3　特殊相対論におけるテンソル解析

テンソル解析，メトリック（計量），共変ベクトル，反変ベクトル，１形式，縮約，写像，勾配，共変微分

3.1　メトリックテンソル

$$\vec{A} = A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} = A^0\vec{e}_0 + A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3$$

$$\vec{B} = B^{\beta}\vec{e}_{\beta} = B^0\vec{e}_0 + B^1\vec{e}_1 + B^2\vec{e}_2 + B^3\vec{e}_3$$

【表記法】４元ベクトル（基底ベクトルも）は，→付で表す．３元ベクトル（基底ベクトルも）は，太文字で表す．

これらのスカラー積（ドット積）は，

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\right)\cdot\left(B^{\beta}\vec{e}_{\beta}\right) = A^{\alpha}B^{\beta}\left(\vec{e}_{\alpha}\cdot\vec{e}_{\beta}\right) = A^{\alpha}B^{\beta}\eta_{\alpha\beta}$$

◆ $$\vec{A}\cdot\vec{B} = A^{\alpha}B^{\beta}\eta_{\alpha\beta} \qquad (3.1)$$

$$A^{\alpha}B^{\alpha}\eta_{\alpha\beta} = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3$$

$$\vec{e}_{\alpha}\cdot\vec{e}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} = diag(-1,1,1,1)$$

3.2　テンソルの定義

◆ $(0,N)$ テンソルとは N 個のベクトルから実数への関数で，その N 変数のおのおのについて線形なものをいう．

第１の変数についての線形性は次式を意味する．

$$\left(\alpha\vec{A}\right)\cdot\vec{B} = \alpha\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$$

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{C} \qquad (3.2)$$

第２の変数についての線形性は次式を意味する．

$$\vec{A}\cdot\left(\beta\vec{B}\right) = \beta\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$$

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C} \qquad (3.2b)$$

$\boldsymbol{g}$ をメトリックテンソルとすると，定義から，

$$\boldsymbol{g}\left(\vec{A},\vec{B}\right) \equiv \vec{A}\cdot\vec{B} \qquad (3.3)$$

$\boldsymbol{g}(\ \ ,\ \ )$ は二つの変数をとり，それらについて線形な関数である．

$$\boldsymbol{g}\left(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B},\vec{C}\right) = \alpha\,\boldsymbol{g}\left(\vec{A},\vec{C}\right) + \beta\,\boldsymbol{g}\left(\vec{B},\vec{C}\right) \qquad (3.4)$$

第２の変数についても同様.

メトリックテンソルの成分は，

◆ $$\boldsymbol{g}\left(\vec{e}_{\alpha},\vec{e}_{\beta}\right) = \vec{e}_{\alpha}\cdot\vec{e}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \qquad (3.5)$$

3.3　(0, 1) テンソル：１形式

(0, 1) テンソルは，コベクトル，共変ベクトル，１形式とよばれる．

１形式の線形性

$$\tilde{s} = \tilde{p} + \tilde{q}$$

$$\tilde{r} = \alpha\,\tilde{p} \qquad (3.6a)$$

次の式は実数を与える．

$$\tilde{s}\left(\vec{A}\right) = \tilde{p}\left(\vec{A}\right) + \tilde{q}\left(\vec{A}\right)$$

$$\tilde{r}\left(\vec{A}\right) = \alpha\,\tilde{p}\left(\vec{A}\right) \qquad (3.6b)$$

１形式の成分

$$p_{\alpha} \equiv \tilde{p}\left(\vec{e}_{\alpha}\right) \qquad (3.7)$$

次の操作を $\vec{A}$ と $\tilde{p}$ との縮約とよぶ.

$\tilde{p}$ は関数，$\vec{A}$ は変数ともいわれる．$\vec{A}$ から $\tilde{p}$ への写像ともいわれる．

$$\tilde{p}\left(\vec{A}\right) = \tilde{p}\left(A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\right) = A^{\alpha}\,\tilde{p}\left(\vec{e}_{\alpha}\right)$$

$$\tilde{p}\left(\vec{A}\right) = A^{\alpha}\,p_{\alpha} \qquad (3.8)$$

$\tilde{p}$ の基底 $\{\vec{e}_{\bar{\beta}}\}$ 上の成分は，

$$p_{\bar{\beta}} \equiv \tilde{p}\left(\vec{e}_{\bar{\beta}}\right) = \tilde{p}\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}\vec{e}_{\alpha}\right) = \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}\,\tilde{p}\left(\vec{e}_{\alpha}\right) = \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}\,p_{\alpha}$$

$$p_{\bar{\beta}} = \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}\,p_{\alpha} \qquad (3.9)$$

１形式の変換行列は基底ベクトルのそれと同じ．つまりベクトルの逆変換行列である．

縮約は座標に依存しない．

$$A^{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} = \left(\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta}\right)\left(\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} p_{\mu}\right) \tag{3.10a}$$

$$= \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta} p_{\mu} \tag{3.10b}$$

$$= \delta^{\mu}{}_{\beta} A^{\beta} p_{\mu} \tag{3.10c}$$

$$= A^{\beta} p_{\beta} \tag{3.10d}$$

１形式の表記法（双対な基底を使って）

$$\tilde{p} = p_{\alpha} \tilde{\omega}^{\alpha} \tag{3.11}$$

１形式をこれで定義してもかまわないのだが，ここでは，双対性から定義している．

基底１形式の定義（基底ベクトルにより表現する）

◆ $$\tilde{\omega}^{\alpha}(\vec{e}_{\beta}) = \delta^{\alpha}{}_{\beta} \tag{3.12}$$

基底１形式の成分

$$\tilde{\omega}^{0} \xrightarrow[O]{} (1, 0, 0, 0)$$

$$\tilde{\omega}^{1} \xrightarrow[O]{} (0, 1, 0, 0)$$

$$\tilde{\omega}^{2} \xrightarrow[O]{} (0, 0, 1, 0)$$

$$\tilde{\omega}^{3} \xrightarrow[O]{} (0, 0, 0, 1)$$

基底１形式の座標変換

$$\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} \tilde{\omega}^{\beta} \tag{3.13}$$

変換行列はベクトルのそれと同じである．

１形式の描像

１形式は表面の列として表される．

１形式をベクトルに作用させたとき得られる数はベクトルの矢が貫く表面の数である．

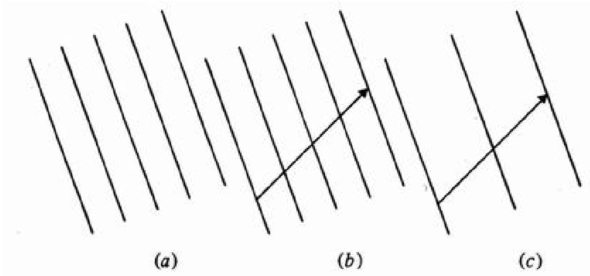


図 3.1 （a）矢としてのベクトルの描像と相補的な一形式の描像．（b）ある与えられたベクトル上での一形式の値は，ベクトルの矢が貫く表面の数である．（c）同じベクトル上でのより小さな一形式の値は，貫く表面の数が少ない．より大きな一形式ほど，空間をより細かくスライスする．

関数の微分は１形式である

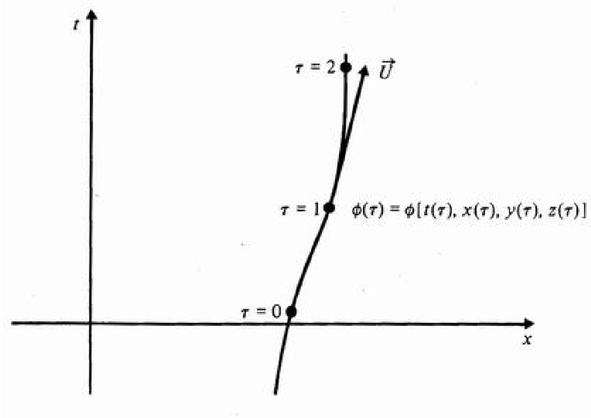


図 3.2 固有時間 τ でパラメーターづけられた世界線とそれに沿ってのスカラー場 ϕ（t，x，y，z）の値 ϕ（τ）

世界線の座標

$$\left[ct = ct(\tau),\ x = x(\tau),\ y = y(\tau),\ z = z(\tau)\right]$$

４元速度（接ベクトル）

$$\vec{U} \to \left(\frac{cdt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right)$$

スカラー場ϕ

$$\phi(\tau) = \phi[ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)]$$

その曲線上での変化率（微分）

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\partial\phi}{c\partial t}\frac{cdt}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{d\tau}$$

$$= \frac{\partial\phi}{c\partial t}U^0 + \frac{\partial\phi}{\partial x}U^1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}U^2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}U^3 = \phi_{,\alpha}U^\alpha \qquad (3.14)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \phi_{,\alpha}U^\alpha$$

スカラー場の微分は接ベクトルと接１形式の縮約だから，

次式は接１形式（勾配）の定義

$$\tilde{d}\phi \xrightarrow[O]{} \left(\frac{\partial\phi}{c\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \qquad (3.15)$$

$$\tilde{d}\phi \xrightarrow[O]{} (\phi_{,0}, \phi_{,1}, \phi_{,2}, \phi_{,3})$$

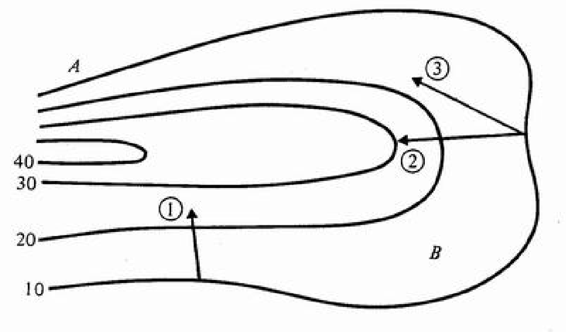


図 3.3　地形図は勾配一形式（局所的な等高線）を例示している．任意の経路（矢）に沿っての高さの変化は，その矢が交差する線の数である．

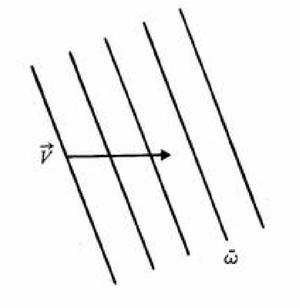


図 3.4　値 $\tilde{\omega}$ （$\vec{V}$） は 2.5 である．

$$(\tilde{d}\phi)_{\bar{\alpha}} = \Lambda^\beta{}_{\bar{\alpha}}(\tilde{d}\phi)_\beta \qquad (3.16)$$

$$(\tilde{d}\phi)_{\bar{\alpha}} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\bar{\alpha}}}(\tilde{d}\phi)_\beta \qquad (3.17)$$

◆
$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\bar{\alpha}}} = \Lambda^\beta{}_{\bar{\alpha}}, \quad x^\beta{}_{,\bar{\alpha}} = \Lambda^\beta{}_{\bar{\alpha}} \qquad (3.18)$$

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha{}_\beta, \quad x^\alpha{}_{,\beta} = \delta^\alpha{}_\beta$$

から，基底１形式は，

$$\tilde{d}x^\alpha \equiv \tilde{\omega}^\alpha \qquad (3.20)$$

【表記法】

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \equiv \phi_{,\alpha} \qquad (3.19)$$

【ポイント】接ベクトルと接１形式の厳密な定義は，次を参照のこと．

5.9 練習問題４　$\{x = f(\lambda), y = g(\lambda), 0 \le \lambda \le 1\}$ によって定義される曲線がある．接ベクトル $(dx/d\lambda, dy/d\lambda)$ が実際にこの曲線に接することを示せ．

解）

ここでは，２次元 (x, y) 座標空間を考える． x, y はパラメーターλの関数とすると，x, y がつくる曲線は，λがつくる一次元実数軸から２次元曲線経路への写像である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

スカラー場ϕを次式とする.

$$\phi = \phi(x(\lambda), y(\lambda))$$

接ベクトルは次式である.

