4　特殊相対論における完全流体

完全流体，ストレスーエネルギーテンソル，マクスウェル方程式，ファラデー・テンソル，電磁場テンソル

4.1　流体

一般相対論的天体物理学では，ほとんどの場合第一近似として，重力源を完全流体とする．
ずれに逆らうすべての力がゼロ（摩擦なし）で，近傍の流体要素間の相互作用としては圧力のみである流体を，完全流体と定義する．

4.2　ダスト：粒子数 - 流速ベクトル $\vec{N}$

粒子数密度 n

粒子数密度 n の定義

$$n \equiv \text{要素のMCR系での粒子数の密度} \tag{4.1}$$

$$\gamma n = \frac{n}{\sqrt{1-\beta^2}} = \text{粒子の速度が}v\text{の系での粒子数密度} \tag{4.2}$$

$$\text{where} \quad \beta = \frac{v}{c},\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

面を横切る粒子数流束

$$(\text{流速})^{\bar{x}} = \gamma n v^{\bar{x}} = \frac{n v^{\bar{x}}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4.3}$$

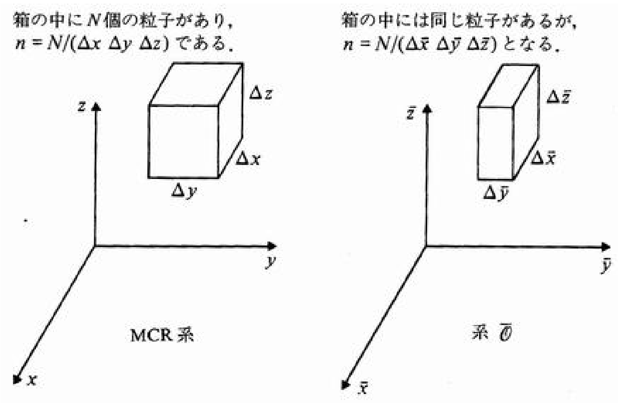


図4.1　ローレンツ収縮によって，粒子の密度は測定する系に依存してしまう

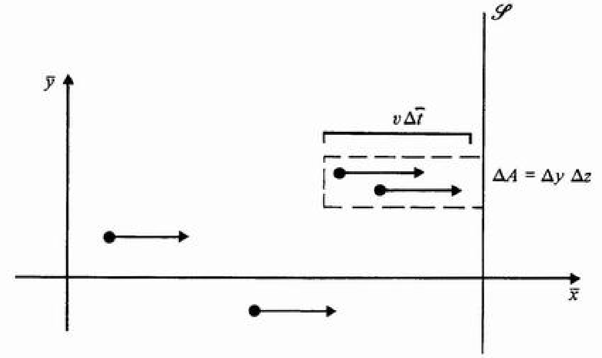


図4.2　流束を簡単な場合について示した．粒子が $\bar{x}$ 方向のみに運動しているとすれば，面𝒮上から $v\Delta\bar{t}$ の距離内のすべての粒子は，時間 $\Delta\bar{t}$ の間に面𝒮を横切ることになる．

粒子数 - 流速の４元ベクトル $\vec{N}$

◆ $$\vec{N} = n\vec{U} \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{v} \to (v_x, v_y, v_z)$$

$$\vec{U} \xrightarrow[O]{} c(\gamma, \gamma\beta_x, \gamma\beta_y, \gamma\beta_z) = (c\gamma, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$$

$$\vec{N} \xrightarrow[O]{} c(n\gamma, n\gamma\beta_x, n\gamma\beta_y, n\gamma\beta_z) = (nc\gamma, n\gamma v_x, n\gamma v_y, n\gamma v_z) \tag{4.5}$$

where　$\beta_x = v_x / c$， $\beta_y = v_y / c$，　$\beta_z = v_z / c$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}} = \frac{1}{\sqrt{1-({\beta_x}^2+{\beta_y}^2+{\beta_z}^2)}}$$

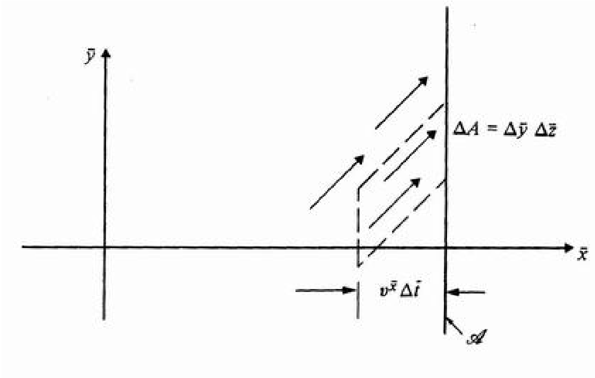


図 4.3　一般的な流束の場合．$\bar{x}$一定の面を粒子が横切るのは，速度の$\bar{x}$成分があるためである．

◆　$\vec{N}\cdot\vec{N} = -n^2c^2$　(4.6)

4.3　１形式と面

時間的流速としての粒子数密度

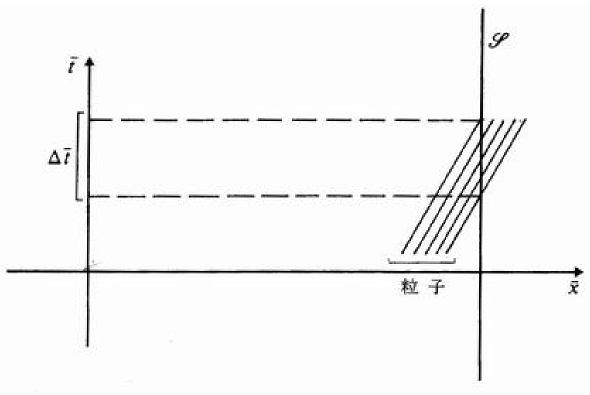


図 4.4　図 4.2 を$\bar{y}$軸を落して，時空図で描き直したもの

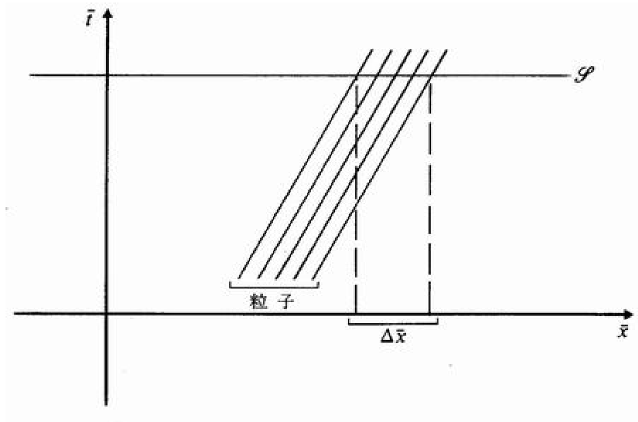


図 4.5　$\bar{t}$＝一定の面を横切る流束としての粒子数密度

流速は３次元曲面の単位“体積”を横切る世界線の数である．与えられた時刻に単位体積に“含まれる”粒子数，つまり粒子数密度にほかならない．

曲面を定義する１形式

曲面の方程式

$$\phi(ct, x, y, z) = \text{Const.}$$

単位垂直１形式

$$\tilde{n} = \frac{\tilde{d}\phi}{\left|\tilde{d}\phi\right|} \tag{4.7}$$

$$\left|\tilde{d}\phi\right| = \left|\eta^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}\right|^{\frac{1}{2}} \tag{4.8}$$

３次元の体積要素

$$\tilde{n}dx^{\alpha}dx^{\beta}dx^{\gamma} \tag{4.9}$$

面を横切る流速

$$\phi(ct, x, y, z) = \text{Const.}$$

の面を横切る（粒子）の流速は，

$$\left\langle \tilde{n}, \vec{N} \right\rangle$$

１形式による系の表現

式（3.37）から,

$$\tilde{U} = \boldsymbol{g}(\vec{U},\ \ )$$

$$\vec{U} \to (c, 0, 0, 0)$$

$$\tilde{U} \to (-c, 0, 0, 0)$$

$$\tilde{d}t \to \left(\frac{1}{c}, 0, 0, 0\right) = -\frac{1}{c^2}\tilde{U}$$

４元運動量が $\vec{p}$ の粒子のエネルギーは,

$$E = \left\langle c^2\tilde{d}t, \vec{p}\right\rangle = cp^0 \qquad (4.10)$$

$$E = -\vec{p}\cdot\vec{U} = cp^0$$

4.4　再びダスト：ストレス - エネルギーテンソル

エネルギー密度

MCR 系では，単位体積あたりのエネルギーは,

$nmc^2 = \rho c^2 \equiv$ MCR系でのエネルギー密度　(4.11)

$\rho = nm$（ダスト）　(4.12)

$\dfrac{\rho c^2}{1-\beta^2}$ = 粒子速度がvに見える系でのエネルギー密度　(4.13)

ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）

◆ $\boldsymbol{T}(\tilde{d}x^\alpha, \tilde{d}x^\beta) = T^{\alpha\beta} \equiv x^\beta$一定の面を横切る$\alpha$運動流速　(4.14)

where　α 運動量とは４元運動量の α 成分 $p^\alpha \equiv \left\langle \tilde{d}x^\alpha, \vec{p}\right\rangle$

T^{00} は $t = \mathrm{Const.}$ の面を横切る０運動量（エネルギー）の流速

T^{00} = エネルギー密度　(4.15)

