-\phi_{,\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$$

すべての座標系で，αとβについて対称であるから，

◆ $$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} \qquad (5.74)$$

式（5.64）を使って，

$$g_{\alpha\beta;\mu}=g_{\alpha\beta,\mu}-\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}-\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu} \qquad (5.72)$$

$g_{\alpha\mu;\beta}=0$を使って，式（5.72）の添字を置換した式を用意する．

$$g_{\alpha\beta,\mu}=\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}+\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}$$

$$g_{\alpha\mu,\beta}=\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}g_{\nu\mu}+\Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}$$

$$-g_{\beta\mu,\alpha}=\Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha}g_{\nu\mu}+\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}$$

$$\begin{aligned}g_{\alpha\beta,\mu}+g_{\alpha\mu,\beta}-g_{\beta\mu,\alpha}\\ &=\left(\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}-\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}\right)g_{\nu\beta}+\left(\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha}\right)g_{\nu\mu}+\left(\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}+\Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta}\right)g_{\alpha\nu}\end{aligned}$$

$$g_{\alpha\beta,\mu}+g_{\alpha\mu,\beta}-g_{\beta\mu,\alpha}=2g_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}$$

$g^{\alpha\gamma}$を掛け，$g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\nu}=\delta^{\gamma}{}_{\nu}$を使って，

◆ $$\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}\left(g_{\alpha\beta,\mu}+g_{\alpha\mu,\beta}-g_{\beta\mu,\alpha}\right)=\Gamma^{\gamma}{}_{\beta\mu} \qquad (5.75)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.43）（5.49）

練習問題 17
　$V^{\beta}{}_{,\alpha}$と$V^{\mu}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}$が座標変換の下でそれぞれどのように変換されるか？
［$\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}$に対しては式（5.43）から始めるとよい．］このどちらもテンソル則には従わないが，その和はテンソルとして変換することを示せ．

【ポイント】共変微分はテンソルであるがそれの各項はテンソルではない．

$$V^{\alpha}{}_{;\beta}\equiv V^{\alpha}{}_{,\beta}+V^{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} \qquad (5.49)$$

【準備】クリストッフェル記号の定義式

$$\frac{\partial\vec{e}_{\mu}}{\partial x^{\beta}}=\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}\vec{e}_{\lambda} \qquad (5.43)$$

から，$\tilde{\omega}^{\alpha}$を基底１形式として，

$$\frac{\partial\vec{e}_{\mu}}{\partial x^{\beta}}\tilde{\omega}^{\alpha}=\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}\vec{e}_{\lambda}\tilde{\omega}^{\alpha}=\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}\delta^{\alpha}{}_{\lambda}=\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}$$

ゆえに　$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}=\dfrac{\partial\vec{e}_{\mu}}{\partial x^{\beta}}\tilde{\omega}^{\alpha}$

$\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha}\equiv\dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}$等々として，

$$\begin{aligned}V^{\nu'}{}_{;\mu'}&\equiv V^{\nu'}{}_{,\mu'}+V^{\lambda'}\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'} \qquad (5.49)\\ &=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}V^{\beta})+V^{\lambda'}\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'}\end{aligned}$$

（$\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'}=\dfrac{\partial\vec{e}_{\lambda'}}{\partial x^{\mu'}}\tilde{\omega}^{\nu'}$を使って）

$$=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}+V^{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}+V^{\lambda'}\frac{\partial\vec{e}_{\lambda'}}{\partial x^{\mu'}}\tilde{\omega}^{\nu'}$$

（第３項だけ計算を進めると，）

$$=\cdots+\Lambda^{\lambda'}{}_{\gamma}V^{\gamma}\frac{\partial\vec{e}_{\lambda'}}{\partial x^{\mu'}}\Lambda^{\nu'}{}_{\delta}\tilde{\omega}^{\delta}$$

$$=\cdots+\Lambda^{\lambda'}{}_{\gamma}V^{\gamma}\Lambda^{\nu'}{}_{\delta}\tilde{\omega}^{\delta}\Lambda^{\varepsilon}{}_{\mu'}\frac{\partial}{\partial x^{\varepsilon}}(\Lambda^{\gamma}{}_{\lambda'}\vec{e}_{\gamma})$$