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{dx}{d\lambda}\vec{e}_x + \frac{dy}{d\lambda}\vec{e}_y$$

where $dx/d\lambda$, $dy/d\lambda$は接ベクトルの成分

$\partial/\partial x = \vec{e}_x$, $\partial/\partial y = \vec{e}_y$は基底ベクトル

接１形式（勾配）は次式である.

$$\tilde{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\tilde{d}x^i = \frac{\partial\phi}{\partial x}\tilde{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\tilde{d}y = \frac{\partial\phi}{\partial x}\tilde{\omega}^x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\tilde{\omega}^y$$

where $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$は接１形式の成分

$\tilde{d}x = \tilde{\omega}^x$, $\tilde{d}y = \tilde{\omega}^y$は基底１形式

スカラー場ϕの曲線に沿っての微分（スカラー場ϕのλ方向の微分）は，接ベクトルと接１形式の縮約である.

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{dy}{d\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial y} = \left\langle \tilde{d}\phi, \frac{d}{d\lambda} \right\rangle \tag{5.19}$$

接ベクトル$d/d\lambda$と接１形式$\tilde{d}\phi$はスカラー場ϕをつくるお互いに関数の関係にある.

3.4　(0, 2) テンソル

問題 15　　(3.21)　～　(3.26)

$$f_{\alpha\beta} = \boldsymbol{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) \tag{3.21}$$

$$\boldsymbol{f}(\vec{A}, \vec{B}) = \boldsymbol{f}(A^\alpha \vec{e}_\alpha, B^\beta \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta \boldsymbol{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$$

$$= A^\alpha B^\beta f_{\alpha\beta} \tag{3.22}$$

（0,2）テンソルを基底で定義すると,

$$\boldsymbol{f} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha\beta} \tag{3.23}$$

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \delta^\alpha{}_\mu \delta^\beta{}_\nu \tag{3.24}$$

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta} = \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta \tag{3.25}$$

◆ $$\boldsymbol{f} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta \tag{3.26}$$

対称性　　(3.27)　～　(3.36)

テンソルが対称であるとき

$$\boldsymbol{f}(\vec{A}, \vec{B}) = \boldsymbol{f}(\vec{B}, \vec{A}) \quad \forall\ \vec{A}, \vec{B} \tag{3.27}$$

$\vec{A} = \vec{e}_\alpha$, $\vec{B} = \vec{e}_\beta$ とおくと,

$$f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha} \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{h}_{(S)}(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A}, \vec{B}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B}, \vec{A}) \tag{3.29}$$

その成分は,

$$h_{(S)\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}\right) \tag{3.30}$$

上式を次式で定義する.

◆ $$h_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}\right) \tag{3.31}$$

テンソルが反対称であるとき

$$\boldsymbol{f}(\vec{A}, \vec{B}) = -\boldsymbol{f}(\vec{B}, \vec{A}) \quad \forall\ \vec{A}, \vec{B} \tag{3.32}$$

$$f_{\alpha\beta} = -f_{\beta\alpha} \tag{3.33}$$

$$\boldsymbol{h}_{(A)}(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A}, \vec{B}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B}, \vec{A})$$

$$h_{(S)\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}\right)$$

上式を次式で定義する.

◆ $$h_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\beta} - h_{\beta\alpha}\right) \tag{3.34}$$

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\beta} - h_{\beta\alpha}\right)$$

$$h_{\alpha\beta} = h_{(\alpha\beta)} + h_{[\alpha\beta]} \qquad (3.35)$$

任意の（0,2）テンソルは，その対称部分と反対称部分に一意的に分けることができる．

メトリックテンソルは，対称である．

$$\boldsymbol{g}(\vec{A}, \vec{B}) = \boldsymbol{g}(\vec{B}, \vec{A}) \qquad (3.36)$$

3.5　ベクトルから１形式への写像としてのメトリック

$$\boldsymbol{g}(\vec{V},\ \ ) \equiv \tilde{V}(\ \ ) \qquad (3.37)$$

メトリックテンソル $\boldsymbol{g}(\vec{V},\ \ )$ の空スロットにベクトルを入れると実数になるので，これは，実数をつくり出すベクトル変数の線形関数つまり１形式である．

$\tilde{V}$ は，そのベクトル $\vec{A}$ 上での値が， $\vec{A}\cdot\vec{V}$ となる１形式である．

$$\tilde{V}(\vec{A}) \equiv \boldsymbol{g}(\vec{V}, \vec{A}) = \vec{V}\cdot\vec{A} \qquad (3.38)$$

メトリックテンソルは対称だから，

$$\boldsymbol{g}(\ \ ,\vec{V}) \equiv \tilde{V}(\ \ ) \qquad (3.37b)$$

$\tilde{V}$ の成分は，

$$V_\alpha = \tilde{V}(\vec{e}_\alpha) = \vec{V}\cdot\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha\cdot\vec{V} = \vec{e}_\alpha\cdot\left(V^\beta\vec{e}_\beta\right) = \left(\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta\right)V^\beta$$

◆ $$V_\alpha = \eta_{\alpha\beta}V^\beta \qquad (3.39)$$

$$V_0 = -V^0 \qquad (3.40)$$

$$V_1 = +V^1 \text{など} \qquad (3.40)$$

もし， $\vec{V} \to (a, b, c, d)$ ，ならば，

$$\tilde{V} \to (-a, b, c, d) \qquad (3.42)$$

◆ $$A^\alpha = \eta^{\alpha\beta}V_\beta \qquad (3.43)$$

$$\eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \qquad (3.44)$$

$\tilde{d}\phi$ に附随するベクトル $\vec{d}\phi$ は， $\phi = \mathrm{Const.}$ の表面に直交する．

$\vec{d}\phi$ と $\phi = \mathrm{Const.}$ の面内のベクトル $\vec{V}$ の内積は，写像の定義から， $\tilde{d}\phi$ がそのベクトル $\vec{V}$ 上でとる値 $\tilde{d}\phi(\vec{V})$ に等しい．

ところが， $\tilde{d}\phi(\vec{V})$ は ϕ の $\vec{V}$ に沿っての変化率で， $\vec{V}$ は $\phi = \mathrm{Const.}$ の面内にあるから，ゼロでである．

$$\vec{d}\phi\cdot\vec{V} = \tilde{d}\phi(\vec{V}) = 0$$

なぜ１形式とベクトルを区別するのか？

勾配

$$\tilde{d}\phi \to \left(\frac{\partial\phi}{c\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \qquad (3.15)$$

$\tilde{d}\phi$ に附随するベクトル $\vec{d}\phi$ は， $\phi = \mathrm{Const.}$ の表面に直交する．

$$\vec{d}\phi \to \left(-\frac{\partial\phi}{c\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \qquad (3.45)$$

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ \vdots \end{pmatrix} = ap + bq + \cdots \qquad (3.46)$$

１形式の大きさとスカラー積

１形式 $\tilde{p}$ は，それに附随するベクトル $\vec{p}$ と同じ大きさをもつ．

$$\tilde{p}^2 = \vec{p}^2 = \eta_{\alpha\beta}\,p^\alpha p^\beta \qquad (3.47)$$

式（3.43）を使うと，

$$\tilde{p}^2 = \eta_{\alpha\beta}\left(\eta^{\alpha\mu}p_\mu\right)\left(\eta^{\beta\nu}p_\nu\right) \qquad (3.48)$$

$$\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\nu} = \eta^\nu{}_\alpha = \delta^\nu{}_\alpha \qquad (3.49)$$

◆ $$\tilde{p}^2 = \eta^{\alpha\mu}p_\mu p_\alpha \eta_{\alpha\beta} \qquad (3.50)$$

$$\tilde{p}^2 = -(p_0)^2 + (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 \qquad (3.51)$$

１形式どうしの内積の定義

$$\tilde{p}\cdot\tilde{q}\equiv\frac{1}{2}\left[(\tilde{p}+\tilde{q})^2-\tilde{p}^2-\tilde{q}^2\right] \tag{3.52}$$

その成分は,

$$\tilde{p}\cdot\tilde{q}=-p_0q_0+p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3 \tag{3.53}$$

3.6　(M,N) テンソル

ベクトルは1形式を実数に写像にする線形関数である.

$$\vec{V}(\tilde{p})\equiv\tilde{p}(\vec{V})\equiv p_\alpha V^\alpha\equiv\left\langle\tilde{p},\vec{V}\right\rangle \tag{3.54}$$

(M,0) テンソルの定義

(M,0) テンソルとは M 個の1形式から実数への関数である.

(2,0) テンソルは, $\vec{V}\otimes\vec{W}$ で, それは二つの変数 $\tilde{p}$ と $\tilde{q}$ が与えられると実数 $\vec{V}(\tilde{p})\vec{W}(\tilde{q})\equiv\tilde{p}(\vec{V})\tilde{q}(\vec{W})\equiv V^\alpha p_\alpha W^\beta q_\beta$ を与える. したがって $\vec{V}\otimes\vec{W}$ は成分 $V^\alpha W^\beta$ をもつ. (2,0) テンソルに対する基底は, $\vec{e}_\alpha\otimes\vec{e}_\beta$ である.

(M,0) テンソルの成分は基底1形式 $\tilde{\omega}^\alpha$ を変数としたときの値である.

◆　(M,N) テンソルとは M 個の1形式と N 個のベクトルから実数への関数である.

(1,1) テンソル $\boldsymbol{R}$ を考える. 実数 $\boldsymbol{R}(\tilde{p};\vec{A})$ を与えるために1つの1形式 $\tilde{p}$ と1つのベクトル $\vec{A}$ を必要とする. それは成分 $\boldsymbol{R}(\tilde{\omega}^\alpha;\vec{e}_\beta)\equiv R^\alpha{}_\beta$ をもつ.