T^{0i} は $x^i = \mathrm{Const.}$ の面を横切るエネルギー流速

$T^{0i} = x^i$面を横切るエネルギー 流速　(4.16)

T^{i0} は $t = \mathrm{Const.}$ の面を横切る i 運動量流速

$T^{i0} = i$ 運動量密度　(4.17)

T^{ij} は i 運動量の j 流速

$T^{00} = j$ 面を横切るi 運動量流速　(4.18)

問題 6　(4.19)～(4.20)

問題 7　(4.21)

4.5　一般の流体

マクロな定義

熱力学第一法則

表 4.1　流体のマクロな量

記号	名称	定義
$\vec{U}$	流体要素の四元速度	MCR系の四元速度
n	粒子数密度	MCR系での単位体積あたりの粒子数
$\vec{N}$	流束ベクトル	$\vec{N} \equiv n\vec{U}$
ρ	エネルギー密度	全質量エネルギー（静止質量，ランダム運動のエネルギー，化学的エネルギー，……）の密度
Π	粒子一個あたりの内部エネルギー	$\Pi \equiv (\rho/n) - m \to \rho \equiv n(m+\Pi)$ このΠは静止質量以外のすべてのエネルギーの総称である．
ρ_0	静止質量密度	$\rho_0 = mn$ mは定数なので，静止質量のみにかかわる“エネルギー”である．したがって， $\rho = \rho_0 + n\Pi$
T	温度	MCR系での普通の熱力学的な定義（本文参照）
p	圧力	MCR系での普通の流体力学的な定義（詳細は後述）
S	比エントロピー	一粒子あたりのエントロピー（本文参照）

問題 8　(4.22)～(4.26)

一般のストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）

***T* の空間成分** T^{ij}

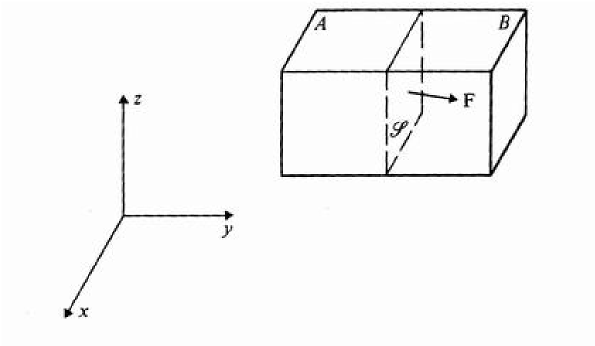
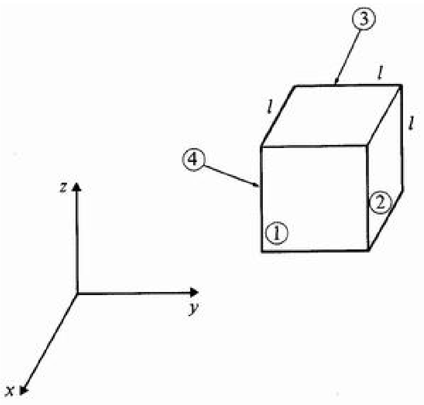


図 4.6　流体要素 A から隣接した要素 B に及ぼす力 $\mathbf{F}$ は，媒質と外力の性質によって，いろいろな方向をとりうる．

MCR 系での T^{ij} **の対称性**　（4.27）～（4.29）

（4.27），（4.28）省略



$$T^{ij} = T^{ji} \tag{4.29}$$

図 4.7　流体要素

エネルギー - 運動量の保存　（4.30）～（4.34）

（4.30）～（4.33）省略

◆　$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \tag{4.34}$$

粒子数の保存

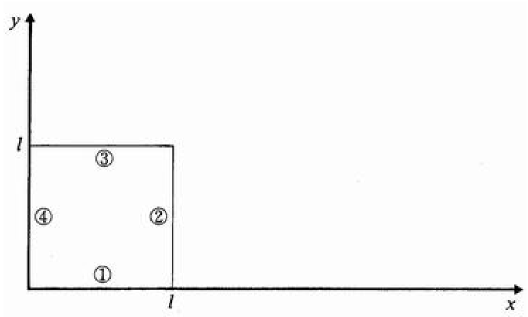


図 4.8　立方体の流体要素の z＝一定の面での切口

◆　$$N^{\alpha}{}_{,\alpha} = (nU^{\alpha})_{,\alpha} = 0 \tag{4.35}$$

4.6　完全流体　（4.36）～（4.56）

問題 12～18　（4.36）～（4.56）

4.8　ガウスの法則

微分形の保存則

◆　　$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0$　　(4.34)

◆　　$N^{\alpha}{}_{,\alpha}=(nU^{\alpha})_{,\alpha}=0$　　(4.35)

を積分形にする.

４次元時空間でのガウスの発散定理は,

◆　　$\int V^{\alpha}{}_{,\alpha}d^4x=\oint V^{\alpha}n_{\alpha}d^3s$　　(4.57)

ここで，$\tilde{n}$ は単位垂直１形式，d^3s は４次元体積を囲む３次元超曲面（３次元体積）である.

【注意】ガウスの法則はマクスウェル方程式にあるものでこれではない.

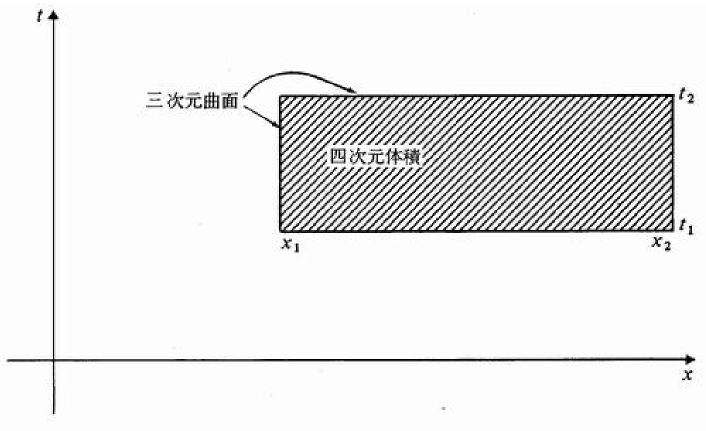


図 4.9　時空のある領域の境界

式（4.57）の表面積分（右辺）は,

$$\int\left[V^0(ct_2)-V^0(ct_1)\right]dxdydz$$

$$+\int\left[V^x(x_2)-V^x(x_1)\right]cdtdydz\cdots \qquad \text{式（4.58）}$$

詳細は問題 19 参照.

【参考】３次元空間のガウスの発散定理の証明

３次元空間のガウスの発散定理

◇　　$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV=\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$　　①

閉空間領域 V を囲む表面を S とする.

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV=\iiint_V\left(\frac{\partial A^1}{\partial x^1}+\frac{\partial A^2}{\partial x^2}+\frac{\partial A^3}{\partial x^3}\right)dV$$

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial A^1}{\partial x^1}\right)dV+\iiint_V\left(\frac{\partial A^2}{\partial x^2}\right)dV+\iiint_V\left(\frac{\partial A^3}{\partial x^3}\right)dV \qquad ②$$

第１項の体積分を考える.

領域 V は一様に凸とし凹がないとすると，x^1 軸に平行な直線を接線としてその接点が描く曲線により表面 S は x^1 軸のプラス側のマイナス側に分けられる.

２つの表面を S_+ と S_- とする.

プラス側とマイナス側の表面式を次とする.

$$x^1=f_+(x^2,x^3)$$

$$x^1=f_-(x^2,x^3)$$

x^2,x^3 の積分範囲は不明だが，x^1 の積分範囲は，f_+-f_- となる.

$$\iiint_V \frac{\partial A^1}{\partial x^1}dV=\iint_R\left(\int_{f-}^{f+}\frac{\partial A^1}{\partial x^1}dx^1\right)dx^2dx^3 \qquad ③$$

表面 S の微小面素 dS の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし，x^1 軸の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}^1$ とし，そのなす角を α^1 とすると，dS の x^2-x^3 平面への射影は,

$$dx^2dx^3=\left|\cos\alpha^1\right|dS=\left|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}^1\right|dS$$

これを使って,

③のつづき

$$=\iint_R A^1\left(f_+(x^2,x^3),x^2,x^3\right)dx^2dx^3-\iint_R A^1\left(f_-(x^2,x^3),x^2,x^3\right)dx^2dx$$

$$=\iint_{S+}A^1\left(f_+(x^2,x^3),x^2,x^3\right)\left|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}^1\right|dS-\iint_{S-}A^1\left(f_-(x^2,x^3),x^2,x^3\right)\left|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}^1\right|dS$$

$$=\iint_{S+}A^1\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}^1dS+\iint_{S-}A^1\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}^1dS$$

$$=\iint_S A^1\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}^1dS$$

３軸とも同様に

$$\iiint_V \frac{\partial A^1}{\partial x^1} d\boldsymbol{V} = \iint_S A^1 \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}^1 dS$$

$$\iiint_V \frac{\partial A^2}{\partial x^2} d\boldsymbol{V} = \iint_S A^2 \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}^2 dS$$

$$\iiint_V \frac{\partial A^3}{\partial x^3} d\boldsymbol{V} = \iint_S A^3 \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}^3 dS$$