$$=\cdots+\Lambda^{\lambda'}{}_{\gamma}V^{\gamma}\Lambda^{\nu'}{}_{\delta}\tilde{e}^{\delta}\Lambda^{\varepsilon}{}_{\mu'}\Lambda^{\gamma}{}_{\lambda'}\frac{\partial\vec{e}_{\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}}+\Lambda^{\lambda'}{}_{\gamma}V^{\gamma}\Lambda^{\nu'}{}_{\delta}\tilde{e}^{\delta}\Lambda^{\varepsilon}{}_{\mu'}\vec{e}_{\gamma}\frac{\partial\Lambda^{\gamma}{}_{\lambda'}}{\partial x^{\varepsilon}}$$

（$\dfrac{\partial\vec{e}_{\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}}\tilde{\omega}^{\delta}=\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\varepsilon}$，$\Lambda^{\lambda'}{}_{\gamma}\Lambda^{\gamma}{}_{\lambda'}=\delta^{\gamma}{}_{\lambda'}$，$\tilde{\omega}^{\delta}\vec{e}_{\gamma}=\delta^{\delta}{}_{\gamma}$，$\Lambda^{\lambda'}{}_{\gamma}\dfrac{\partial\Lambda^{\gamma}{}_{\lambda'}}{\partial x^{\varepsilon}}=-\Lambda^{\gamma}{}_{\nu'}\dfrac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_{\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}}$を使って）

$$=\cdots+\Lambda^{\nu'}{}_{\delta}\Lambda^{\varepsilon}{}_{\mu'}V^{\gamma}\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\varepsilon}-V^{\gamma}\Lambda^{\nu'}{}_{\delta}\Lambda^{\varepsilon}{}_{\mu'}\Lambda^{\gamma}{}_{\nu'}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_{\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}}$$

（$\Lambda^{\nu'}{}_{\delta}\Lambda^{\gamma}{}_{\nu'}=\delta^{\gamma}{}_{\delta}$を使って，）

$$=\cdots+\Lambda^{\nu'}{}_{\delta}\Lambda^{\varepsilon}{}_{\mu'}V^{\gamma}\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\varepsilon}-V^{\gamma}\Lambda^{\varepsilon}{}_{\mu'}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_{\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}}$$

（ダミー添字の置換$\gamma\to\beta$，$\varepsilon\to\alpha$）

$$=\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}+V^{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}+\Lambda^{\nu'}{}_{\delta}\Lambda^{\varepsilon}{}_{\mu'}V^{\gamma}\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\varepsilon}-V^{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$=\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}+\Lambda^{\nu'}{}_{\delta}\Lambda^{\varepsilon}{}_{\mu'}V^{\gamma}\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\varepsilon}$$

（ダミー添字の置換$\delta\to\beta$，$\varepsilon\to\alpha$）

$$=\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}+\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}V^{\gamma}\Gamma^{\beta}{}_{\gamma\alpha}$$

$$=\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\left(\frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}+V^{\gamma}\Gamma^{\beta}{}_{\gamma\alpha}\right)$$

結論として，

$$V^{\nu'}{}_{;\mu'}=\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}V^{\beta}{}_{;\alpha}$$

これから，$V^{\alpha}{}_{;\beta}$は，確かに（1,1）テンソルの成分である．

（別解）

$\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'}$を先に求めておく．

$$\frac{\partial\vec{e}_{\mu'}}{\partial x^{\nu'}}=\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\vec{e}_{\alpha})=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\frac{\partial\vec{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}}{\partial x^{\beta}}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\vec{e}_{\alpha}$$

$$=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\frac{\partial\vec{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}}{\partial x^{\beta}}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\vec{e}_{\alpha}$$

（$\dfrac{\partial\vec{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}=\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\vec{e}_{\gamma}$を使って）

$$=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\vec{e}_{\gamma}+\frac{\partial\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}}{\partial x^{\beta}}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\vec{e}_{\alpha}$$

$$=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\Lambda^{\lambda'}{}_{\gamma}\vec{e}_{\lambda'}+\frac{\partial\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}}{\partial x^{\beta}}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\Lambda^{\lambda'}{}_{\alpha}\vec{e}_{\lambda'}$$