新しい系では,

$$R^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\beta}}=\boldsymbol{R}(\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}};\vec{e}_{\bar{\beta}})=\boldsymbol{R}(\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_\mu\tilde{\omega}^\mu;\Lambda^\nu{}_{\bar{\beta}}\vec{e}_\nu)$$

$$R^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\beta}}=\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_\mu\Lambda^\nu{}_{\bar{\beta}}R^\mu{}_\nu \tag{3.55}$$

3.7　添字の"上げ"と"下げ"

$$T^\alpha{}_{\beta\gamma}\equiv\eta_{\beta\mu}T^{\alpha\mu}{}_\gamma \tag{3.56}$$

$$T_\alpha{}^\beta{}_\gamma\equiv\eta_{\alpha\mu}T^{\mu\beta}{}_\gamma \tag{3.57}$$

$$T^{\alpha\beta\gamma}\equiv\eta^{\gamma\mu}T^{\alpha\beta}{}_\mu \tag{3.58}$$

$$\eta^\alpha{}_\beta\equiv\eta^{\alpha\mu}\eta_{\mu\beta} \tag{3.59}$$

◆

$$\eta^\alpha{}_\beta\equiv\delta^\alpha{}_\beta \tag{3.60}$$

3.8　テンソルの微分

関数 f は, (0,0) テンソルであり, その勾配 $\tilde{d}f$ は, (0,1) テンソルである.
微分は共変階数が1だけ高いテンソルをつくりだす.

固有時間 τ をパラメーターとして世界線に沿って動く次の (1,1) テンソルを考える.

$$\boldsymbol{T}=T^\alpha{}_\beta\tilde{\omega}^\beta\otimes\vec{e}^\alpha \tag{3.61}$$

T の変化率

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{d\tau}=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{\boldsymbol{T}(\tau+\Delta\tau)-\boldsymbol{T}(\Delta\tau)}{\Delta\tau} \tag{3.62}$$

$\tilde{\omega}^\alpha(\tau+\Delta\tau)=\tilde{\omega}^\alpha(\Delta\tau)$ だから,

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{d\tau}=\left(\frac{dT^\alpha{}_\beta}{d\tau}\right)\tilde{\omega}^\beta\otimes\vec{e}_\alpha \tag{3.63}$$

$$\frac{dT^\alpha{}_\beta}{d\tau}=\frac{dT^\alpha{}_\beta}{dx^\gamma}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=T^\alpha{}_{\beta,\gamma}U^\gamma \tag{3.64}$$

$$\nabla_{\vec{U}}\boldsymbol{T}\equiv\frac{d\boldsymbol{T}}{d\tau}\equiv\left(T^\alpha{}_{\beta,\gamma}\tilde{\omega}^\beta\otimes\vec{e}_\alpha\right)U^\gamma \tag{3.65}\ (3.67)$$

ここで,

$$\vec{U}=\frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

は, 世界線の接ベクトルである. (3.65) を成分表示すると,

$$\nabla_{\vec{U}} \boldsymbol{T} \xrightarrow[O]{} \{T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma} U^{\gamma}\} \tag{3.68}$$

式（3.65）は（1,1）テンソルの微分で（1,1）テンソルである．

$$\nabla \boldsymbol{T} \equiv T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma} \tilde{\omega}^{\beta} \otimes \tilde{\omega}^{\gamma} \otimes \vec{e}_{\alpha} \tag{3.66}$$

式（3.66）は $\boldsymbol{T}$ の勾配で（1,2）テンソルである．これは，共変微分である．

【表記法】∇はナブラと呼称する．または delta の逆で atled と呼ぶ．

∇はハミルトンの微分演算子であり，ここでは３次元空間のものと同じ定義である．

節の中で使われている公式と問題

3.1　メトリックテンソル　（3.1）

問題 1

3.2　テンソルの定義　（3.2）～（3.5）

3.3　（0,1）テンソル：１形式　（3.6）～（3.20）

問題 2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13，22

3.4　（0,2）テンソル　（3.21）～（3.36）

問題 14，15，16

3.5　ベクトルから１形式への写像としてのメトリック　（3.37）～（3.53）

問題 17，18，19，20，21

3.6　（M,N）テンソル　（3.54）～（3.55）

問題 23

3.7　添字の“上げ”と“下げ”　（3.56）～（3.60）

問題 24，25，26，27

3.8　テンソルの微分　（3.61）～（3.68）

問題 28，29，30

問題 31，32，33，34

（3.1）

1　(a)　任意の数の集合 $\{M_{\alpha\beta}, \alpha=0,\cdots,3; \beta=0,\cdots,3\}$ と二つの任意のベクトル成分の集合 $\{A^{\mu}, \mu=0,\cdots,3\}$ と $\{B^{\nu}, \nu=0,\cdots,3\}$ が与えられている．このとき次の二つの表現が同等でないことを示せ．

$$M_{\alpha\beta}A^{\alpha}B^{\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\alpha=0}^{3} M_{\alpha\beta}A^{\alpha}B^{\beta}$$

および

$$\sum_{\alpha=0}^{3} M_{\alpha\alpha}A^{\alpha}B^{\alpha}$$

(b)　次式を示せ．

$$A^{\alpha}B^{\alpha}\eta_{\alpha\beta} = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3 \qquad (3.1)$$

(a)　1 式は 16 個の項の和，2 式は 4 個の項の和．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　これはベクトルのスカラー積の公式であり，

$$\eta_{\alpha\beta} = diag(-1, 0, 0, 0)$$

は，メトリックテンソルである．書き下して，

$$\eta_{00} = -1，\ \eta_{0i} = 0，\ \eta_{ij} = \delta_{ij}$$

を適用すれば与式が導出できる．

【解説】ベクトルとは（1,0）テンソルのことをいう．旧くは，反変ベクトルといった．

（3.6a）

2　すべての 1 形式のつくる空間がベクトル空間であることを示せ．

ベクトル空間の定理は，

・ 1 形式と 1 形式の和は 1 形式になる．

・ 1 形式の実数倍は 1 形式になる．

この定理は，次式で示される．

$$\tilde{s} = \tilde{p} + \tilde{q}$$
$$\tilde{r} = \alpha\,\tilde{p} \qquad (3.6a)$$

【解説】1 形式とは（0,1）テンソルのことをいう．旧くは，共変ベクトルまたはコベクトルといった．

（3.8）

3　(a)　すべての項を書き下すことによって，次式が正しいことを証明せよ．

$\tilde{p}(A^\alpha \vec{e}_\alpha) = A^\alpha \tilde{p}(\vec{e}_\alpha)$　　（3.8）の前の式

(b)　$\tilde{p}$ の成分を $(-1, 1, 2, 0)$，$\vec{A}$ と $\vec{B}$ の成分を，それぞれ $(2, 1, 0, -1)$，$(0, 2, 0, 0)$ とする．(i) $\tilde{p}(\vec{A})$ (ii) $\tilde{p}(\vec{B})$ (iii) $\tilde{p}(\vec{A}-3\vec{B})$ (iv) $\tilde{p}(\vec{A})-3\tilde{p}(\vec{B})$ を求めよ．

【表記法】４元ベクトルは→付きで表す．３元ベクトルは太文字で表し，これは断りのないかぎり３次元空間ベクトルである．１形式は～（チルド）付きで表し，断りのないかぎり４元１形式である．

１形式を次式で表す．

$$\tilde{p} = p_\beta \tilde{\omega}^\beta = p_0\tilde{\omega}^0 + p_1\tilde{\omega}^1 + p_2\tilde{\omega}^2 + p_3\tilde{\omega}^3$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(a)

$$\tilde{p}(A^\alpha \vec{e}_\alpha) = A^\alpha \tilde{p}(\vec{e}_\alpha)$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (p_\beta \tilde{\omega}^\beta)\cdot(A^\alpha \vec{e}_\alpha) \\
&= A^0 p_0 \vec{e}_0\cdot\tilde{\omega}^0 + A^0 p_1 \vec{e}_0\cdot\tilde{\omega}^1 + A^0 p_2 \vec{e}_0\cdot\tilde{\omega}^2 + A^0 p_3 \vec{e}_0\cdot\tilde{\omega}^3 \\
&\quad + A^1 p_0 \vec{e}_1\cdot\tilde{\omega}^0 + A^1 p_1 \vec{e}_1\cdot\tilde{\omega}^1 + A^1 p_2 \vec{e}_1\cdot\tilde{\omega}^2 + A^1 p_3 \vec{e}_1\cdot\tilde{\omega}^3 \\
&\quad + A^2 p_0 \vec{e}_2\cdot\tilde{\omega}^0 + A^2 p_1 \vec{e}_2\cdot\tilde{\omega}^1 + A^2 p_2 \vec{e}_2\cdot\tilde{\omega}^2 + A^2 p_3 \vec{e}_2\cdot\tilde{\omega}^3 \\
&\quad + A^3 p_0 \vec{e}_3\cdot\tilde{\omega}^0 + A^3 p_1 \vec{e}_3\cdot\tilde{\omega}^1 + A^3 p_2 \vec{e}_3\cdot\tilde{\omega}^2 + A^3 p_3 \vec{e}_3\cdot\tilde{\omega}^3
\end{aligned}$$

双対基底は,

$$\vec{e}_\alpha \cdot \tilde{\omega}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta$$

なので,

$$\text{左辺} = A^0 p_0 + A^1 p_1 + A^2 p_2 + A^3 p_3$$

この操作は縮約とよばれる．（メトリックテンソルなしで定義できる．）

$$\text{右辺} = A^\alpha (p_\beta \tilde{\omega}^\beta)(\vec{e}_\alpha) = \text{上式と同じ.}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

(i)

$$\tilde{p}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$$

(ii)

$$\tilde{p}(\vec{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

(iii)

$$\tilde{p}(\vec{A}-3\vec{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -7$$

(iv)

$$\tilde{p}(\vec{A}) - 3\tilde{p}(\vec{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -1 - 6 = -7$$

（3.8）

4　O で次のベクトルが与えられているとする．

$$\vec{A} \underset{O}{\longrightarrow} (2,1,1,0),\quad \vec{B} \underset{O}{\longrightarrow} (1,2,0,0),$$

$$\vec{C} \underset{O}{\longrightarrow} (0,0,1,1),\quad \vec{D} \underset{O}{\longrightarrow} (-3,2,0,0)$$

(a)　これらが線形独立であることを示せ．

(b)　$\tilde{p}$ が次式を満たすとき，その成分を求めよ．

$$\tilde{p}(\vec{A}) = 1,\quad \tilde{p}(\vec{B}) = -1,\quad \tilde{p}(\vec{C}) = -1,\quad \tilde{p}(\vec{D}) = 0$$

(c)　次のベクトル $\vec{E}$ に対して，$\tilde{p}(\vec{E})$ の値を求めよ．

$$\vec{E} \underset{O}{\longrightarrow} (1,1,0,0)$$

(d)　１形式 $\tilde{p}$，$\tilde{q}$，$\tilde{r}$，$\tilde{s}$ が，次式を満たすとき，それらが線形独立であるかどうかを示せ．

$$\tilde{q}(\vec{A}) = \tilde{q}(\vec{B}) = 0,\quad \tilde{q}(\vec{C}) = 1,\quad \tilde{q}(\vec{D}) = -1,$$

$$\tilde{r}(\vec{A}) = 2,\quad \tilde{r}(\vec{B}) = \tilde{r}(\vec{C}) = \tilde{r}(\vec{D}) = 0,$$

$$\tilde{s}(\vec{A}) = -1,\quad \tilde{s}(\vec{B}) = -1,\quad \tilde{s}(\vec{C}) = \tilde{s}(\vec{D}) = 0$$