②のつづき $= \iint_S A^1 \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}^1 dS + \iint_S A^2 \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}^2 dS + \iint_S A^3 \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}^3 dS$

$$= \iint_S \left(A^1\boldsymbol{e}^1 + A^2\boldsymbol{e}^2 + A^3\boldsymbol{e}^3\right)\cdot \boldsymbol{n} dS$$

$$= \iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} dS$$

４次元時空間に拡張する．

単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は, 正しくは単位垂直１形式 $\tilde{n}$ である．$\vec{A} \to (A^\alpha)$ であり,

ドット積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$ は，正しくは縮約 $\langle A^\alpha, n_\alpha \rangle = A^\alpha n_\alpha$ である．

４次元時空間の発散は,

$$A^\alpha{}_{,\alpha} = \left(\frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3}\right)$$

であるから,

$$\int_V A^\alpha{}_{,\alpha} d\boldsymbol{V} = \int_{\partial V} A^\alpha n_\alpha dS$$

と書ける．ベクトル記号と積分表記法の約束を変えて,

◆ $$\int V^\alpha{}_{,\alpha} d^4x = \oint V^\alpha n_\alpha d^3 s \qquad (4.57)$$

節の中で使われている公式と問題

4.1　流体	()
問題 1	
4.2　ダスト：粒子数 - 流速ベクトル	(4.1) ～ (4.6)
問題 2，3，4	
4.3　１形式と面	(4.7) ～ (4.10)
4.4　再びダスト：ストレス - エネルギーテンソル	(4.11) ～ (4.21)
問題 5，6，7	
4.5　一般の流体	(4.22) ～ (4.35)
問題 8	
4.6　完全流体	(4.36) ～ (4.56)
4.7　一般相対論の重要性	()
4.8　ガウスの法則	(4.57) ～ (4.58)

()

1　連続体近似が次の物理系に適用できるかどうかについて述べよ．
(a)　太陽系の惑星運動
(b)　火山の溶岩流
(c)　ラッシュアワーの幹線道路の車の流れ
(d)　各道路に信号のある交差点での車の流れ．
(e)　プラズマの力学

(a)　×
(b)　○
(c)　○
(d)　×
(e)　○

()

2　x 一定の面を横切る流速を“x 方向の流速”と呼ぶことが多い．ベクトルと 1 形式の知識を使って，流速についての述べ方としては不適当であることを説明せよ．

この表現は，直交座標（デカルト座標）を前提にしているので，不適当である．x 一定の面は，3 次元空間では，$y-z$ 面に平行であるが，“x 方向の流速”とは，x 軸が $y-z$ 面に垂直であることを前提にしている．4 次元でも図に描くのが難しいだけで考え方は同じである．

()

3　(a)　ガリレイ的な運動量の概念が相対論的な概念と違って，系にどのように依存するかを説明せよ． (b)　速度の小さいときに，相対論的な定義はガリレイ的な定義とほぼ同じであるのに，どうのようにしてこんなことが可能なのか？（ガリレイ的な４元運動量を定義せよ．）

(a)　ガリレイ的な３次元空間での運動量ベクトル p は系を変換すると変わる．相対論的な４元運動量 $\vec{p}$ は系を変換しても大きさは変わらず，その成分だけが変わる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　相対論では，４元運動量は，MCR 系で，

$$\vec{p} \xrightarrow[O]{} (mc, 0, 0, 0)$$

観測系で，

$$\vec{p} \xrightarrow[\bar{O}]{} (mc\gamma, m\gamma v, 0, 0)$$

となる．一方，ガリレイ的な４元運動量は，MCR 系で，

$$p \xrightarrow[O]{} (mc, 0, 0, 0)$$

と，相対論のそれと同じにしても，観測系では，

$$p \xrightarrow[\bar{O}]{} (mc, mv, 0, 0)$$

となり，γ だけ誤差がでる．

()

4　４元速度が $\vec{U}$ である観測者の測定するダストの粒子数密度は $-\vec{N}\cdot\vec{U}$ であることを示せ．

ある系（粒子の MCR 系でなくてもよい）で，粒子数・流速ベクトルを $\vec{N}$，観測者の４元速度を $\vec{U}$ とする．

観測者の静止系で，

$$\vec{U} \xrightarrow[O]{} (c, 0, 0, 0)$$

$$\vec{N} \xrightarrow[O]{} (N^0, N^1, N^2, N^3)$$

これから，

$$-\vec{N}\cdot\vec{U} = -cN^0$$

ここで，N^0 は観測者の測定するダストの粒子数密度である．

（4.14）

5　式（4.14）がテンソルを定義していることの証明を，この量が二つの変数に関して線形であることを示すことで完成せよ．

◆　$\boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha}, \tilde{d}x^{\beta}) = T^{\alpha\beta} \equiv x^{\beta}$一定の面を横切る$\alpha$運動流速　(4.14)

$\boldsymbol{T}$ は，ダストのストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）である．
線形性は次を満足する．

$$\boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha} + \tilde{d}x^{\gamma}, \tilde{d}x^{\beta}) = \boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha}, \tilde{d}x^{\beta}) + \boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\gamma}, \tilde{d}x^{\beta})$$

$$\boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha}, \tilde{d}x^{\beta} + \tilde{d}x^{\gamma}) = \boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha}, \tilde{d}x^{\beta}) + \boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha}, \tilde{d}x^{\gamma})$$

$$\boldsymbol{T}(C\tilde{d}x^{\alpha}, \tilde{d}x^{\beta}) = \boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha}, C\tilde{d}x^{\beta}) = C\boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha}, \tilde{d}x^{\beta})$$

2015.06.10
4　特殊相対論における完全流体　4.10　練習問題

（4.19）（4.20）

6　式（4.19）をその前の式を使って導け．

$$(T^{00})_{\mathrm{MCRF}} = \rho c^2 = mnc^2$$

$$(T^{0i})_{\mathrm{MCRF}} = (T^{i0})_{\mathrm{MCRF}} = (T^{ij})_{\mathrm{MCRF}} = 0$$

◆　ダスト：$\boldsymbol{T} = \vec{p} \otimes \vec{N} = mn\vec{U} \otimes \vec{U} = \rho\vec{U} \otimes \vec{U}$　(4.19)

$\boldsymbol{T}$ は，MCR 系でのダストのストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）である．
書き下すと，

$$\vec{U} \xrightarrow[\mathrm{MCRF}]{} (c, 0, 0, 0)$$

$$\vec{p} = m\vec{U} \xrightarrow[\mathrm{MCRF}]{} (mc, 0, 0, 0)$$

$$\vec{N} = n\vec{U} \xrightarrow[\mathrm{MCRF}]{} (nc, 0, 0, 0)$$

$$\boldsymbol{T} \xrightarrow[\mathrm{MCRF}]{} \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上式から，

◆　ダスト：$\boldsymbol{T} = \vec{p} \otimes \vec{N} = mn\vec{U} \otimes \vec{U} = \rho\vec{U} \otimes \vec{U}$　(4.19)

が導出できる．このことから，

$$T^{\alpha\beta} = \boldsymbol{T}\left(\tilde{e}^{\alpha}, \tilde{e}^{\beta}\right) = \rho\vec{U}\left(\tilde{e}^{\alpha}\right)\vec{U}\left(\tilde{e}^{\beta}\right)$$

$$T^{\alpha\beta} = \rho U^{\alpha} U^{\beta} \qquad (4.20)$$

（4.21）

7　式（4.21）を導け．

$$T^{\bar{0}\bar{0}} = \rho U^{\bar{0}} U^{\bar{0}} = \rho c^2 \gamma^2$$
$$T^{\bar{0}\bar{i}} = \rho U^{\bar{0}} U^{\bar{i}} = \rho c v^i \gamma^2 = \rho c^2 \beta^i \gamma^2$$
$$T^{\bar{i}\bar{0}} = \rho U^{\bar{i}} U^{\bar{0}} = \rho c v^i \gamma^2 = \rho c^2 \beta^i \gamma^2$$
$$T^{\bar{i}\bar{j}} = \rho U^{\bar{i}} U^{\bar{j}} = \rho v^i v^j \gamma^2 = \rho c^2 \beta^i \beta^j \gamma^2 \tag{4.21}$$
$$\text{where} \quad \beta^i = \frac{v^i}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}}$$

$\boldsymbol{T}$ は, MCR 系ではないダストのストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）である．

$$\vec{U} \xrightarrow[\bar{O}]{} (c\gamma, c\gamma\boldsymbol{\beta}) = (c\gamma, c\gamma\beta^1, c\gamma\beta^2, c\gamma\beta^3)$$
$$= (c\gamma, \gamma\boldsymbol{v}) = (c\gamma, \gamma v^1, \gamma v^2, \gamma v^3)$$
$$U^{\bar{0}} = c\gamma$$
$$U^{\bar{i}} = \gamma v^i = c\gamma\beta^i$$

上式から式（4.21）が導出できる．

（4.22）～（4.26）

8　式（4.25）が

$$\tilde{d}\rho\cdot c^2 - \left(\rho c^2 + p\right)\tilde{d}n/n = nT\tilde{d}s \tag{4.25'}$$

という１形式を使った式で書けること，式（4.26）についても同じことができることを議論せよ．１形式 $\tilde{\delta}q$ は勾配でないこと．つまりどんな関数 q に対しても $\tilde{d}q$ でないことを示せ．

◆
$$d\rho\cdot c^2 - \left(\rho c^2 + p\right)dn/n = nTds \tag{4.25}$$
$$\delta q = Tds \tag{4.26}$$