$\dfrac{\partial\vec{e}_{\mu'}}{\partial x^{\nu'}}=\Gamma^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'}\vec{e}_{\lambda'}$と比較して

$$\Gamma^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'}=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\Lambda^{\lambda'}{}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}+\frac{\partial\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}}{\partial x^{\beta}}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\Lambda^{\lambda'}{}_{\alpha}$$

（ダミー添字の置換$\lambda'\to\nu'$，$\mu'\to\lambda'$，$\nu'\to\mu'$）

$$\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'}=\Lambda^{\alpha}{}_{\lambda'}\Lambda^{\beta}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}+\frac{\partial\Lambda^{\alpha}{}_{\lambda'}}{\partial x^{\beta}}\Lambda^{\beta}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\alpha}$$

$$V^{\nu'}{}_{;\mu'}\equiv V^{\nu'}{}_{,\mu'}+V^{\lambda'}\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'}\tag{5.49}$$

$$=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}V^{\beta})+V^{\lambda'}\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'}$$

$$=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}+V^{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}+V^{\lambda'}\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'}$$

$$=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}+V^{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$+V^{\lambda'}\Lambda^{\alpha}{}_{\lambda'}\Lambda^{\beta}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}+V^{\lambda'}\frac{\partial\Lambda^{\alpha}{}_{\lambda'}}{\partial x^{\beta}}\Lambda^{\beta}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\alpha}$$

（$\dfrac{\partial\Lambda^{\alpha}{}_{\lambda'}}{\partial x^{\beta}}\Lambda^{\nu'}{}_{\alpha}=-\dfrac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\Lambda^{\alpha}{}_{\lambda'}$を使って，第3項，第4項の計算を進める）

$$=\cdots+V^{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}-V^{\lambda'}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\Lambda^{\alpha}{}_{\lambda'}\Lambda^{\beta}{}_{\mu'}$$

$$=\cdots+V^{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}-V^{\alpha}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\Lambda^{\beta}{}_{\mu'}$$

（ダミー添字の置換，第 3 項は，$\alpha \to \gamma$，$\beta \to \alpha$，$\gamma \to \beta$，
第 4 項は，$\alpha \to \beta$）

$$= \cdots + V^{\gamma} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'} \Lambda^{\nu'}{}_{\beta} \Gamma^{\beta}{}_{\gamma\alpha} - V^{\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'} \frac{\partial \Lambda^{\nu'}{}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$= \Lambda^{\nu'}{}_{\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'} \frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + V^{\gamma} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'} \Lambda^{\nu'}{}_{\beta} \Gamma^{\beta}{}_{\gamma\alpha}$$

$$= \Lambda^{\nu'}{}_{\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'} \frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \Lambda^{\nu'}{}_{\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'} V^{\gamma} \Gamma^{\beta}{}_{\gamma\alpha}$$

$$= \Lambda^{\nu'}{}_{\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'} \left(\frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + V^{\gamma} \Gamma^{\beta}{}_{\gamma\alpha} \right)$$

結論として，

$$V^{\nu'}{}_{;\mu'} = \Lambda^{\nu'}{}_{\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'} V^{\beta}{}_{;\alpha}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.78）

練習問題 18
式（5.78）を確かめよ．

$$\vec{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \vec{e}_{\hat{\beta}} \equiv g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \delta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} \cdot \tilde{\omega}^{\hat{\beta}} \equiv g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \delta^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \tag{5.78}$$

練習問題 6 から，
基底ベクトルの座標変換は，

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial y/\partial r \\ \partial x/\partial \theta & \partial y/\partial \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} = \left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} \right) \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix}$$

（5.21）（5.22）

基底 1 形式の座標変換は，

$$\begin{pmatrix} \tilde{d}r \\ \tilde{d}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y \\ \partial \theta/\partial x & \partial \theta/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}x \\ \tilde{d}y \end{pmatrix} = \left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} \right) \begin{pmatrix} \tilde{d}x \\ \tilde{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}x \\ \tilde{d}y \end{pmatrix}$$