(a)　成分で行列式をつくり，その値が０でなければ線形独立である．

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　次の４連立１次方程式を解く．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

クラーメルの公式を使って，

2015.06.12
3　特殊相対論におけるテンソル解析　3.10　練習問題

$$p_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{1}{4},\quad p_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{3}{8}$$

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{15}{8},\quad p_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{23}{8}$$

$$\tilde{p} \underset{O}{\longrightarrow} \left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{15}{8}, -\frac{23}{8}\right)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)

$$\tilde{p}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{15}{8} & -\frac{23}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8} = -\frac{5}{8}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　次の４つの４連立１次方程式を解く．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 & q_0 & r_0 & s_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左辺の１つめの行列と右辺の行列が線形独立であれば，左辺の２つめの行列が線形独立であることが証明できる．

（3.10）

5　式（3.10a）から式（3.10d）に至るステップを確認せよ．

$$A^{\overline{\alpha}} p_{\overline{\alpha}} = (\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta})(\Lambda^{\mu}{}_{\overline{\alpha}} p_{\mu}) \tag{3.10a}$$

$$= \Lambda^{\mu}{}_{\overline{\alpha}} \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta} p_{\mu} \tag{3.10b}$$

$$= \delta^{\mu}{}_{\beta} A^{\beta} p_{\mu} \tag{3.10c}$$

$$= A^{\beta} p_{\beta} \tag{3.10d}$$

ベクトルから１形式への写像（操作は縮約）が系のとり方に依存しないこと，つまり

$$\tilde{p}(\vec{A}) = A^{\overline{\alpha}} p_{\overline{\alpha}} = A^{\beta} p_{\beta}$$

を証明する．

A^{β} と p_{μ} の変換式は，

$$A^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta}, \quad p_{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\mu}{}_{\overline{\alpha}} p_{\mu}$$

１形式に対しては逆変換行列を使っていることに注意．

変換後の $\tilde{p}(\vec{A})$ は，

$$A^{\overline{\alpha}} p_{\overline{\alpha}} = (\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta})(\Lambda^{\mu}{}_{\overline{\alpha}} p_{\mu}) \tag{3.10a}$$

順序は入れ換えられるので，

$$= \Lambda^{\mu}{}_{\overline{\alpha}} \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta} p_{\mu} \tag{3.10b}$$

逆変換行列は変換行列の逆行列であるから，

$$= \delta^{\mu}{}_{\beta} A^{\beta} p_{\mu} \tag{3.10c}$$

$\delta^{\mu}{}_{\beta} p_{\mu} = p_{\beta}$ であるから，

$$= A^{\beta} p_{\beta} \tag{3.10d}$$

（）

6　系 O の基底 $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ と，次の１形式の空間の基底 $(\tilde{\lambda}^0, \tilde{\lambda}^1, \tilde{\lambda}^3, \tilde{\lambda}^4)$ を考える．

$$\tilde{\lambda}^0 \underset{O}{\longrightarrow} (1, 1, 0, 0)$$

$$\tilde{\lambda}^1 \underset{O}{\longrightarrow} (1, -1, 0, 0)$$

$$\tilde{\lambda}^2 \underset{O}{\longrightarrow} (0, 0, 1, -1)$$

$$\tilde{\lambda}^3 \underset{O}{\longrightarrow} (0, 0, 1, 1)$$

$\{\tilde{\lambda}^{\beta}\}$ は $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ の双対基底ではないことに注意せよ．

(a)　任意の $\tilde{p}$ に対して， $\tilde{p} \neq \tilde{p}(\vec{e}_{\alpha})\tilde{\lambda}^{\alpha}$ であることを示せ．

(b)　 $\tilde{p} \underset{O}{\longrightarrow} (1, 1, 1, 1)$ とするとき，次のようになる数 l_{α} を見つけよ．

$$\tilde{p} = l_{\alpha} \tilde{\lambda}^{\alpha}$$

これらの数は， $\tilde{p}$ の $\{\tilde{\lambda}^{\alpha}\}$ 上の成分である．

【表記法】{ }はセットを表す．書き下すとき( )を使う．

基底１形式（双対基底）を $\{\tilde{\omega}^{\alpha}\}$ とする．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(a)

$\{\vec{e}_{\alpha}\}$ の双対基底を $\{\tilde{\omega}^{\alpha}\}$ とする． $\tilde{p}$ の成分は，

$$p_{\alpha} = \tilde{p}(\vec{e}_{\alpha}) \tag{3.7}$$

であるから， $\tilde{p}$ の双対基底 $\{\tilde{\omega}^{\alpha}\}$ 上の成分表示は，

$$\tilde{p} = p_{\alpha} \tilde{\omega}^{\alpha} = \tilde{p}(\vec{e}_{\alpha}) \tilde{\omega}^{\alpha}$$

となる．一方， $\tilde{p}$ の基底 $\{\tilde{\lambda}^{\alpha}\}$ 上の成分表示

$$\tilde{p} = l_{\alpha} \tilde{\lambda}^{\alpha}$$

とすると，基底が明らかに異なるから，

$$l_{\alpha} \neq p_{\alpha} = \tilde{p}(\vec{e}_{\alpha}), \quad \tilde{p} \neq \tilde{p}(\vec{e}_{\alpha}) \tilde{\lambda}^{\alpha}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　これは，問題(a)の例証である．

次の４連立１次方程式をクラーメルの公式で解く．

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_0\\ l_1\\ l_2\\ l_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-4$$

$$l_0=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-4}{-4}=1$$

$$l_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=0$$

$$l_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=1$$

$$l_3=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=0$$

$$\tilde{l}\xrightarrow[O]{}(-4,1,0,1)$$

（3.13）

7　式（3.13）を証明せよ．
$\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}}=\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\tilde{\omega}^{\beta}$　　(3.13)

基底１形式の変換式は，

$$\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}}=\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\tilde{\omega}^{\beta}\qquad(3.13)$$

この式の意味するところは，

O系（観測系）から$\bar{O}$系への座標変換では，

・基底１形式はベクトルの成分と同じ変換行列を使い，

・１形式の成分は基底ベクトルと同じ逆変換行列を使う．

$\bar{O}$系からO系（観測系）への座標変換では，

・基底１形式はベクトルの成分と同じ逆変換行列を使い，

・１形式の成分は基底ベクトルと同じ変換行列を使う．

基底ベクトルの変換式は，逆変換行列を使って，

$$\vec{e}_{\bar{\mu}}=\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\mu}}\vec{e}_{\nu}$$

変換先での基底ベクトルを基底１形式へ写像する．

$$\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}}(\vec{e}_{\bar{\mu}})=\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\mu}}\tilde{\omega}^{\beta}(\vec{e}_{\nu})$$

$$=diag(1,1,1,1)diag(1,1,1,1)=diag(1,1,1,1)=\delta^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\mu}}$$

双対基底であることが確認できたので，与式が正しいことが証明された．

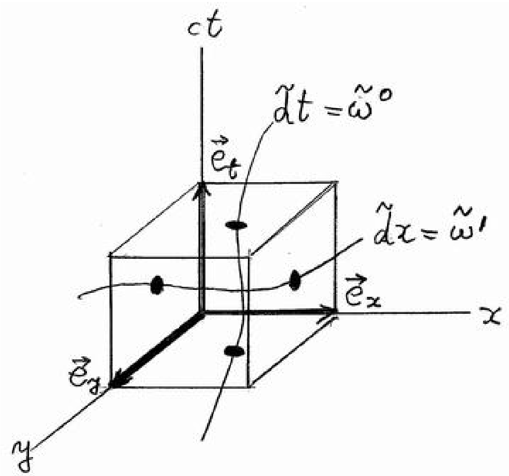
()

8　系 O の基底 1 形式 $\tilde{d}t$ と $\tilde{d}x$ を描け.

【表記法】ミンコフスキー時空は，他書では， x^0, x^1, x^2, x^3 軸で描くが，シュッツ著では， ct, x, y, z 軸で描くことが多い．適宜使い分ける．自然単位では，$x^0 = t$，SI 単位では， $x^0 = ct$ であることに注意.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

１形式は表面の列のイメージであり，ベクトルとの縮約は矢が貫く表面の数である．１形式が大きいほど貫く表面の数は多い.



()

9　図 3.5 は，ある金属板上の温度 T の等しい（等温）曲線を示している．図の点 P と Q で，勾配 $\tilde{d}T$ の成分を評価せよ．（ヒント：その成分は基底ベクトルとの縮約であり，基底ベクトルが交差する等温曲線の数で評価される．）

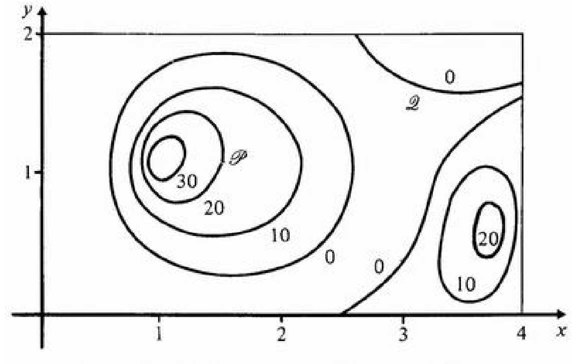


図 3.5　非一様に熱せられた金属板の等温曲線

$\tilde{d}T(P) \rightarrow (-15, -15)$

$\tilde{d}T(Q) \rightarrow (0, 0)$

（3.18）

10　(a)　座標 $\{x^{\alpha}\}$ をもつ系 O が与えられたとき，次式を示せ．

$$\partial x^{\alpha}/\partial x^{\beta}=\delta^{\alpha}{}_{\beta}$$

(b)　任意の二つの系の間には，次の式が成り立つ．

$$\partial x^{\beta}/\partial x^{\bar{\alpha}}=\Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}} \qquad (3.18)$$

(a)と合成関数の微分の規則から次式を示せ．

$$\Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\mu}=\delta^{\beta}{}_{\mu}$$

(a)　偏微分の定義から，

when　$\alpha\neq\beta$，$\partial x^{\alpha}/\partial x^{\beta}=0$

when　$\alpha=\beta$，$\partial x^{\alpha}/\partial x^{\beta}=1$

したがって，与式が証明できた．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　これは，逆変換行列は変換行列の逆行列であることを意味する．

$$\Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\mu}=\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\bar{\alpha}}}\frac{\partial x^{\bar{\alpha}}}{\partial x^{\mu}}=\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\mu}}=\delta^{\beta}{}_{\mu}$$

（3.14）（3.15）（3.18）

11　記法 $\partial\phi/\partial x^{\alpha}=\phi_{,\alpha}$ を使って，式（3.14），（3.15），（3.18）を書き直せ．