式（4.25）の元の式は，熱力学第一法則（エネルギー保存則）である．

$$\delta Q = dU + pdV \tag{4.22}$$

Q ；要素の吸収熱量

U ；要素の内部エネルギー

p ；圧力

V ；要素の体積

pdV ；要素のなした仕事（失ったエネルギー）

式（4.22）から式（4.25）を導出する．

$$U = \rho c^2 V$$

だから，

$$dU = d(\rho c^2 V) = \rho c^2 dV + d\rho\cdot c^2 V$$
$$V = \frac{N}{n}, \quad dV = -\frac{N}{n^2}dn \tag{4.23}$$

として，式（4.22）は，

$$\delta Q = \frac{N}{n}d\rho\cdot c^2 - N(\rho c^2 + p)\frac{dn}{n^2}$$

１粒子あたりの吸収熱量を $q \equiv \dfrac{Q}{N}$ として，

$$n\delta q = d\rho \cdot c^2 - (\rho c^2 + p)\frac{dn}{n} \qquad (4.24)$$

１粒子あたりのエントロピーを

$$\delta\, q = Tds \qquad (4.26)$$

として，次式が導出できた．

◆ $$d\rho \cdot c^2 - (\rho c^2 + p)dn/n = nTds \qquad (4.25)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

式（4.22）を１形式に変換し，式が成り立つか確認する．

$$\tilde{\delta}Q = \tilde{d}U + p\tilde{d}V \qquad (4.22')$$

もし，上式の Q が完全１形式（完全微分形式）なら，

$$\tilde{d}\tilde{d}Q = 0$$

が成り立ち，関数 $Q(U,V)$ が存在することが証明できる．これを確認する．

$$\tilde{d}\tilde{d}Q = \tilde{d}\tilde{d}U + \tilde{d}(p\tilde{d}V)$$

$\tilde{d}\tilde{d}U = 0$ だから

$$= \tilde{d}(p\tilde{d}V)$$

$$= \tilde{d}p \wedge \tilde{d}V$$

$$= \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_U \tilde{d}V + \left(\frac{\partial p}{\partial U}\right)_V \tilde{d}U\right] \wedge \tilde{d}V$$

$\tilde{d}V \wedge \tilde{d}V = 0$ だから，

$$= \left(\frac{\partial p}{\partial U}\right)_V \tilde{d}U \wedge \tilde{d}V$$

もし，$\left(\frac{\partial p}{\partial U}\right)_V = 0$ なら，体積と内部エネルギーが変わらずに圧力だけが変わる流体であり，これは存在しない．ゆえに上式は成り立たず，$\tilde{d}\tilde{d}Q \neq 0$ であるので，Q は完全１形式ではない．これが $\tilde{d}Q$ を使わないで $\tilde{\delta}Q$ を使う理由である．

Q は１形式であるので，フルベニウスの定理により，

$$\tilde{\delta}Q = T\tilde{d}S$$

T ；温度

S ；要素のエントロピー

となる関数 $T(U,V)$，$S(U,V)$ が存在する．

$$T\tilde{d}S = \tilde{d}U + \tilde{p}dV$$

これで，式 (4.22) が１形式を使って書けることが証明できた．問題の式 (4.25) は式（4.22）の変形だから，同じ議論で式（4.22'）から式（4.25'）が導出できる．また，式（4.26）も１形式にできる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

どんな関数 Q に対しても $\tilde{d}Q$ でないこと，つまり，Q は完全１形式でないことは既に証明したが，

$$\tilde{\delta}Q = T\tilde{d}S$$

についても証明する．

$$\tilde{\delta}Q = \tilde{d}Q, \quad \tilde{d}\tilde{d}Q = 0$$

でないことを確認すればよい．

$$\tilde{d}\tilde{d}Q = \tilde{d}(T\tilde{d}S)$$

$$= \tilde{d}T \wedge \tilde{d}S$$

$$= \left[\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U \tilde{d}V + \left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_V \tilde{d}U\right] \wedge \left[\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U \tilde{d}V + \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V \tilde{d}U\right]$$

$\tilde{d}V \wedge \tilde{d}V = 0$，$\tilde{d}U \wedge \tilde{d}U = 0$ だから，

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V \tilde{d}V \wedge \tilde{d}U + \left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U \tilde{d}U \wedge \tilde{d}V$$

$\tilde{d}V \wedge \tilde{d}U = -\tilde{d}U \wedge \tilde{d}V$ だから

$$= \left[\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V - \left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U\right] \tilde{d}V \wedge \tilde{d}U$$

普通，流体は，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U$$

が成り立たないので，

$$\tilde{d}\tilde{d}Q \neq 0$$

となり，つねに関数 $Q(U,V)$ が存在するとは限らない．

()

9　α が空間を表す添字のとき式（4.34）はニュートンの第二法則となることを示せ．
◆　$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0$　（4.34）

【表記法】$\dfrac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}=f_{,\alpha}=\partial_{\alpha}f$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

T^{i0}/c；　i 運動量密度

T^{ij}；x^{j} 面を横切る i 運動量流速

$$\frac{1}{c}\partial_t T^{i0}=-\left(\partial_x T^{ix}+\partial_y T^{iy}+\partial_z T^{iz}\right)$$

α が空間を表す添字のとき式（4.34）は，運動量保存則を表していて，次式となる．

$$T^{i\beta}{}_{,\beta}=0$$

次式のエネルギー保存則

$$T^{0\beta}{}_{,\beta}=0$$

と合わせて，次式をエネルギー・運動量保存則という．

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0$$

()

10　式（4.35）で $\lvert\beta\rvert<<1$ の極限を考えると $\partial n/\partial t+\partial(nv^{i})/\partial x^{i}=0$ となることを示せ．
◆　$N^{\alpha}{}_{,\alpha}=(nU^{\alpha})_{,\alpha}=0$　（4.35）

【表記法】$\dfrac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}=f_{,\alpha}=\partial_{\alpha}f$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

$$\vec{U}\to(c\gamma,\gamma v_x,\gamma v_y,\gamma v_z)=(c\gamma,\gamma v^{1},\gamma v^{2},\gamma v^{3})$$

$$(nU^{\alpha})_{,\alpha}=\frac{1}{c}\partial_t(nc\gamma)+\partial_x(n\gamma v_x)+\partial_y(n\gamma v_y)+\partial_z(n\gamma v_z)$$

$\lvert\beta\rvert<<1$ のとき $\beta\to 0$ となって，

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^{2}}}\to 1$$

であるから，

$$(nU^{\alpha})_{,\alpha}=\partial_t n+\partial_x(nv_x)+\partial_y(nv_y)+\partial_z(nv_z)$$

となり，

$$\partial n/\partial t+\partial(nv^{i})/\partial x^{i}=0$$

が証明できた．

()

11　(a)　空間軸の回転では行列 δ^{ij} は変化しないことを示せ.
(b)　この性質をもつ行列は δ^{ij} に定数を掛けたもののみであることを示せ.

(a)　z 軸まわりの回転の座標変換は,

$$(\bar{f}) = (\Lambda)^T (f)(\Lambda)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = diag(1,1,1) = \delta^{ij}$$

x 軸まわりの回転の座標変換行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y 軸まわりの回転の座標変換行列は,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

この２つの行列でさらに座標変換しても結果は変わらない.

座標変換行列は，２章問題 15(b)を参照。

＋＋

z 軸まわりの回転の座標変換は，（便宜上 $M_{ij} \to ij$ と書く）

$$(M) = (\Lambda)^T (M)(\Lambda)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11\cos + 12\sin & -11\sin + 12\cos & 13 \\ 21\cos + 22\sin & -21\sin + 22\cos & 23 \\ 31\cos + 32\sin & -31\sin + 32\cos & 33 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix} 11\cos^2 + 12\cos\cdot\sin \\ +21\cos\cdot\sin + 22\sin^2 \end{matrix} & \begin{matrix} -11\cos\cdot\sin + 12\cos^2 \\ -21\sin^2 + 22\cos\cdot\sin \end{matrix} & 13\cos + 23\sin \\ \begin{matrix} -11\cos\cdot\sin - 12\sin^2 \\ +21\cos^2 + 22\cos\cdot\sin \end{matrix} & \begin{matrix} 11\sin^2 - 12\cos\cdot\sin \\ -21\cos\cdot\sin + 22\cos^2 \end{matrix} & -13\sin + 23\cos \\ 31\cos + 32\sin & -31\sin + 32\cos & 33 \end{pmatrix}$$

元の行列と等しいので, $M_{11} = M_{22}$, $M_{12} = -M_{21}$, $M_{13} = M_{23} = M_{31} = M_{32} = 0$ となるから,

$$= \begin{pmatrix} 11 & 12 & 0 \\ 21 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}$$

x 軸まわりの回転の座標変換をして同様にすると，$M_{11} = M_{22} = M_{33}$ となり,

$$= \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & 0 \\ 0 & 0 & M_{11} \end{pmatrix} = M_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{11} diag(1,1,1) = M_{11}\delta^{ij}$$

ちなみに，$diag(1,1,1)$ のことを単位行列 I という.