（5.25）（5.26）

$$\vec{e}_{\hat{r}} = \vec{e}_r,\quad \vec{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \tag{5.76}$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{r}} = \tilde{\omega}^{r},\quad \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = r\tilde{\omega}^{\theta} \tag{5.77}$$

$$\vec{e}_{\hat{r}} \cdot \vec{e}_{\hat{r}} = (\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)$$

$$= \cos^2\theta\,\vec{e}_x + \sin^2\theta\,\vec{e}_y$$

$$= 1$$

$$\vec{e}_{\hat{\theta}} \cdot \vec{e}_{\hat{\theta}} = (-\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y)(-\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y)$$

$$= \sin^2\theta\,\vec{e}_x + \cos^2\theta\,\vec{e}_y$$

$$= 1$$

$$\vec{e}_{\hat{r}} \cdot \vec{e}_{\hat{\theta}} = \vec{e}_{\hat{\theta}} \cdot \vec{e}_{\hat{r}} = (\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)(-\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y)$$

$$= 0$$

where

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$$

$$\tilde{d}\hat{r}\cdot\tilde{d}\hat{r} = (\cos\theta\,\tilde{d}x + \sin\theta\,\tilde{d}y)(\cos\theta\,\tilde{d}x + \sin\theta\,\tilde{d}y)$$
$$= \cos^2\theta\,\tilde{d}x + \sin^2\theta\,\tilde{d}y$$
$$= 1$$

$$\tilde{d}\hat{\theta}\cdot\tilde{d}\hat{\theta} = (-\sin\theta\,\tilde{d}x + \cos\theta\,\tilde{d}y)(-\sin\theta\,\tilde{d}x + \cos\theta\,\tilde{d}y)$$
$$= \sin^2\theta\,\tilde{d}x + \cos^2\theta\,\tilde{d}y$$
$$= 1$$

$$\tilde{d}\hat{r}\cdot\tilde{d}\hat{\theta} = \tilde{d}\hat{\theta}\cdot\tilde{d}\hat{r} = (\cos\theta\,\tilde{d}x + \sin\theta\,\tilde{d}y)(-\sin\theta\,\tilde{d}y + \cos\theta\,\tilde{d}y)$$
$$= 0$$

where

$\tilde{\omega}^\alpha \cdot \tilde{\omega}^\beta = \delta^{\alpha\beta}$，　$\tilde{\omega}^x = \tilde{d}x$,　$\tilde{\omega}^y = \tilde{d}y$，　$\tilde{\omega}^{\hat{r}} = \tilde{d}\hat{r}$,　$\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = \tilde{d}\hat{\theta}$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.81）～（5.84）

練習問題 19

　式（5.81）から式（5.84）までの計算を確かめよ．これを$\tilde{d}r$と$\tilde{d}\theta$に対して繰り返し，それらが座標基底であることを示せ．

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_{\hat{r}}\\ \vec{e}_{\hat{\theta}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{e}_\xi\\ \vec{e}_\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\end{pmatrix} \tag{5.79}$$

となるような座標(ξ,η)が存在するか確認する．もし存在するなら，$(\vec{e}_{\hat{r}},\vec{e}_{\hat{\theta}})$は座標$(\xi,\eta)$の基底であり，もし存在しないなら，それらは非座標基底である．このことは基底 1 形式を見たほうがより簡単である．

$$\begin{pmatrix}\tilde{\omega}^{\hat{r}}\\ \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{d}\xi\\ \tilde{d}\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{d}x\\ \tilde{d}y\end{pmatrix} \tag{5.80}$$

となるような(ξ,η)を探す．練習問題 6 の式（5.25）（5.26）から，

$$\begin{pmatrix}\tilde{\omega}^{\hat{r}}\\ \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{d}x\\ \tilde{d}y\end{pmatrix} \tag{5.81}$$

$\tilde{\omega}^{\hat{r}}$と$\tilde{\omega}^{\hat{\theta}}$は直交している．もし$(\xi,\eta)$が存在するなら，

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\sin\theta,\quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \cos\theta \tag{5.82}$$

であるはずである．これから，次式も成り立つはずである．

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \sin\theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \cos\theta}{\partial x} \tag{5.83}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\sin\theta) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta) \tag{5.84}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