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}=\frac{\partial\phi}{c\partial t}\frac{c\partial t}{\partial\tau}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\tau}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\tau}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\tau}$$

$$=\frac{\partial\phi}{c\partial t}U^{0}+\frac{\partial\phi}{\partial x}U^{1}+\frac{\partial\phi}{\partial y}U^{2}+\frac{\partial\phi}{\partial z}U^{3} \qquad (3.14)$$

$$\tilde{d}\phi\xrightarrow[O]{}\left(\frac{\partial\phi}{c\partial t},\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \qquad (3.15)$$

$$\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\bar{\alpha}}}=\Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}} \qquad (3.18)$$

【表記法】ミンコフスキー時空は，他書では，x^{0},x^{1},x^{2},x^{3} 軸で描くが，シュッツ著では，ct,x,y,z 軸で描くことが多い．適宜使い分ける．自然単位では，$x^{0}=t$，SI 単位では，$x^{0}=ct$ であることに注意．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}=\frac{\partial\phi}{c\partial t}\frac{c\partial t}{\partial\tau}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\tau}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\tau}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\tau}$$

$$=\frac{\partial\phi}{c\partial t}U^{0}+\frac{\partial\phi}{\partial x}U^{1}+\frac{\partial\phi}{\partial y}U^{2}+\frac{\partial\phi}{\partial z}U^{3} \qquad (3.14)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}=\phi_{,\alpha}U^{\alpha}$$

$$\tilde{d}\phi\xrightarrow[O]{}\left(\frac{\partial\phi}{c\partial t},\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \qquad (3.15)$$

$$\tilde{d}\phi\xrightarrow[O]{}\left(\phi_{,0},\phi_{,1},\phi_{,2},\phi_{,3}\right)$$

$$\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\bar{\alpha}}}=\Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}} \qquad (3.18)$$

$$x^{\beta}{}_{,\bar{\alpha}}=\Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}}$$

()

12　S を３次元空間における２次元面 $x=0$ とし，$\tilde{n}\neq 0$ を，S の垂直１形式とする．

(a)　$\vec{V}$ を S に接しないベクトルとすると，$\tilde{n}(\vec{V})\neq 0$ であることを示せ．

(b)　$\tilde{n}(\vec{V})>0$ とすると，$\vec{V}$ と同じ S の側を指している任意の $\vec{W}$ に対して（すなわち，その x 成分が V^x と同じ符号をもつ任意の $\vec{W}$），$\tilde{n}(\vec{W})>0$ であることを示せ．

(c)　S の任意の垂直１形式は，$\tilde{n}$ の定数倍であることを示せ．

(d)　以上のことを４次元時空の任意の３次元表面に対して一般化せよ．

(a)　$\vec{V}$ を S の接ベクトルとすると，$\tilde{n}(\vec{V})=0$ である．接ベクトルでないと，$\tilde{n}(\vec{V})\neq 0$ である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　$\vec{T}$ を S の接ベクトルとすると，

$$\vec{W}=\alpha\vec{V}+\vec{T},\quad (\alpha>0)$$

と表せる．よって，

$$\tilde{n}(\vec{W})=\alpha\tilde{n}(\alpha\vec{V}+\vec{T})=\alpha\tilde{n}(\vec{V})$$

であり，同符号となる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　S は $x=0$ であるので $y-z$ 平面である．その接ベクトルを

$$\vec{T}\to(0,b,c)$$

とする．$\tilde{n}$ と任意の垂直１形式 $\tilde{m}$ について，

$$\tilde{n}(\vec{T})=0,\quad \tilde{m}(\vec{T})=0$$

であるから，

$$\tilde{n}\to(a,0,0),\quad \tilde{m}\to(d,0,0)$$

したがって，S の任意の垂直１形式は，$\tilde{n}$ の定数倍である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　局所的に，デカルト座標とデカルト基底を導入する．

()

13　幾何学的あるいは代数的議論によって，$\tilde{d}f$ が $f = \text{Const.}$ の面に対して垂直であることを示せ．

勾配を等高線のイメージで考える．

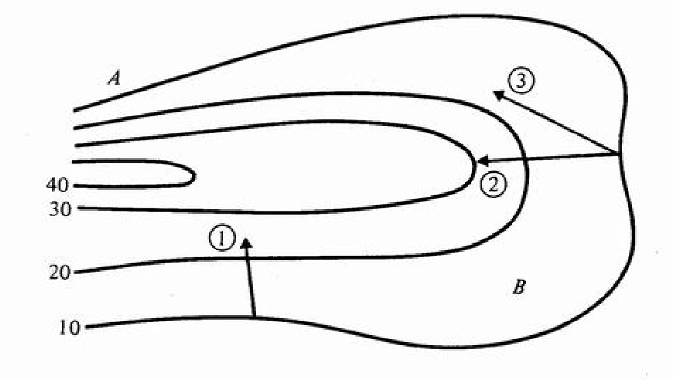


図 3.3　地形図は勾配一形式（局所的な等高線）を例示している．任意の経路（矢）に沿っての高さの変化は，その矢が交差する線の数である．

f を高度として，勾配の成分は，

$$\tilde{d}f \xrightarrow[O]{} \left(\frac{\partial f}{\partial x^0}, \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) = \left(\phi_{,0}, \phi_{,1}, \phi_{,2}, \phi_{,3}\right)$$

任意の経路 $\Delta\vec{x}$ に沿っての高さの変化 Δf は，$\Delta\vec{x}$ 上での $\tilde{d}f$ の値，すなわち，$\Delta\vec{x}$ と $\tilde{d}f$ との縮約である．

$$\Delta f = \tilde{d}f(\Delta\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\Delta x^i$$

$f = \text{Const.}$ ならば，$\Delta f = 0$ なので，$\Delta\vec{x}$ 上での $\tilde{d}f$ の値がゼロになり，垂直といえる．

()

14　$\tilde{p} \xrightarrow[O]{} (1,1,0,0)$ と $\tilde{q} \xrightarrow[O]{} (-1,0,1,0)$ を二つの 1 形式とする．二つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ を変数として使って，$\tilde{p}\otimes\tilde{q} \neq \tilde{q}\otimes\tilde{p}$ を示せ．次に $\tilde{p}\otimes\tilde{q}$ の成分を見つけよ．

直接書き下すと，

$$\tilde{p}\otimes\tilde{q} = p_\alpha q_\beta = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}\otimes\tilde{p} = q_\alpha p_\beta = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

（3.21）～（3.26）

15　式（3.23）から式（3.24）に至る理由づけをせよ．
$\boldsymbol{f} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ （3.23） $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu,\vec{e}_\nu) = \delta^\alpha{}_\mu\delta^\beta{}_\nu$ （3.24）

４次元で考える．

（0,2）テンソルは，２個のベクトルから実数への関数であり，その成分は，4×4＝16 個ある．

$$f_{\alpha\beta} = \boldsymbol{f}(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta) \tag{3.21}$$

任意のベクトル上の f の値は,

$$\boldsymbol{f}(\vec{A},\vec{B}) = \boldsymbol{f}(A^\alpha\vec{e}_\alpha, B^\beta\vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta\boldsymbol{f}(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta)$$

$$= A^\alpha B^\beta f_{\alpha\beta} \tag{3.22}$$

（0,2）テンソルを基底で定義すると,

$$\boldsymbol{f} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha\beta} \tag{3.23}$$

【ポイント】成分×基底が 16 項あると言っているに過ぎない．$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ は 16 個の基底を表している．

この基底を定義できるならば，（3.21）から,

$$f_{\mu\nu} = \boldsymbol{f}(\vec{e}_\mu,\vec{e}_\nu) = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu,\vec{e}_\nu)$$

（3.22）が成り立つためには,

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu,\vec{e}_\nu) = \delta^\alpha{}_\mu\delta^\beta{}_\nu \tag{3.24}$$

でなければならない．$\delta^\alpha{}_\mu$ は $\tilde{\omega}^\alpha$ の $\vec{e}_\mu$ での値であり，$\delta^\beta{}_\nu$ は $\tilde{\omega}^\beta$ の $\vec{e}_\nu$ での値であるので,

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta} = \tilde{\omega}^\alpha\otimes\tilde{\omega}^\beta \tag{3.25}$$

となり，$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ は（0,2）テンソルの基底となりうる．

任意の（0,2）テンソルは次のように書くことができる．

◆ $$\boldsymbol{f} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^\alpha\otimes\tilde{\omega}^\beta \tag{3.26}$$

【ポイント】⊗記号は外積である．４項×４項が 16 項になる．メトリックテンソルは関与しない．問題 14 を参照のこと．

（3.29）～（3.34）

16　(a)　次式で定義されるテンソルが，対称テンソルであることを示せ．

◇　$$\boldsymbol{h}_{(S)}(\vec{A},\vec{B})=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{B})+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B},\vec{A}) \qquad (3.69)$$

(b)　次式で定義されるテンソルが，反対称テンソルであることを示せ．

◇　$$\boldsymbol{h}_{(A)}(\vec{A},\vec{B})=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{B})-\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B},\vec{A}) \qquad (3.70)$$

(c)　練習問題 14 で定義された $\tilde{p}\otimes\tilde{q}$ の対称部分と反対称部分の成分を見つけよ．

(d)　h が反対称テンソルなら，任意のベクトル $\vec{A}$ に対して

$$\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{A})=0$$

であることを証明せよ．

(e)　$\boldsymbol{h}_{(S)}$ と $\boldsymbol{h}_{(A)}$ の独立な成分の数を求めよ．

(a)

$$\boldsymbol{h}_{(S)}(\vec{B},\vec{A})=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B},\vec{A})+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{B})=\boldsymbol{h}_{(S)}(\vec{A},\vec{B})$$

ゆえに，対称テンソルである．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

$$\boldsymbol{h}_{(A)}(\vec{B},\vec{A})=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B},\vec{A})-\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{B})=-\boldsymbol{h}_{(A)}(\vec{A},\vec{B})$$

ゆえに,反対称テンソルである．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　式（3.31）を使って，

$$\tilde{p}\otimes\tilde{q}_{(\alpha\beta)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

式（3.34）を使って，

$$\tilde{p}\otimes\tilde{q}_{[\alpha\beta]}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　問題(b)の結果を使って，

$$\boldsymbol{h}_{(A)}(\vec{A},\vec{A})=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{A})-\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{A})=0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(e)　対称テンソルは，独立な成分は，10 個．

$$\boldsymbol{h}_{(S)}=\begin{pmatrix}h_{11}&a&b&c\\a&h_{22}&d&e\\b&d&h_{33}&f\\c&e&f&h_{44}\end{pmatrix}$$

反対称テンソルは，独立な成分は，6 個．

$$\boldsymbol{h}_{(A)}=\begin{pmatrix}0&a&b&c\\-a&0&d&e\\-b&-d&0&f\\-c&-e&-f&0\end{pmatrix}$$

()