練習問題 12～18　4.6 節　完全流体　　　　　　（4.36）～（4.56）

12　式（4.36）から式（4.37）を導け

13　式（4.44）の変形ができることを説明せよ．

14　式（4.46）が MCR 系での式（4.45）の時間成分であることを議論せよ．

15　式（4.47）から式（4.48）を導け．

16　MCR 系では，$U^i = 0$ である．しかし，$U^i{}_{,\beta} = 0$ とできないのはなぜか？

17　$a^\mu = U^\mu{}_{,\beta} U^\beta$ と定義した．非相対論的極限（速度の小さい極限）をとって，

$$a^i = \dot{v}^i + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v^i = Dv^i/Dt$$

であることを示せ．ここで演算子 D/Dt は，流体力学でふつうに使われる“ラグランジュ”微分または“物質”微分である．

18　$-\nabla p$ が MCR 系で流体要素の単位体積に作用する正味の力であることを示して，4.6 節の最後の議論（次欄）を精密化せよ．

相対論では，$(\rho + p/c^2)$ が“慣性質量密度”としてふるまう．式（4.54）から $(\rho + p/c^2)$ が大きくなればなるだけ，その物体を加速するのが困難になるからである．式（4.54）は本質的には $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ であって，$-p_{,i}$ が流体に作用する力になっている．すなわち，p は流体要素がその隣り合った要素に及ぼす力であるから，$-p$ がその要素に作用する力である．しかし，要素の反対側の要素も逆向きに力を及ぼしているので，流体要素に両側から作用する p に変化があるときにのみ，流体を加速する正味の力が現れるのである．$-\nabla p$ が力なのはそういう理由による．

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta} \tag{4.37}$$

$$(U^\alpha U^\gamma \eta_{\alpha\gamma})_{,\beta} = (U^\alpha U^\gamma)_{,\beta}\eta_{\alpha\gamma} = 2U^\alpha{}_{,\beta} U^\gamma \eta_{\alpha\gamma} \tag{4.44}$$

$$nU^\beta \left(\frac{\rho + p/c^2}{n} U^\alpha\right)_{,\beta} + p_{,\beta}\eta^{\alpha\beta} = 0 \tag{4.45}$$

$$nU^\beta U_\alpha \left(\frac{\rho + p/c^2}{n} U^\alpha\right)_{,\beta} + p_{,\beta}\eta^{\alpha\beta} U_\alpha = 0 \tag{4.46}$$

$$U^\beta \left[-n\left(\frac{\rho c^2 + p}{n}\right)_{,\beta} + p_{,\beta} \right] = 0 \tag{4.47}$$

$$-U^\beta \left[\rho_{,\beta} c^2 - \frac{\rho c^2 + p}{n} n_{,\beta} \right] = 0 \tag{4.48}$$

$$-U^\beta \left[\rho_{,\beta} - \frac{\rho + p/c^2}{n} n_{,\beta} \right] = 0$$

練習問題 12 の解

次式は, 完全流体の MCR 系でのストレス - エネルギーテンソル (エネルギー・運動量テンソル) である.

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

成分を書き下すと，

$$T^{00} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^0 U^0 + p\eta^{00} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) c^2 - p = \rho c^2$$

$$T^{0i} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^0 U^i + p\eta^{0i} = 0$$

$$T^{i0} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^i U^0 + p\eta^{i0} = 0$$

$$T^{ii} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^i U^i + p\eta^{ii} = p$$

$$T^{ij} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^i U^j + p\eta^{ij} = 0, \ \text{when} \quad i \neq j$$

これで，次式が証明できた．

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta} \tag{4.37}$$

上式は系に依存しない形になる．

$$\boldsymbol{T} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \vec{U} \otimes \vec{U} + p\boldsymbol{g}^{-1} \tag{4.38}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

【参考】ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）の式（4.37）をエネルギー・運動量保存則の式（4.34）に適用する．

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \tag{4.34}$$

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta}\right]_{,\beta} = 0 \tag{4.39}$$

上式は，フリーの α について 4 つの式である．

$$\left(nU^\beta\right)_{,\beta} = 0 \tag{4.40}$$

も仮定して，式（4.39）の中辺の第 1 項は，

$$\left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^\alpha U^\beta\right]_{,\beta} = \left[\frac{\rho + p/c^2}{n} U^\alpha nU^\beta\right]_{,\beta}$$

$$= \left(\frac{\rho + p/c^2}{n} U^\alpha\right)\left(nU^\beta\right)_{,\beta} + \left(\frac{\rho + p/c^2}{n} U^\alpha\right)_{,\beta} nU^\beta$$

$$= nU^\beta \left(\frac{\rho + p/c^2}{n} U^\alpha\right)_{,\beta} \tag{4.41}$$

2015.06.10
4　特殊相対論における完全流体　4.10　練習問題

式（4.39）は，

$$nU^\beta \left(\frac{\rho + p/c^2}{n} U^\alpha\right)_{,\beta} + p_{,\beta}\eta^{\alpha\beta} = 0 \tag{4.45}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 13 の解

練習問題 13 は，次式を証明することに使う．

$$U^\alpha{}_{,\beta} U_\alpha = 0 \tag{4.42}$$

式（4.43）から式（4.44）を導く過程を示すのが問題である．

$$U^\alpha U_\alpha = -c^2 \Rightarrow (U^\alpha U_\alpha)_{,\beta} = (U^\alpha U^\gamma \eta_{\alpha\gamma})_{,\beta} = 0 \tag{4.43}$$

$\eta_{\alpha\gamma} = Const.$であるので，$\eta_{\alpha\gamma,\beta} = 0$である．最後の式の左辺を部分微分して，

$$(U^\alpha U^\gamma \eta_{\alpha\gamma})_{,\beta} = (U^\alpha U^\gamma)_{,\beta}\eta_{\alpha\gamma} + (U^\alpha U^\gamma)(\eta_{\alpha\gamma,\beta}) = (U^\alpha U^\gamma)_{,\beta}\eta_{\alpha\gamma}$$

（$\eta_{\alpha\gamma} = Const.$だから微分の対象（）の外に出すという説明でもよい．）

これをさらに部分微分すると，

$$(U^\alpha U^\gamma)_{,\beta}\eta_{\alpha\gamma} = U^\alpha{}_{,\beta} U^\gamma \eta_{\alpha\gamma} + U^\gamma{}_{,\beta} U^\alpha \eta_{\alpha\gamma}$$

右辺の第 2 項に，η の対称性を適用して，ラベルを付け替えて，

$$U^\gamma{}_{,\beta} U^\alpha \eta_{\alpha\gamma} = U^\gamma{}_{,\beta} U^\alpha \eta_{\gamma\alpha} = U^\alpha{}_{,\beta} U^\gamma \eta_{\alpha\gamma}$$

さらに，$U^\gamma \eta_{\alpha\gamma} = U_\alpha$ を適用して，

$$2U^\alpha{}_{,\beta} U^\gamma \eta_{\alpha\gamma} = 2U^\alpha{}_{,\beta} U_\alpha$$

となるので，

$$(U^\alpha U^\gamma \eta_{\alpha\gamma})_{,\beta} = (U^\alpha U^\gamma)_{,\beta}\eta_{\alpha\gamma} = 2U^\alpha{}_{,\beta} U^\gamma \eta_{\alpha\gamma} \tag{4.44}$$

$$= 2U^\alpha{}_{,\beta} U_\alpha = 0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 14 の解

$\vec{U} \xrightarrow[MCRF]{} (c, 0, 0, 0)$ だから，式（4.45）に，U_α を掛け，α に関して和をとることにより，MCR 系での時間成分（0 成分）が取り出せる．

式（4.45）の時間成分は，

$$nU^{\beta}U_{\alpha}\left(\frac{\rho+p/c^2}{n}U^{\alpha}\right)_{,\beta}+p_{,\beta}\eta^{\alpha\beta}U_{\alpha}=0 \tag{4.46}$$

$$U^{\alpha}{}_{,\beta}U_{\alpha}=0,\quad U^{\alpha}U_{\alpha}=-c^2,\quad \eta^{\alpha\beta}U_{\alpha}=U^{\beta}$$

を使って，式（4.46）から，

$$U^{\beta}\left[-n\left(\frac{\rho c^2+p}{n}\right)_{,\beta}+p_{,\beta}\right]=0 \tag{4.47}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 15 の解

式（4.47）左辺

$$=U^{\beta}\left[-n\left(\frac{\rho c^2+p}{n}\right)_{,\beta}+p_{,\beta}\right]$$

$$=U^{\beta}\left[-(\rho_{,\beta}c^2+p_{,\beta})-n\left(\frac{\rho c^2+p}{-n^2}\right)+p_{,\beta}\right]$$

$$=-U^{\beta}\left[\rho_{,\beta}c^2-\left(\frac{\rho c^2+p}{n}\right)\right]$$

次式が証明できた．

$$-U^{\beta}\left[\rho_{,\beta}-\frac{\rho+p/c^2}{n}n_{,\beta}\right]=0 \tag{4.48}$$

これが，式（4.45）の時間成分である．

$\dfrac{d}{d\tau}=U^{\beta}\dfrac{d}{dx^{\beta}}$ から導ける $\dfrac{d\rho}{d\tau}=\rho_{,\beta}U^{\beta}$， $\dfrac{dn}{d\tau}=n_{,\beta}U^{\beta}$ を使って，

$$\frac{d\rho}{d\tau}-\frac{\rho+p/c^2}{n}\frac{dn}{d\tau}=0 \tag{4.49}$$

これは，エネルギー保存則を示す．

式（4.49）と式（4.25）を比べて，

$$d\rho\cdot c^2-\left(\rho c^2+p\right)dn/n=nTds \tag{4.25}$$

$$U^{\alpha}S_{,\alpha}=\frac{dS}{d\tau}=0 \tag{4.50}$$

したがって，粒子を保存する完全流体では，比エントロピーを保存する．これを断熱（adiabatic）という．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 16 の解