実際には，上式は成り立たないから，(ξ,η) は存在しない．

$\tilde{d}r$ と $\tilde{d}\theta$ について確かめる．練習問題 6 の式（5.25）（5.26）から，

$$\begin{pmatrix}\tilde{d}r\\ \tilde{d}\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{d}x\\ \tilde{d}y\end{pmatrix} \qquad (5.25)\ (5.26)$$

もし (ξ,η) が存在するなら，

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{-\sin\theta}{r},\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r} \qquad (5.82')$$

であるはずである．これから，次式も成り立つはずである．

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\sin\theta}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right) \qquad (5.83')$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\sin\theta}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right) \qquad (5.84')$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

上式は成り立つから，(ξ,η) は存在する．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.74）～（5.75）

> 練習問題 20
>
> 非座標基底 $\{\vec{e}_\mu\}$ に対して，$\nabla_{\vec{e}_\mu}\vec{e}_\nu-\nabla_{\vec{e}_\nu}\vec{e}_\mu\equiv c^\alpha{}_{\mu\nu}\vec{e}_\alpha$ を定義して式（5.74）のかわりにこれを用いて式（5.75）を一般化せよ．

共変微分の定義から，

$$\nabla_{\vec{e}_\mu}\vec{e}_\nu-\nabla_{\vec{e}_\nu}\vec{e}_\mu=\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\vec{e}_\alpha-\Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}\vec{e}_\alpha$$

これから次式が得られる．

$$c^\alpha{}_{\mu\nu}=\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}-\Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}$$

練習問題 16 の途中の式から，

$$\begin{aligned}&g_{\alpha\beta,\mu}+g_{\alpha\mu,\beta}-g_{\beta\mu,\alpha}\\&=\left(\Gamma^\nu{}_{\alpha\mu}-\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}\right)g_{\nu\beta}+\left(\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}-\Gamma^\nu{}_{\beta\alpha}\right)g_{\nu\mu}+\left(\Gamma^\nu{}_{\beta\mu}+\Gamma^\nu{}_{\mu\beta}\right)g_{\alpha\nu}\\&=-c^\nu{}_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}-c^\nu{}_{\alpha\beta}g_{\nu\mu}+c^\nu{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}+2\Gamma^\nu{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}\end{aligned}$$

$$g_{\alpha\beta,\mu}+g_{\alpha\mu,\beta}-g_{\beta\mu,\alpha}+c_{\beta\alpha\mu}+c_{\mu\alpha\beta}-c_{\alpha\beta\mu}=2\Gamma^\nu{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}$$

$g^{\alpha\gamma}$ を掛け，$g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\nu}=\delta^\gamma{}_\nu$ を使って，

$$g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu}+g_{\alpha\mu,\beta}-g_{\beta\mu,\alpha}+c_{\beta\alpha\mu}+c_{\mu\alpha\beta}-c_{\alpha\beta\mu})$$

$$=2\delta^\gamma{}_\nu\Gamma^\nu{}_{\beta\mu}=2\Gamma^\gamma{}_{\beta\mu}$$

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu}+g_{\alpha\mu,\beta}-g_{\beta\mu,\alpha}+c_{\beta\alpha\mu}+c_{\mu\alpha\beta}-c_{\alpha\beta\mu})=\Gamma^\gamma{}_{\beta\mu}$$

シュッツ著に合わせるため，添字を機械的に置換する．

（$\alpha\to\mu$，$\beta\to\alpha$，$\mu\to\beta$，$\gamma\to\nu$）

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\mu\alpha,\beta}+g_{\mu\beta,\alpha}-g_{\alpha\beta,\mu}+c_{\alpha\mu\beta}+c_{\beta\mu\alpha}-c_{\mu\alpha\beta})=\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.96）

練習問題 21

特殊相対論で，ある慣性観測者の $x-ct$ 面を考える．ある一様に加速された観測者が正規直交座標系をつくりたいとする．2.9 節の練習問題 21 から彼の世界線は，

$$ct(\lambda)=a\sinh\lambda,\quad x(\lambda)=a\cosh\lambda \tag{5.96}$$

で与えられる．ここで a は定数である，$a\lambda$ は観測者の固有時間（彼の腕時計の示す時間）である．

(a)　λ を固定し，a を変数と見なしたとき，式（5.96）で記述される空間的な線は，観測者の世界線とその交差する点で直交することを示せ．式（5.96）で λ を変えると，そのような曲線の族が得られる．