17　(a)　h を任意の二つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ に対して，次の性質をもつ（0,2）テンソルとする．

$$\boldsymbol{h}(\quad,\vec{A})=\alpha\boldsymbol{h}(\quad,\vec{B})$$

ここで α は，$\vec{A}$ と $\vec{B}$ に依存する数である．このとき，次のような 1 形式 $\tilde{p}$ と $\tilde{q}$ が存在することを示せ．

$$\boldsymbol{h}=\tilde{p}\otimes\tilde{q}$$

(b)　$\boldsymbol{T}$ を（1,1）テンソル，$\tilde{\omega}$ を 1 形式，$\vec{v}$ をベクトル，$\boldsymbol{T}(\tilde{\omega};\vec{v})$ を $\boldsymbol{T}$ の $\tilde{\omega}$ と $\vec{v}$ 上での値とする．このとき，$\boldsymbol{T}(\quad;\vec{v})$ はベクトル，$\boldsymbol{T}(\tilde{\omega};\quad)$ は 1 形式である．すなわち，（1,1）テンソルは，ベクトルからベクトルへの，1 形式から 1 形式への写像を与えることを示せ．

(a)　与式は両辺とも 1 形式であり，

$$\boldsymbol{h}(\quad,\vec{B})=b\tilde{p}$$

とすると，

$$\boldsymbol{h}(\quad,\vec{A})=a\tilde{p}\quad\text{where}\quad a=\alpha b$$

となる．両辺とも実数との掛算になっているので，

$$\boldsymbol{h}(\quad,\vec{B})=(\tilde{q}(\vec{B}))\tilde{p}=b\tilde{p}$$

$$\boldsymbol{h}(\quad,\vec{A})=(\tilde{q}(\vec{A}))\tilde{p}=a\tilde{p}$$

となる $\tilde{q}$ が存在するので，与式は次のような形に書ける．

$$\boldsymbol{h}=\tilde{p}\otimes\tilde{q}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

$\boldsymbol{T}(\quad;\vec{v})$ は，空スロットに 1 形式の変数を入れると実数になるので，ベクトルである．

$\boldsymbol{T}(\quad;\quad)$ は，右スロットにベクトル変数を入れると，$\boldsymbol{T}(\quad;\vec{v})$ というベクトルになるので，ベクトルからベクトルへの写像を与えるといえる．

$\boldsymbol{T}(\tilde{\omega};\quad)$ は，空スロットにベクトルの変数を入れると実数になるので，1 形式

である．

$\boldsymbol{T}(\quad;\quad)$ は，左スロットに 1 形式の変数を入れると，$\boldsymbol{T}(\tilde{\omega};\quad)$ という 1 形式になるので，1 形式から 1 形式への写像を与えるといえる．

（3.39）（3.43）

18　(a)　メトリックテンソルによって次のベクトルから写像された１形式を見つけよ．

$$\vec{A} \xrightarrow[O]{} (1, 0, -1, 0)\,,\quad \vec{B} \xrightarrow[O]{} (0, 1, 1, 0)\,,$$

$$\vec{C} \xrightarrow[O]{} (-1, 0, -1, 0)\,,\quad \vec{D} \xrightarrow[O]{} (0, 0, 1, 1)$$

(b)　次の１形式からメトリックテンソルの逆によって写像されたベクトルを見つけよ．

$$\tilde{p} \xrightarrow[O]{} (3, 0, -1, -1)\,,\quad \tilde{q} \xrightarrow[O]{} (1, -1, 1, 1)\,,$$

$$\tilde{r} \xrightarrow[O]{} (0, -5, -1, 0)\,,\quad \tilde{s} \xrightarrow[O]{} (-2, 1, 0, 0)$$

(a)　式（3.39）（3.42）を使って，時間成分 A^0 等のみ符号を反転する．

$$\tilde{A} \xrightarrow[O]{} (-1, 0, -1, 0)\,,\quad \tilde{B} \xrightarrow[O]{} (0, 1, 1, 0)\,,$$

$$\tilde{C} \xrightarrow[O]{} (1, 0, -1, 0)\,,\quad \tilde{D} \xrightarrow[O]{} (0, 0, 1, 1)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　式（3.43）を使って，時間成分 p_0 等のみ符号を反転する．

$$\vec{p} \xrightarrow[O]{} (-3, 0, -1, -1)\,,\quad \vec{q} \xrightarrow[O]{} (-1, -1, 1, 1)\,,$$

$$\vec{r} \xrightarrow[O]{} (0, -5, -1, 0)\,,\quad \vec{s} \xrightarrow[O]{} (2, 1, 0, 0)$$

（3.52）（3.53）

19　(a)　行列の掛算をすることにより，$\{\eta^{\alpha\beta}\}$ が $\{\eta_{\alpha\beta}\}$ の逆であることを示せ．

(b)　式（3.53）を示せ．

$$\tilde{p}\cdot\tilde{q} = -p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \qquad (3.53)$$

(a)

$$(\eta^{\alpha\beta})(\eta_{\alpha\beta}) = diag(1, 1, 1, 1)$$

を書き下して，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　１形式のスカラー積

$$\tilde{p}\cdot\tilde{q} = \frac{1}{2}[(\tilde{p}+\tilde{q})^2 - \tilde{p}^2 - \tilde{q}^2] \qquad (3.52)$$

$$= \frac{1}{2}[-(p_0+q_0)^2 + (p_1+q_1)^2 + (p_2+q_2)^2 + (p_3+q_3)^2$$

$$-(-p_0{}^2 + p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2) - (-q_0{}^2 + q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2)]$$

$$\tilde{p}\cdot\tilde{q} = -p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \qquad (3.53)$$

()

20　３次元ユークリッド空間のデカルト座標では，ベクトルと１形式の成分は等しいので，ふつうそれらを区別しない．このことを二段階にわたって示せ．

(a)　もし，行列$\{\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\beta}\}$がその逆の転置行列に等しい（このような行列を直交行列という）なら，次の二つの変換は同じものであることを示せ．

$$A^{\bar\alpha} = \Lambda^{\bar\alpha}{}_{\beta} A^{\beta}$$

および

$$P_{\bar\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\bar\beta} P_{\alpha} \qquad （P_{\bar\mu} = \Lambda^{\nu}{}_{\bar\mu} P_{\nu}）$$

(b)　このような空間のメトリックは，成分$\{\delta_{ij}, i, j = 1,\cdots,3\}$成分をもつ．一つのデカルト座標から，別のデカルト座標への変換が次式に従い，その式は$\{\Lambda^{k}{}_{\bar i}\}$が直交行列であることを意味することを示せ．

$$\delta_{\bar i\bar j} = \Lambda^{k}{}_{\bar i}\Lambda^{l}{}_{\bar j}\delta_{kl}$$

特殊相対論で，これに対応することについては，練習問題 32 を見よ．

(a)

問題の２式の$\Lambda^{\alpha}{}_{\bar\beta}$（逆変換行列）は１式の$\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\beta}$（変換行列）の転置行列を意味していないので，混乱のないように，２式を（　）内のように書き換えておく．

直交行列は次を意味する．

$$\left(\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\beta}\right)^{-1} = \left(\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\beta}\right)^{T}$$

逆変換行列は変換行列の逆行列であるから，

$$\left(\Lambda^{\mu}{}_{\bar\nu}\right) = \left(\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\beta}\right)^{-1} = \left(\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\beta}\right)^{T}$$

結果的に，与式の２式の逆変換行列は，１式の変換行列の転置行列となり，１式ではフリーは行の$\bar\alpha$，ダミーは列のβであり，２式ではフリーは列の$\bar\mu$，ダミーは行のνであるので，変換は同じものとなる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

問題とは別に，系Oから系$\overline{O}$へのローレンツ変換をミンコフスキー時空で考える．与式の１式は，ベクトルの成分または基底１形式の変換式であり，変換行列は$\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\beta} = \Lambda(v)$であり，

$$\begin{pmatrix} A^{\bar0} \\ A^{\bar1} \\ A^{\bar2} \\ A^{\bar3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & \Lambda^{\bar\alpha}{}_{\beta}(v) & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{0} \\ A^{1} \\ A^{2} \\ A^{3} \end{pmatrix}$$

を表し，フリーは行の$\bar\alpha$，ダミーは列のβである．

与式の２式は，１形式の成分またはベクトル基底の変換式であり，逆変換行列は$\Lambda^{\nu}{}_{\bar\mu} = \Lambda(-v)$であり，

$$\begin{pmatrix} P_{\bar0} & P_{\bar1} & P_{\bar2} & P_{\bar3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{0} & P_{1} & P_{2} & P_{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \Lambda^{\nu}{}_{\bar\mu}(-v) & \\ & & \end{pmatrix}$$

を表し，フリーは列の$\bar\mu$，ダミーは行のνである．

このように，ミンコフスキー時空では与式の１式の変換行列と２式の逆変換行列は異なるものである．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

（0,2）テンソルの変換式を求める．

$$\delta_{\bar i\bar j} = \delta(\vec e_{\bar i}\ ; \vec e_{\bar j}) = \delta(\Lambda^{k}{}_{\bar i}\vec e_{k}\ ; \Lambda^{l}{}_{\bar j}\vec e_{l}) = \Lambda^{k}{}_{\bar i}\Lambda^{l}{}_{\bar j}\delta_{kl}$$

ここで，$\Lambda^{k}{}_{\bar i} = \Lambda^{l}{}_{\bar j}$であり，$\bar i$，$\bar j$がフリー，$k$，$l$がダミーであるから，

$$[\Lambda^{k}{}_{\bar i}]^{T}[\Lambda^{k}{}_{\bar i}] = diag(1,1,1)$$

したがって，$\{\Lambda^{k}{}_{\bar i}\}$は直交行列である．

()

21　(a)　$ct-x$ 平面の直線 $ct=0$，$ct=1$，$x=0$，$x=1$ で囲まれる領域を考える．おのおのの境界について，単位垂直 1 形式とそれに付随するベクトルを見つけよ．

(b)　座標値 $(1,0)$，$(1,1)$，$(2,1)$ をもつ事象を結ぶ直線で囲まれた領域を考える．この領域のヌル境界の外向きの垂直 1 形式と，それに付随するベクトルを見つけよ．

(a)

$ct=0$ 平面の接ベクトルを

$$\vec{V}\to(0,a,b,c)$$

とすると，単位垂直 1 形式と付随するベクトルは,

$$\tilde{n}\to(1,0,0,0)$$

$$\vec{N}\to(-1,0,0,0)\quad（内向き）$$

$ct=1$ 平面の接ベクトルを

$$\vec{V}\to(0,a,b,c)$$

とすると，単位垂直 1 形式と付随するベクトルは,

$$\tilde{n}\to(1,0,0,0)$$

$$\vec{N}\to(-1,0,0,0)\quad（内向き）$$

$x=0$ 平面の接ベクトルを

$$\vec{V}\to(a,0,b,c)$$

とすると，単位垂直 1 形式と付随するベクトルは,

$$\tilde{n}\to(0,1,0,0)$$

$$\vec{N}\to(0,1,0,0)\quad（外向き）$$

$x=1$ 平面の接ベクトルを

$$\vec{V}\to(a,0,b,c)$$

とすると，単位垂直 1 形式と付随するベクトルは,

$$\tilde{n}\to(0,1,0,0)$$

$$\vec{N}\to(0,1,0,0)\quad（外向き）$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