微分は，近傍との差を必要とするが，近傍の要素が微分対象と同じという保証はないので，微分は 0 にならない．

式（4.45）を再掲する．

$$nU^{\beta}\left(\frac{\rho+p/c^2}{n}U^{\alpha}\right)_{,\beta}+p_{,\beta}\eta^{\alpha\beta}=0 \tag{4.45}$$

上式の i 成分（空間成分）は，

$$nU^{\beta}\left(\frac{\rho+p/c^2}{n}U^{i}\right)_{,\beta}+p_{,\beta}\eta^{i\beta}=0 \tag{4.51}$$

$U^i=0$ だが， $U^i{}_{,\beta}\neq 0$ であり，

$$\left(\rho+p/c^2\right)U^i{}_{,\beta}U^{\beta}+p_{,\beta}\eta^{i\beta}=0 \tag{4.52}$$

これは，式（4.45）の空間成分であり，運動量保存則を示す．上式から，

$$\left(\rho+p/c^2\right)U_{i,\beta}U^{\beta}+p_{,i}=0 \tag{4.53}$$

ここで，

$$\frac{d}{d\tau}=\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\frac{d}{dx^{\beta}}=U^{\beta}\frac{d}{dx^{\beta}}$$

から導ける

$$a_i\equiv\frac{dU^i}{d\tau}=U^i{}_{,\beta}U^{\beta}=U_{i,\beta}U^{\beta}$$

をつかって，

◆
$$\left(\rho+p/c^2\right)a_i+p_{,i}=0 \tag{4.54}$$

上式は，非相対論的な流体力学の次式の一般化になっている．

$$\rho\boldsymbol{a}+\nabla p=0 \tag{4.55}$$

$$\text{where}\quad \boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v},\quad a_i=U_{i,\beta}U^{\beta} \tag{4.56}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 17 の解

$$\vec{U} \to (c\gamma, \gamma\boldsymbol{v}) = (c\gamma, \gamma v^1, \gamma v^2, \gamma v^3)$$

where $\beta^i = \dfrac{v^i}{c}$, $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}}$

$$\begin{aligned} a^i &= U^i{}_{,\beta}U^\beta \\ &= \frac{\partial v^i}{\partial x^0}c\gamma + \frac{\partial v^i}{\partial x^1}\gamma v^1 + \frac{\partial v^i}{\partial x^2}\gamma v^2 + \frac{\partial v^i}{\partial x^3}\gamma v^3 \\ &= \gamma\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + (\nabla v^i)\cdot\boldsymbol{v}\right) \\ &= \gamma\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v^i\right) \end{aligned}$$

where,

$$\nabla = \boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial x^3} \qquad \text{（ベクトルであることに注意）}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla = v^1\frac{\partial}{\partial x^1} + v^2\frac{\partial}{\partial x^2} + v^3\frac{\partial}{\partial x^3} \qquad \text{（ベクトルでないことに注意）}$$

$\beta \to 0$, $\gamma \to 1$ のとき,

$$a^i = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)v^i$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 18 の解

$\dfrac{dU^i}{d\tau} = U^i{}_{,\beta}U^\beta$ を使えば，式（4.52）は,

$$\frac{dU^i}{d\tau}\left(\rho + p/c^2\right) + \eta^{i\beta}\nabla_\beta p = 0 \qquad (4.52')$$

これは，運動量保存則を示す.

$\dfrac{d}{d\tau} = \dfrac{dt}{d\tau}\dfrac{d}{dt} = \gamma\dfrac{d}{dt}$ だから，上式は,

$$\gamma\frac{dU^i}{dt}\left(\rho + p/c^2\right) = -\eta^{i\beta}\nabla_\beta p \qquad (4.52'')$$

これは，加速度方程式である．ただし，運動量は，γ 倍に増えていく.

上式は，非相対論的な流体力学の次式の一般化になっている.

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right) = -\nabla p \qquad (4.55')$$

$$\frac{d\rho}{dt} = m\frac{dn}{dt}$$

where $v << c$, $p << \rho c^2$

()

19　式（4.58）がガウスの法則［式（4.57）］を証明するのに使えることを示せ.

$$\int V^{\alpha}{}_{,\alpha} d^4x = \oint V^{\alpha} n_{\alpha} d^3 s \qquad \text{式（4.57）}$$

$$\int \left[V^0(ct_2) - V^0(ct_1) \right] dxdydz$$
$$+ \int \left[V^x(x_2) - V^x(x_1) \right] cdtdydz \cdots \qquad \text{式（4.58）}$$

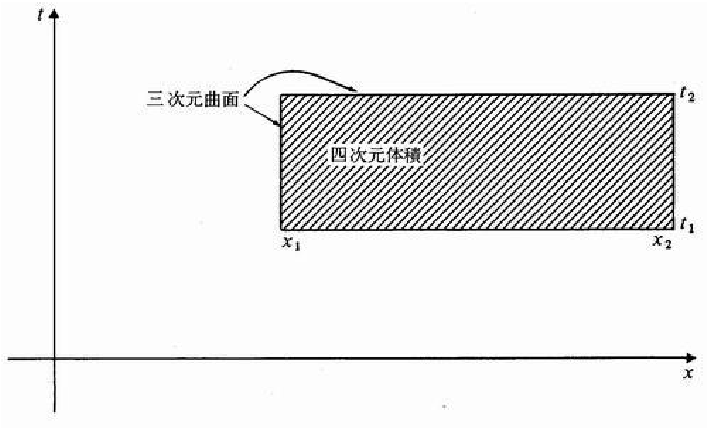


図 4.9　時空のある領域の境界

図 4.9 の境界面において，ct_2 面に垂直なのは $c\tilde{d}t$ であり，ct_1 面に垂直なのは $-c\tilde{d}t$ である．x_2 面に垂直なのは $\tilde{d}x$ であり，x_1 面に垂直なのは $-\tilde{d}x$ である．

式（4.57）の右辺

$$= \int_{ct2} V^0 dxdydz + \int_{ct} (-V^0) dxdydz$$
$$+ \int_{x2} V^x cdtdydz + \int_{x1} (-V^x) cdtdydz$$

＋境界のほかの面での同様な項

$$= \int \left[V^0(ct_2) - V^0(ct_1) \right] dxdydz$$
$$+ \int \left[V^x(x_2) - V^x(x_1) \right] cdtdydz \cdots$$
$$= \int \frac{V^0(ct_2) - V^0(ct_1)}{ct_2 - ct_1} cdtdxdydz$$
$$+ \int \frac{V^x(x_2) - V^x(x_1)}{x_2 - x_1} cdtdxdydz \cdots$$

=式（4.57）の左辺

()

20　(a)　粒子数が保存しないで，MCR 系で単位時間・単位体積あたり ε の割合で局所的に生成されるとしたら，保存則の式（4.35）は

$$N^{\alpha}{}_{,\alpha} = \varepsilon$$

となることを示せ．

(b)　(a)を一般化して物体のエネルギー・運動量が保存しない（たとえば，物体が外界と相互作用するため）とき，

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = F^{\alpha}$$

で定義される 4 元ベクトルの相対論的な力 F^{α} がある．MCR 系で F^{α} の成分について説明せよ．

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \qquad (4.34)$$

$$N^{\alpha}{}_{,\alpha} = (nU^{\alpha})_{,\alpha} = 0 \qquad (4.35)$$

(a)　$$N^{\alpha}{}_{,\alpha} = N^{0}{}_{,0} + N^{1}{}_{,1} + N^{2}{}_{,2} + N^{3}{}_{,3} = 0 \qquad (4.35)$$

$$-N^{0}{}_{,0} = N^{1}{}_{,1} + N^{2}{}_{,2} + N^{3}{}_{,3}$$

これは，単位時間・単位体積あたりの粒子数の増減量が境界での粒子の出入数でバランスしていることを示す．局所的に生成される項を足して，

$$-N^{0}{}_{,0} + \varepsilon = N^{1}{}_{,1} + N^{2}{}_{,2} + N^{3}{}_{,3}$$

したがって，与式が証明できた．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　$$T^{0\beta}{}_{,\beta} = F^{0}$$

F^{0} は単位体積あたりのエネルギー生成率である．

$$T^{i\beta}{}_{,\beta} = F^{i}$$

F^{i} は力の i 成分である．

()

21　慣性系 O で次の系のストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）の成分を計算せよ．

(a)　O で見て同じ速度 $\mathbf{v} = \beta \mathbf{e}_x$ で運動している粒子の集団，粒子の共動系で見てこれらの粒子の静止質量密度を ρ_0 とする．連続体と扱うために十分に高い密度だと仮定してよい．

(b)　N 個の同じ質量 m の粒子が，$x-y$ 面内で O の原点を中心として，角速度 ω 半径 a の円周を反時計まわりに運動している円環．この円環は断面が半径 $\delta a << a$ の円形のドーナッツ型で，その内部では粒子は一様で，連続体近似が成り立つ程度に密に分布している．それらの粒子を軌道運動させている力のストレス - エネルギーを含めないこと．（計算の途中で，(a)の ρ_0 を N，a，ω，δa で表すことになる．）