(b)　式（5.96）は座標 (ct,x) から直交座標 (λ,a) への変換を定義することを示せ．その座標を描き，それがもとの $ct-x$ 面の半分しか覆わないことを示せ．この座標は $|x|=c|t|$ で定義される線上で特異になり，したがってそれは非連結な二つの領域を覆うことを示せ．

(c)　この座標系でのメトリックとすべてのクリストッフェル記号を計算せよ．この観測者はクリストッフェル記号を適切に使い，座標が覆う一つの連結領域にとどまる限り，完全に質のいい観測者である．この意味で特殊相対論でも加速度観測者を考えることができる．この座標を覆う領域の右半分はしばしばリンドラー空間とよばれ，その境界線 $x=\pm ct$ は後に学ぶブラックホールの地平面に似た性質をもつ．

(a)　接ベクトルは，

$$\frac{cdt}{d\tau}=a\cosh\lambda,\quad \frac{dx}{d\tau}=a\sinh\lambda$$

$$\frac{dt}{da}=\sinh\lambda,\quad \frac{dx}{da}=\cosh\lambda$$

スカラー積は，

$$-\frac{cdt}{d\tau}\frac{dx}{d\tau}+\frac{cdt}{da}\frac{dx}{da}=-a\cosh\lambda\sinh\lambda+a\sinh\lambda\cosh\lambda=0$$

接ベクトルどうしは直交している．

(b)　任意の a と λ に対して，

$$\left|\frac{ct}{x}\right|=|\tanh\lambda|<1,\quad x>0$$

ゆえに

$$|x|>c|t|,\quad s^2=-(ct)^2+x^2>0\ \text{（空間的）}$$

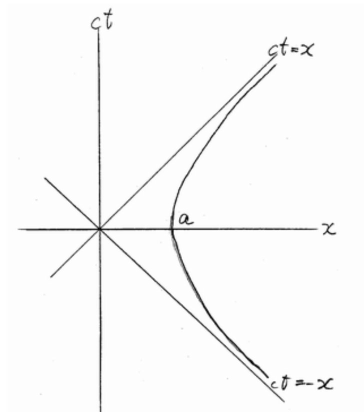
世界線は双曲線であり，x 軸での値は a である．

$$x^2-(ct)^2=a^2\cosh^2\lambda-a^2\sinh^2\lambda=a^2$$

漸近線は次式となる．

$$x=\pm ct$$

$a\to 0$ で双曲線は漸近線に近づく．



(c)

$$\vec{e}_\lambda=\frac{c\partial t}{\partial\lambda}\vec{e}_t+\frac{\partial x}{\partial\lambda}\vec{e}_x=a\cosh\lambda\vec{e}_t+a\sinh\lambda\vec{e}_x$$

$$\vec{e}_a=\frac{c\partial t}{\partial a}\vec{e}_t+\frac{\partial x}{\partial a}\vec{e}_x=\sinh\lambda\vec{e}_t+\cosh\lambda\vec{e}_x$$

$$g_{\lambda\lambda}=g(\vec{e}_\lambda,\vec{e}_\lambda)=\vec{e}_\lambda\cdot\vec{e}_\lambda=(a\cosh\lambda\vec{e}_t+a\sinh\lambda\vec{e}_x)^2=-a^2$$

$$g_{aa} = g(\vec{e}_a, \vec{e}_a) = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_a = (\sinh \lambda \vec{e}_t + \cosh \lambda \vec{e}_x)^2 = 1$$

$$g_{a\lambda} = g(\vec{e}_a, \vec{e}_\lambda) = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_\lambda$$

$$= (\sinh \lambda \vec{e}_t + \cosh \lambda \vec{e}_x)(a \cosh \lambda \vec{e}_t + a \sinh \lambda \vec{e}_x) = 0$$

$$g^{\lambda\lambda} = -\frac{1}{a^2},\quad g^{aa} = 1,\quad g^{a\lambda} = 0$$

練習問題 16 の式（5.75）を使う.