ヌル境界面は，光円錐のことであり,

$$(ct)^2=x^2+y^2+z^2$$

となる．この面に垂直ベクトルの例として,

$$\vec{N}\to(1,-1,0,0)\quad（外向き）$$

$$\vec{N}\to(-1,1,0,0)\quad（内向き）$$

外向きの垂直ベクトルに付随する垂直 1 形式は,

$$\tilde{n}\to(-1,-1,0,0)$$

接ベクトルの例として

$$\vec{V}\to(0,0,a,b)$$

（3.6）

22　ベクトルを一番最初に定義するかわりに，図 3.4 のような描像でもって 1 形式を定義することから始めたとする．そうするとベクトルは， 1 形式の線形実数値関数として導入され，ベクトル代数は（3.6a）と（3.6b）に類似な関係（すなわち，矢印と波線を入れ替えた関係）によって定義されるだろう．このように定義されたベクトルの全体が，ベクトル空間をつくることを示せ．これは，ベクトルと 1 形式の間の双対性の別の例である．

$$\tilde{s} = \tilde{p} + \tilde{q}$$

$$\tilde{r} = \alpha\tilde{p} \tag{3.6a}$$

$$\tilde{s}(\vec{A}) = \tilde{p}(\vec{A}) + \tilde{q}(\vec{A})$$

$$\tilde{r}(\vec{A}) = \alpha\tilde{p}(\vec{A}) \tag{3.6b}$$

（3.6a）を入れ換えると，

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{D} = \alpha\vec{A}$$

（3.6b）を入れ換えると，

$$\vec{C}(\tilde{p}) = \vec{A}(\tilde{p}) + \vec{B}(\tilde{p})$$

$$\vec{D}(\tilde{p}) = \alpha\vec{A}(\tilde{p})$$

ベクトルの和がベクトルになり，ベクトルの実数倍がベクトルになる．これはベクトル空間の定義そのものである．

（）

23　(a)　ある固定された M，N に対し，すべての（M,N）テンソルの集合はベクトル空間を作ることを示せ．（それらのテンソルの加法と定数による乗法を定義する．）

(b)　この空間の一つの基底が次の集合で与えられることを示せ．

$$\{\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta \otimes \cdots \otimes \vec{e}_\gamma \otimes \tilde{\omega}^\mu \otimes \tilde{\omega}^\nu \otimes \cdots \otimes \tilde{\omega}^\lambda\}$$

←M ベクトル→　　←　N 1 形式　→

（二つ以上の 1 形式の外積を定義しなければならない．）

(a)

ベクトルと 1 形式のテンソル積の和を定義する．

$$\vec{U} \otimes \vec{V} + \vec{U} \otimes \vec{W} = \vec{U} \otimes (\vec{V} + \vec{W})$$

$$\tilde{p} \otimes \tilde{q} + \tilde{p} \otimes \tilde{r} = \tilde{p} \otimes (\tilde{q} + \tilde{r})$$

ベクトルと 1 形式のテンソル積の実数倍を定義する．

$$\alpha(\vec{U} \otimes \vec{V}) = (\alpha\vec{U}) \otimes \vec{V}$$

$$\alpha(\tilde{p} \otimes \tilde{q}) = (\alpha\tilde{p}) \otimes \tilde{q}$$

（M,N）テンソルは，

$$\vec{U} \otimes \cdots \otimes \vec{V} \otimes \tilde{p} \otimes \cdots \otimes \tilde{q}$$

←　M　→　←　N　→

となる．テンソル積の和がテンソル積になり，テンソル積の実数倍がテンソル積になることは，テンソルの和がテンソルになり，テンソルの実数倍がテンソルになることを意味する．ゆえに，（M,N）テンソルの集合はベクトル空間をつくる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　（0,2）テンソルの基底は，

$$\tilde{\omega}^\mu \otimes \tilde{\omega}^\nu$$

（2,0）テンソルの基底は，

$$\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta$$

自然な拡張から与式が得られる.

（3.60）

24　(a)　ある（2,0）テンソル $M^{\alpha\beta}$ の成分が行列で次のように与えられているとき，以下の量を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(i)　対称テンソル $M^{(\alpha\beta)}$ と反対称テンソル $M^{[\alpha\beta]}$ の成分

(ii)　$M^{\alpha}{}_{\beta}$ の成分

(iii)　$M_{\alpha}{}^{\beta}$ の成分

(iv)　$M_{\alpha\beta}$ の成分

(b)　その成分が $M^{\alpha}{}_{\beta}$ であるような(1,1)テンソルについて, その対称部分, 反対称部分を考えることに意味があるか？もし，あるならそれらを定義し，そうでないなら，その理由を述べよ.

(c)　メトリックテンソルの添字を上げて，次式を示せ.

◆　$$\eta^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} \tag{3.60}$$

(a)

(i)

$$M^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{[\alpha\beta]}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&-1&0&2\\2&0&0&1\\1&0&-2&0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&2&1\\1&-1&0&0\\0&0&0&-2\\0&2&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1\\1&0&0&\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-1&-\frac{3}{2}&0\end{pmatrix}$$

(ii)

$$M^{\alpha}{}_{\beta}=\eta_{\beta\mu}M^{\alpha\mu}$$

$M^{\alpha\beta}$の行がフリー，列がダミーであることに注意して，

$$=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&-1&0&2\\2&0&0&1\\1&0&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&-1&0&2\\-2&0&0&1\\-1&0&-2&0\end{pmatrix}$$

(iii)

$$M_{\alpha}{}^{\beta}=\eta_{\alpha\mu}M^{\mu\beta}$$

$M^{\alpha\beta}$の列がフリー，行がダミーであることに注意して，

$$=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&-1&0&2\\2&0&0&1\\1&0&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&-1&0&2\\2&0&0&1\\1&0&-2&0\end{pmatrix}$$

(iv)

$$M_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\mu}\eta_{\nu\beta}M^{\mu\nu}=\eta_{\alpha\mu}M^{\mu}{}_{\beta}$$

(ii)を使って，$M^{\alpha}{}_{\beta}$の列がフリー，行がダミーであることに注意して，

$$=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&-1&0&2\\-2&0&0&1\\-1&0&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&-1&0&2\\-2&0&0&1\\-1&0&-2&0\end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

$$M^{\alpha}{}_{\beta}=\vec{A}\otimes\tilde{p}$$

を仮定して，

$$\vec{A}(\tilde{q})\otimes\tilde{p}(\vec{B})$$

の変数を交換すると，

$$\vec{A}(\vec{B})\otimes\tilde{p}(\tilde{q})$$

これは無意味である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)

$$\eta^{\alpha}{}_{\beta}=\eta^{\alpha\mu}\eta_{\mu\beta}=diag(1,1,1,1)=\delta^{\alpha}{}_{\beta}$$

()

25　***A*** が（2,0）テンソル，***B*** が（0,2）テンソルなら，

$$A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}$$

が系に依存しない，すなわちスカラーになることを示せ.

座標変換すると，

$$A^{\bar{\mu}\bar{\nu}}B_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\alpha}\Lambda^{\bar{\nu}}{}_{\beta}A^{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\mu}}\Lambda^{\beta}{}_{\bar{\nu}}B_{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}$$

$$\text{where}\quad \Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\mu}} = \Lambda^{\bar{\nu}}{}_{\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\bar{\nu}} = diag(1,1,1,1)$$

座標変換しても，その値は変わらないことが示された.

()

26　***A*** を反対称（2,0）テンソル，***B*** を対称（0,2）テンソル，***C*** を任意の（0,2）テンソル，***D*** を任意の（2,0）テンソルとするとき，以下を証明せよ；

(a)　$A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} = 0$

(b)　$A^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}C_{[\alpha\beta]}$

(c)　$B_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}D^{(\alpha\beta)}$

(a)　$A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}B_{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}B_{\beta\alpha} = -A^{\mu\nu}B_{\mu\nu} = -A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}$

$2A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} = 0$

(b)　$A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}C_{(\alpha\beta)} + A^{\alpha\beta}C_{[\alpha\beta]} = A^{\alpha\beta}C_{[\alpha\beta]}$

(c)　$B_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}D^{(\alpha\beta)} + B_{\alpha\beta}D^{[\alpha\beta]} = B_{\alpha\beta}D^{(\alpha\beta)}$

()

27　(a)　$\boldsymbol{A}$ が反対称な（2,0）テンソルとする．メトリックテンソルを使って添字を下げた $\{A_{\alpha\beta}\}$ は，反対称な（0,2）テンソルの成分であることを示せ．

(b)　$V^{\alpha}=W^{\alpha}$ としたとき，$V_{\alpha}=W_{\alpha}$ となることを示せ．

(a)

$$A_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}A^{\alpha\beta}$$

$\eta_{\beta\nu}$ で β を下げるとき，

$$A^{\alpha}{}_{0}=-A^{\alpha 0},\ A^{\alpha}{}_{\beta}=A^{\alpha\beta}\quad(\beta=1,2,3)$$

$\eta_{\alpha\mu}$ で α を下げるとき，

$$A_{0\beta}=-A^{0}{}_{\beta},\ A_{\alpha\beta}=A^{\alpha}{}_{\beta}\quad(\alpha=1,2,3)$$

結果として，

$$A_{\alpha\beta}=-A^{\alpha\beta}\quad(\alpha=0,\ or\ \beta=0)$$
$$A_{\alpha\beta}=A^{\alpha\beta}\quad(\alpha,\beta=1,2,3)$$

行列の 1 行と 1 列の符号が反転している．ゆえに反対称のままである．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

$$V^{\alpha}=\eta_{\alpha\mu}V^{\mu}=V_{\alpha},\ W^{\alpha}=\eta_{\alpha\mu}W^{\mu}=W_{\alpha}$$

それぞれ時間成分の符号が反転しているだけなので，与式が証明された．

（3.65）（3.66）

28　式（3.65）から式（3.66）を導け．

$$\nabla_{\vec{U}}\boldsymbol{T}\equiv\frac{d\boldsymbol{T}}{d\tau}\equiv\left(T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}\tilde{\omega}^{\beta}\otimes\vec{e}_{\alpha}\right)U^{\gamma}\qquad(3.65)$$

$$\nabla\boldsymbol{T}\equiv T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}\tilde{\omega}^{\beta}\otimes\tilde{\omega}^{\gamma}\otimes\vec{e}_{\alpha}\qquad(3.66)$$