(c)　そのような円環が二つあり，それらの半径は同じ a で，一つは時計まわりで，もう一つは反時計まわりに回転している場合，粒子は衝突やほかの相互作用をしないとする．

(a)　練習問題 7 から，

$$\vec{U} \to (c\gamma, c\gamma\beta, 0, 0), \quad \text{where} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 U^{\alpha} U^{\beta}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　リング状の任意の点で，粒子の速度は，ωa である．任意の位置 (x, y) において，

$$\vec{U} \to \gamma(c, -\omega y, \omega x, 0), \quad \text{where} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2 a^2}}$$

慣性系では，その個数密度は，

$$\frac{N}{2\pi a \cdot \pi \delta a^2} = nU^{0} = nc\gamma, \quad \text{where} \quad n \text{ ；その静止系での個数密度}$$

$$n = \frac{N}{2\pi^2 c\gamma a\delta a^2}$$

これを使って，

$$T^{\alpha\beta} = mnU^{\alpha}U^{\beta}$$

$$U^{\alpha}U^{\beta} = \gamma^2 \begin{pmatrix} c \\ -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -\omega y & \omega x & 0 \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} c^2 & -c\omega y & c\omega x & 0 \\ -c\omega y & \omega^2 y^2 & -\omega^2 xy & 0 \\ c\omega x & -\omega^2 xy & \omega^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　上式の $\omega \to -\omega$ としたものと上式の和をとる．

$$U^{\alpha}U^{\beta}$$

$$= \gamma^2 \begin{pmatrix} c^2 & -c\omega y & c\omega x & 0 \\ -c\omega y & \omega^2 y^2 & -\omega^2 xy & 0 \\ c\omega x & -\omega^2 xy & \omega^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma^2 \begin{pmatrix} c^2 & c\omega y & -c\omega x & 0 \\ c\omega y & \omega^2 y^2 & -\omega^2 xy & 0 \\ -c\omega x & -\omega^2 xy & \omega^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \gamma^2 \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\omega^2 y^2 & -2\omega^2 xy & 0 \\ 0 & -2\omega^2 xy & 2\omega^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

()

22　多くの物理系は，衝突のない粒子の集団として，理想化して考えることができる（たとえば，黒体輻射，希薄プラズマ，銀河や球状星団）．そうした系では各点ごとに，ランダムな速度分布をしていて，MCR 系では方向の優位性がないと仮定して，ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）が完全流体のものであることを示せ．すべての粒子が同じ速度 v と質量 m をもつとして，p と ρ を m，v，n の関数として表せ．光子ガスでは $p = \rho c^2/3$ であることを示せ．

方向に優位性がないということは，T^{ij} が回転に対して不変であることを意味する．したがって，練習問題 11 より，ある p があって $T^{ij} = p\delta^{ij}$ とかける．MCR 系では $T^{0i} = 0$ だから，練習問題 12 の式（4.36）は成立する．

$$\left(T^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

明らかに

$$\rho = \gamma nm, \quad \text{where} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

たとえば，T^{zz} への各粒子の寄与は，それが表す運動量流速である．(θ, ϕ) 方向に速度 v をもつ一つの粒子に対しては，それは $z = Const.$ の面を $v\cos\theta$ の速度で横切るから $m\gamma v\cos\theta$ が z 運動量の成分となる．それらがランダムな速度をもっているとすれば，

$$T^{zz} = n(m\gamma v)(v) \times (\text{単位球上の}\cos^2\theta\text{の平均値} = 1/3)$$

となる．したがって，

$$T^{zz} = p = \gamma nmv^2/3$$

こうして

$$\frac{p}{\rho c^2}=\frac{1}{3}\frac{v^2}{c^2}\to\frac{1}{3},\quad when\quad \frac{v}{c}\to 1$$

この極限で，各光子のエネルギー$m\gamma$は有限にとどまる．

()

23　式$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$を使って，閉じた系（空間の閉じた領域の外部では$T^{\mu\nu}=0$となる系をいう）で次の量を計算せよ．

(a)　$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{0\alpha}d^3x=0$ （エネルギー・運動量保存）

(b)　$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int T^{00}x^ix^jd^3x=2\int T^{ij}d^3x$ （テンソルビリアル定理）

(c)　$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int T^{00}(x^ix_i)^2d^3x=4\int T^i{}_ix^jx_jd^3x+8\int T^{ij}x_ix_jd^3x$

()

24　天体の明るさの観測とは，天体から出た輻射の流速T^{0i}を地球で測定することである．この問題は流速が天体と地球の相対速度にどのように依存するかをしらべるものである．

(a)　一定の光度L（１秒あたりの全エネルギー）をもつ星の静止系Oで，事象$(t, x, 0, 0)$でのその星からの輻射のストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）の成分は，$T^{00} = T^{0x} = T^{x0} = L/(4\pi x^2)$であることを示せ．星は原点に静止している．

(b)　$\vec{X}$が輻射の放出と受信の事象をつなぐヌルベクトルだとする.事象点$(x, x, 0, 0)$で観測された輻射については$\vec{X} \xrightarrow[O]{} (x, x, 0, 0)$であることを示せ．(a)のストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）は，系に依存しない表現

$$\boldsymbol{T} = \frac{L}{4\pi}\frac{\vec{X}\otimes\vec{X}}{(\vec{U}_s\cdot\vec{X})^4}$$

をもつことを示せ．ここで，$\vec{U}_s$は星の４元速度で，$\vec{U}_s \xrightarrow[O]{} (1, 0, 0, 0)$である．

(c)　星から速度vでx方向に遠ざかっている地球に固定された観測者$\bar{O}$が，同じく$\bar{x}$軸にある星について，同じ輻射を測定とするとする．$\vec{X} \to (R, R, 0, 0)$として，Rをxの関数として求めよ．また$T^{\bar{0}\bar{x}}$をRを使って表せ．Rと$T^{\bar{0}\bar{x}}$のv依存性について説明せよ．

()

25　特殊相対論における電磁気学

真空中の電場$\boldsymbol{E}$と磁場$\boldsymbol{B}$に対するマクスウェル方程式は, 3 次元ベクトルの記号で書くと

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \qquad \left(\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \qquad \left(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\boldsymbol{j}\right)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{4.59}$$

である．（ここで，ρは電荷密度で，$\boldsymbol{j}$は電流密度である．）

(a)　反対称の$(2,0)$テンソル$\boldsymbol{F}$を時空中で式$F^{0i} = E^i/c\,(i = 1, 2, 3)$，$F^{xy} = B_z$，$F^{yz} = B_x$，$F^{zx} = B_y$によって定義することができる．この定義からこの系でのほかの成分$F^{\mu\nu}$をすべて求め，行列の形で表せ．

(b)　z軸のまわりの角度θの回転は一種のローレンツ変換で，行列

$$\Lambda^{\beta'}{}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で表される．$\boldsymbol{F}$の新しい成分

$$F^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu}\Lambda^{\beta'}{}_{\nu}F^{\mu\nu}$$

が新しい電場と磁場の３次元ベクトル成分を定義し［(a)で与えた規則に従って］，それらが古い$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{B}$を３次元空間で回転したとき得られる成分と同じであることを示せ．（このことは$\boldsymbol{F}$を空間回転することによって，$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{B}$が空間回転することを示している．）

(c)　電流４元ベクトル$\vec{J}$を$J^0 = c\rho$，$j^i = (\boldsymbol{J})^i$で定義するとき，マクスウェル方程式の二つの式は

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \mu_0 J^{\mu} \tag{4.60}$$

となることを示せ．

(d)　残りのマクスウェル方程式は

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0 \tag{4.61}$$

であることを示せ．この式には，4 個の独立な式しか含まれないことに注意せよ．すなわち，一つの添字をたとえば０に選んだとする．すると，残りの三つの値（1，2，3）を μ,ν,λ に任意の順序で割り当てると，（全体の符号を別として）そのたびごとに同じ式が得られる．実際に試してみると，これは $F_{\mu\nu}$ の反対称のためである．

(e)　こうしてマクスウェル方程式をテンソル形式で表した．電荷の保存 $J^{\mu}{}_{,\mu} = 0$［粒子数流速ベクトル $\vec{N}$ に対しての類似の式（4.35）を思い起こすとよい］は式（4.60）で保証されることを示せ．（ヒント：$F_{\mu\nu}$ の反対称性を使え．）

(f)　どの系でも電荷密度は J^0 である．したがって，時空の全電荷は $Q = \int J^0 dxdydz$ である．ここで積分範囲は $t=$ 一定の超曲面全体である．この超曲面の単位垂直を $\tilde{d}t = \tilde{n}$ で定義すると，

$$Q = \int J^{\alpha} n_{\alpha} dxdydz \tag{4.62}$$

となることを示せ．

(g)　ガウスの法則と式（4.60）を使って，$t=$ 一定の超曲面の中の任意の閉じた二次元曲面 φ の内部の電荷は J 全体にわたって積分をして，

$$Q = \frac{1}{\mu_0}\oint_{\varphi} F^{0i} n_i d\varphi = c\varepsilon_0 \oint_{\varphi} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n} d\varphi$$

で求めることができることを示せ．ここで $\boldsymbol{n}$ は超曲面の中の φ の単位垂直である．［前問の(f)の $\tilde{n}$ とは同じではない．］