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) = \Gamma^{\gamma}{}_{\beta\mu} \tag{5.75}$$

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} (g_{\lambda\lambda,\lambda} + g_{\lambda\lambda,\lambda} - g_{\lambda\lambda,\lambda}) + \frac{1}{2} g^{a\lambda} (g_{a\lambda,\lambda} + g_{a\lambda,\lambda} - g_{\lambda\lambda,a})$$

$$= 0$$

$$\Gamma^{\lambda}{}_{aa} = \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} (g_{\lambda a,a} + g_{\lambda a,a} - g_{aa,\lambda}) + \frac{1}{2} g^{a\gamma} (g_{aa,a} + g_{aa,a} - g_{aa,a}) = 0$$

$$\Gamma^{\lambda}{}_{a\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} (g_{\lambda a,\lambda} + g_{\lambda\lambda,a} - g_{a\lambda,\lambda}) + \frac{1}{2} g^{a\lambda} (g_{aa,\lambda} + g_{a\lambda,a} - g_{a\lambda,a})$$

$$= \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\lambda\lambda,a} + \frac{1}{2} g^{a\lambda} g_{aa,\lambda} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}\right)(-2a) = \frac{1}{a}$$

$$\Gamma^{a}{}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda a} (g_{\lambda\lambda,\lambda} + g_{\lambda\lambda,\lambda} - g_{\lambda\lambda,\lambda}) + \frac{1}{2} g^{aa} (g_{a\lambda,\lambda} + g_{a\lambda,\lambda} - g_{\lambda\lambda,a})$$

$$= -\frac{1}{2} g^{aa} g_{\lambda\lambda,a} = -\frac{1}{2}(-2a) = a$$

$$\Gamma^{a}{}_{aa} = \frac{1}{2} g^{\lambda a} (g_{\lambda a,a} + g_{\lambda a,a} - g_{aa,\lambda}) + \frac{1}{2} g^{aa} (g_{aa,a} + g_{aa,a} - g_{aa,a}) = 0$$

$$\Gamma^{a}{}_{a\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda a} (g_{\lambda a,\lambda} + g_{\lambda\lambda,a} - g_{a\lambda,\lambda}) + \frac{1}{2} g^{aa} (g_{aa,\lambda} + g_{a\lambda,a} - g_{a\lambda,a}) = 0$$

シュッツ著によれば，次式と密接な関係にある.

練習問題 7

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2},\quad \theta = \arctan(y/x) \tag{5.3}$$

練習問題 11

$$\Gamma^{\mu}{}_{rr} = \Gamma^{r}{}_{r\theta} = \Gamma^{r}{}_{\theta r} = \Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} = 0,\quad \Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}{}_{\theta r} = \frac{1}{r},\quad \Gamma^{r}{}_{\theta\theta} = -r \tag{5.44}$$

$$g_{rr} = 1,\quad g_{\theta\theta} = r^2,\quad g_{r\theta} = 0 \tag{5.30}$$

$$(g_{\alpha\beta})_{\text{polar}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.68）

練習問題 22

もし$U^{\alpha}\nabla_{\alpha}V^{\beta}=W^{\beta}$ならば，$U^{\alpha}\nabla_{\alpha}V_{\beta}=W_{\beta}$となることを示せ.

練習問題 16 の

$$V_{\alpha;\beta}=g_{\alpha\mu}V^{\mu}{}_{;\beta} \tag{5.68}$$

を使って，

$$U^{\alpha}V^{\beta}{}_{;\alpha}=W^{\beta}$$

$$U^{\alpha}g_{\mu\beta}V^{\beta}{}_{;\alpha}=g_{\mu\beta}W^{\beta}$$

$$U^{\alpha}V_{\mu;\alpha}=W_{\mu}$$

$$U^{\alpha}\nabla_{\alpha}V_{\mu}=W_{\mu}$$

添字を機械的に置換する．$\mu\rightarrow\beta$

$$U^{\alpha}\nabla_{\alpha}V_{\beta}=W_{\beta}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