(h)　上記(a)で使った系に対して x 方向に速度 v で運動している系 $\overline{O}$ へ $F^{\mu\nu}$ をローレンツ変換せよ．この系において，(a)と同じやり方で，３次元ベクトル $\overline{\boldsymbol{E}}$ を成分 $\overline{E}^i / c = F^{\bar{0}\bar{i}}$ で，また $\overline{\boldsymbol{B}}$ も同様な成分で定義せよ．そして $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が

2015.06.10
4　特殊相対論における完全流体　4.10　練習問題

ローレンツ変換でどうふるまうかしらべよ．それらは混じり合ってしまう．こうして $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ 自身はローレンツ不変ではなく，ファラデー・テンソルという $\boldsymbol{F}$ の成分でしかなく，相対論で電磁場の不変な表現はこのファラデー・テンソルであることになる．注意深く考えれば，物理的にそれらの量が不変ではありえないことがわかる．特に，磁場は運動する電荷によってつくられるが，一つの系で動いている電荷は，他の系では静止していることがあり，ある系で存在する磁場が他の系では存在しなくなる．すべての系で同じなのはファラデー・テンソルであり，その成分のみが変換されるのである．

(a)　電場と $\boldsymbol{E}$ 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ についてのファラデー・テンソル（電磁場テンソル）は，次の行列である．

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^x}{c} & \frac{E^y}{c} & \frac{E^z}{c} \\ -\frac{E^x}{c} & 0 & B^z & -B^y \\ -\frac{E^y}{c} & -B^z & 0 & B^x \\ -\frac{E^z}{c} & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}$$

導出法は，このホームページの「マクスウェル方程式」を参照のこと．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　ベクトルの空間回転の座標変換の問題である．

z 軸まわりの回転の座標変換行列は，

$$\Lambda^{\beta'}{}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

座標変換式は，

$$F^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu}\Lambda^{\beta'}{}_{\nu}F^{\mu\nu} \tag{2}$$

次のファラデー･テンソルを座標変換する．

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{E^x}{c} & \frac{E^y}{c} & \frac{E^z}{c} \\ -\frac{E^x}{c} & 0 & B^z & -B^y \\ -\frac{E^y}{c} & -B^z & 0 & B^x \\ -\frac{E^z}{c} & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

式（2）は,

$$(\bar{f})=(\Lambda)^T(f)(\Lambda)$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \frac{E^x}{c}\cos-\frac{E^y}{c}\sin & \frac{E^y}{c}\cos+\frac{E^x}{c}\sin & \frac{E^z}{c} \\ -\frac{E^x}{c}\cos+\frac{E^y}{c}\sin & 0 & B^z & -B^y\cos-B^x\sin \\ -\frac{E^y}{c}\cos-\frac{E^x}{c}\sin & -B^z & 0 & B^x\cos-B^y\sin \\ -\frac{E^z}{c} & B^y\cos+B^x\sin & -B^x\cos+B^y\sin & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

一方，空間座標回転は,

$$\begin{pmatrix} A^{\bar{x}} \\ A^{\bar{y}} \\ A^{\bar{z}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^x \\ A^y \\ A^z \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A^x\cos\theta-A^y\sin\theta \\ A^y\cos\theta+A^x\sin\theta \\ A^z \end{pmatrix} \qquad (5)$$

式（3）に式（5）を代入すると，式（4）が得られる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　ファラデー・テンソルを微分すると，マクスウェル方程式が導出できる．

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t & \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F^{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{c}}\mathrm{div}\boldsymbol{E} & \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\rho}{c\varepsilon_0} & \mu_0\boldsymbol{j} \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu}=\mu_0 J^\mu \qquad (4.60)$$

導出法は，このホームページの「マクスウェル方程式」を参照のこと．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　問題の式は，ビアンキ恒等式という．

$$F_{\mu\nu,\lambda}+F_{\nu\lambda,\mu}+F_{\lambda\mu,\nu}=0 \qquad (4.61)$$

これをファラデー・テンソルに適用すると，マクスウェル方程式が導出できる．導出法は，このホームページの「マクスウェル方程式」を参照のこと．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(e)　反対称性 $F^{\nu\mu}=-F^{\mu\nu}$ と対称性 $\partial_\nu\partial_\mu=\partial_\mu\partial_\nu$ を使って

$$\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu}=-\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu}=-\partial_\nu\partial_\mu F^{\nu\mu}=-\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu}=0$$

$$\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu}=0$$

式（m.22）$\partial_\nu F^{\mu\nu}=\mu_0 J^\mu$ から，電荷の保存則が得られる．

$$\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu}=\mu_0\partial_\mu J^\mu=\mu_0 J^\mu{}_{,\mu}=0$$

$$J^\mu{}_{,\mu}=0$$

導出法は，このホームページの「マクスウェル方程式」を参照のこと．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(f)　超曲面 $\phi(t,x,y,z)=Const.$ のなかで，$\phi=t$ を選べば，$t=Const.$ 面を横切る流速を算出できる．この超曲面の単位垂直 1 形式は，$\tilde{n}=\tilde{d}t\to(1,0,0,0)$ であり，これを横切る流速は,

$$\tilde{n}(\vec{J})=\langle\tilde{n},\vec{J}\rangle=J^\alpha n_\alpha=J^0$$

したがって，与式が得られた．

$$Q=\int J^0 dxdydz=\int J^\alpha n_\alpha dxdydz$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(g)　ガウスの定理は，つぎの式である．

$$\int V^{\alpha}{}_{,\alpha} d^4x = \oint V^{\alpha} n_{\alpha} d^3S \tag{4.57}$$

問題(f)に式（m.22）を適用すると，

$$Q = \int J^0 dxdydz = \frac{1}{\mu_0}\int F^{0\nu}{}_{,\nu} dxdydz$$

ガウスの定理を適用すると，$F^{00} = 0$ を考慮して，

$$\frac{1}{\mu_0}\int F^{0\nu}{}_{,\nu} dxdydz = \frac{1}{\mu_0}\oint F^{0i} n_i d\varphi$$

一方，$F^{0i} = \dfrac{E^i}{c}$ であるから，

$$F^{0i}{}_{,i} = \frac{1}{c}E^i{}_{,i} = \frac{1}{c}\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{c}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}$$，where $\boldsymbol{n}$；単位法線ベクトル

したがって，与式が証明できた．

$$Q = \frac{1}{\mu_0}\oint_{\varphi} F^{0i} n_i d\varphi = \frac{1}{c\mu_0}\oint_{\varphi} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n} d\varphi = c\varepsilon_0 \oint_{\varphi} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n} d\varphi$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(h)　$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1 \quad \beta = \dfrac{v}{c} < 1$

ファラデー・テンソルのローレンツ・ブーストを求める．

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{E^{\bar{x}}}{c} & \frac{E^{\bar{y}}}{c} & \frac{E^{\bar{z}}}{c} \\ -\frac{E^{\bar{x}}}{c} & 0 & B^{\bar{z}} & -B^{\bar{y}} \\ -\frac{E^{\bar{y}}}{c} & -B^{\bar{z}} & 0 & B^{\bar{x}} \\ -\frac{E^{\bar{z}}}{c} & B^{\bar{y}} & -B^{\bar{x}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^{x}}{c} & \frac{E^{y}}{c} & \frac{E^{z}}{c} \\ -\frac{E^{x}}{c} & 0 & B^{z} & -B^{y} \\ -\frac{E^{y}}{c} & -B^{z} & 0 & B^{x} \\ -\frac{E^{z}}{c} & B^{y} & -B^{x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^{x}}{c} & \gamma\frac{E^{y}}{c} - \gamma\beta B^{z} & \gamma\frac{E^{z}}{c} + \gamma\beta B^{y} \\ -\frac{E^{x}}{c} & 0 & \gamma B^{z} - \gamma\beta\frac{E^{y}}{c} & -\gamma B^{y} - \gamma\beta\frac{E^{z}}{c} \\ -\gamma\frac{E^{y}}{c} + \gamma\beta B^{z} & -\gamma B^{z} + \gamma\beta\frac{E^{y}}{c} & 0 & B^{x} \\ -\gamma\frac{E^{z}}{c} - \gamma\beta B^{y} & \gamma B^{y} + \gamma\beta\frac{E^{z}}{c} & -B^{x} & 0 \end{pmatrix}$$

成分を比較して，

$$E^{\bar{x}} = E^{x}$$
$$\boldsymbol{E}'_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{E}_{\perp} + \mathrm{v}\times\boldsymbol{B}_{\perp})$$
$$B^{\bar{x}} = B^{x}$$
$$\boldsymbol{B}'_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{B}_{\perp} + \frac{1}{c^2}\mathrm{v}\times\boldsymbol{E}_{\perp})$$

where　$\boldsymbol{E}_{\perp} = E^{y}\boldsymbol{e}_{x} + E^{z}\boldsymbol{e}_{z}$，　$\boldsymbol{B}_{\perp} = B^{y}\boldsymbol{e}_{x} + B^{z}\boldsymbol{e}_{z}$

$\boldsymbol{E}'_{\perp} = E^{\bar{y}}\boldsymbol{e}_{\bar{x}} + E^{\bar{z}}\boldsymbol{e}_{\bar{z}}$，　$\boldsymbol{B}'_{\perp} = B^{\bar{y}}\boldsymbol{e}_{\bar{x}} + B^{\bar{z}}\boldsymbol{e}_{\bar{z}}$

$v = c\beta$