一方，$\boldsymbol{T}$ の勾配を定義する．

$$\nabla\boldsymbol{T}=\frac{d\boldsymbol{T}}{dx^{\gamma}}\tilde{d}x^{\gamma}\qquad（\tilde{d}x^{\gamma}\text{ は基底 1 形式）}$$

$$=\frac{d\boldsymbol{T}}{d\tau}\frac{d\tau}{dx^{\gamma}}\tilde{\omega}^{\gamma}$$

$$\text{where}\quad\vec{U}=\frac{dx^{\gamma}}{d\tau}$$

式（3.65）を代入して，次式を得る．

$$\nabla\boldsymbol{T}\equiv T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}\tilde{\omega}^{\beta}\otimes\tilde{\omega}^{\gamma}\otimes\vec{e}_{\alpha}\qquad(3.66)$$

()

29　テンソルの微分は，ライプニッツの（積の）規則に従って，

$$\nabla(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}) = (\nabla\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\otimes(\nabla\boldsymbol{B})$$

となることを示せ．

$$\boldsymbol{A}\to\{A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\cdots}\},\quad \boldsymbol{B}\to\{B^{\mu\cdots}{}_{\nu\cdots}\}$$

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\to\{A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\cdots}B^{\mu\cdots}{}_{\nu\cdots}\}$$

とすると，与式が成り立つのは明白である．

()

30　ある系Oで，ベクトル場$\vec{U}$と$\vec{D}$の成分が

$$\vec{U}\to(1+t^2,\, t^2,\, \sqrt{2}t,\, 0)$$

$$\vec{D}\to(x,\, 5tx,\, \sqrt{2}t,\, 0)$$

であり，スカラー量ρが

$$\rho = x^2 + t^2 - y^2$$

であるとする．このとき，

(a)　$\vec{U}\cdot\vec{U}$，$\vec{U}\cdot\vec{D}$，$\vec{D}\cdot\vec{D}$を計算せよ．$\vec{U}$は４元ベクトル場であるとしてよいか？$\vec{D}$についてはどうか？

(b)　任意の時刻において$\vec{U}$を４元速度とする粒子の空間的速度vを求めよ．その速度は，$t\to 0$，$t\to\infty$の極限でどうようにふるまうか？

(c)　αのすべてに対して，U_αを求めよ．

(d)　すべてのαとβに対して，$U^\alpha{}_{,\beta}$を求めよ．

(e)　すべてのβに対し，$U_\alpha U^\alpha{}_{,\beta}=0$であることを示せ．また，すべての$\beta$に対し，$U^\alpha U_{\alpha,\beta}=0$であることを示せ．

(f)　$D^\beta{}_{,\beta}$の値を計算せよ．

(g)　$(U^\alpha D^\beta)_{,\beta}$をすべての$\alpha$に対して計算せよ．

(h)　$U_\alpha(U^\alpha D^\beta)_{,\beta}$を計算し，設問(f)と比較せよ．答えが似ているのはなぜか？

(i)　$\rho_{,\alpha}$をすべてのαについて計算せよ．また，$\rho^{,\alpha}$も計算せよ．（$\rho^{,\alpha}\equiv\eta^{\alpha\beta}\rho_{,\beta}$を思い出せ．）$\{\rho^{,\alpha}\}$は何の成分か？

(j)　$\nabla_{\vec{U}}\rho$，$\nabla_{\vec{U}}\vec{D}$，$\nabla_{\vec{D}}\rho$，$\nabla_{\vec{D}}\vec{U}$を計算せよ．

(a)　$\vec{U}\cdot\vec{U} = -(1+t^2)^2 + (t^2)^2 + (\sqrt{2}t)^2 = -1-2t^2-t^4+t^4+2t^2$

$= -1$　（自然単位で，４元速度場である．）

$$\vec{U}\cdot\vec{D} = -(1+t^2)x + t^2\cdot 5tx + \sqrt{2}t\cdot\sqrt{2}t = -x - t^2x + 5t^3x + 2t^2$$

$\vec{D}\cdot\vec{D} = -x^2 + 25t^2x^2 + 2t^2 \neq 1$　（自然単位で，４元速度場ではない．）

+++++++++++++++++++++++++++++++++

(b)　$\beta_x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$，$\beta_y = \dfrac{\sqrt{2}t}{1+t^2}$，$\beta_z = 0$

$$\beta = \sqrt{{\beta_x}^2 + {\beta_y}^2 + {\beta_z}^2} = \frac{\sqrt{(t^2)^2 + (\sqrt{2}t)^2}}{1+t^2} = \frac{\sqrt{t^4+2t^2}}{\sqrt{t^4+2t^2+1}}$$

$$\lim_{t\to 0}\beta = 0,\ \lim_{t\to\infty}\beta = 1$$

+++++++++++++++++++++++++++++++++

(c)　$\widetilde{U} \to (-1-t^2,\, t^2,\, \sqrt{2}t,\, 0)$

+++++++++++++++++++++++++++++++++

(d)　$U^0{}_{,\beta} \to (2t, 0, 0, 0)$,　$(\beta = 0, 1, 2, 3)$

$U^1{}_{,\beta} \to (2t, 0, 0, 0)$

$U^3{}_{,\beta} \to (\sqrt{2}, 0, 0, 0)$

$U^3{}_{,\beta} \to (0, 0, 0, 0)$

$U^\alpha{}_{,0} \to (2t, 2t, \sqrt{2}, 0)$,　$(\alpha = 0, 1, 2, 3)$

$U^\alpha{}_{,\beta} \to (0, 0, 0, 0)$,　$(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$

+++++++++++++++++++++++++++++++++

(e)　$U_\alpha \to (-1-t^2,\, t^2,\, \sqrt{2}t,\, 0)$

$U^\alpha \to (1+t^2, t^2, \sqrt{2}t, 0)$

$U^\alpha{}_{,0} \to (2t, 2t, \sqrt{2}, 0)$

$U^\alpha{}_{,1} = U^\alpha{}_{,2} = U^\alpha{}_{,3} \to (0, 0, 0, 0)$

$U_\alpha U^\alpha{}_{,0} = -2t - 2t^3 + 2t^3 + 2t = 0$

$U_\alpha U^\alpha{}_{,1} = 0$，$U_\alpha U^\alpha{}_{,2} = 0$，$U_\alpha U^\alpha{}_{,3} = 0$

+++++++++++++++++++++++++++++++++

(f)　$D^0{}_{,0} = 0$，$D^1{}_{,1} = 5t$，$D^2{}_{,2} = 0$，$D^3{}_{,3} = 0$，

$D^\beta{}_{,\beta} = 5t$

+++++++++++++++++++++++++++++++++

(g)　$U^\alpha \to (1+t^2, t^2, \sqrt{2}t, 0)$

$D^\beta \to (x,\, 5tx,\, \sqrt{2}t,\, 0)$

$(U^\alpha D^0)_{,0} \to (x + t^2x,\, t^2x,\, \sqrt{2}tx,\, 0)_{,t} = (2tx,\, 2tx,\, \sqrt{2}x,\, 0)$

$(U^\alpha D^1)_{,1} \to (5tx + 5t^3x,\, 5t^3x,\, 5\sqrt{2}t^2x,\, 0)_{,x}$

$= (5t + 5t^3,\, 5t^3,\, 5\sqrt{2}t^2,\, 0)$

$(U^\alpha D^2)_{,2} \to (\sqrt{2}t + \sqrt{2}t^3x,\, \sqrt{2}t^3x,\, 2t^2,\, 0)_{,y} = (0, 0, 0, 0)$

$(U^\alpha D^3)_{,3} \to (0, 0, 0, 0)$

$(U^\alpha D^\beta)_{,\beta} \to (2tx + 5t + 5t^3,\, 2tx + 5t^3,\, \sqrt{2}x + 5\sqrt{2}t^2,\, 0)$

また，次のように書ける．

$$\begin{aligned}(U^\alpha D^\beta)_{,\beta} &= U^\alpha{}_{,\beta}D^\beta + U^\alpha D^\beta{}_{,\beta}\\ &= U^\alpha{}_{,0}D^0 + U^\alpha(5t)\\ &\to (2t,\, 2t,\, \sqrt{2},\, 0)x + (1+t^2,\, t^2,\, \sqrt{2}t,\, 0)(5t)\\ &= (2tx + 5t + 5t^3,\, 2tx + 5t^3,\, \sqrt{2}x + 5\sqrt{2}t^2,\, 0)\end{aligned}$$

+++++++++++++++++++++++++++++++++

(h)　$U_\alpha(U^\alpha D^\beta)_{,\beta}$

$= (-1-t^2,\, t^2,\, \sqrt{2}t,\, 0)\cdot(2tx + 5t + 5t^3,\, 2tx + 5t^3,\, \sqrt{2}x + 5\sqrt{2}t^2,\, 0)$

$= -2tx - 5t - 5t^3 - 2t^3x - 5t^3 - 5t^5 + 2t^3x + 5t^5 + 2tx + 10t^3$

$= -5t$

+++++++++++++++++++++++++++++++++

(i)　$\rho_{,\alpha} \to (2t,\, 2x,\, -2y,\, 0)$

$\rho^{,\alpha} \to (-2t,\, 2x,\, -2y,\, 0)$　（ベクトル勾配）

+++++++++++++++++++++++++++++++++

(j)　$\nabla_{\vec{U}}\rho \to \{\rho_{,\alpha}U^\alpha\} = (2t,\, 2x,\, -2y,\, 0)\cdot(1+t^2,\, t^2,\, \sqrt{2}t,\, 0)$

$= 2t + 2t^3 + 2t^2x - 2\sqrt{2}ty$

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{D} \to \{D^{\alpha}{}_{,\beta}U^{\beta}\} = (D^{0}{}_{,1}U^{1},\ D^{1}{}_{,0}U^{0} + D^{1}{}_{,1}U^{1}, D^{2}{}_{,0}U^{0}{}_{,0})$$

$$= (t^{2}, 5x(1+t^{2}) + 5t^{3}, \sqrt{2}(1+t^{2})_{,0})$$

$$\nabla_{\vec{D}}\rho \to \{\rho_{,\alpha}D^{\alpha}\} = (2t, 2x, -2y, 0)\cdot(x, 5tx, \sqrt{2}t, 0)$$

$$= 2tx + 10tx^{2} - 2\sqrt{2}ty$$

$$\nabla_{\vec{D}}\vec{U} \to \{U^{\alpha}{}_{,\beta}D^{\beta}\} = (U^{0}{}_{,0}D^{0},\ U^{1}{}_{,0}D^{0}, U^{2}{}_{,0}D^{0}{}_{,0})$$

$$= (2tx, 2tx, \sqrt{2}x, 0)$$

()

31　時間的な単位４元ベクトル $\vec{U}$ とテンソル

$$\boldsymbol{P}_{\vec{U}} \equiv \boldsymbol{g} + \vec{U}\otimes\vec{U}$$

を考える．$P_{\vec{U}}$ が，任意のベクトル $\vec{V}$ を $\vec{U}$ に垂直な方向に射影する射影演算子であることを次のようにして示せ．成分が

$$V_{\perp}{}^{\alpha} = P^{\alpha}{}_{\beta}V^{\beta} = (\eta^{\alpha}{}_{\beta} + U^{\alpha}U_{\beta})V^{\beta}$$

であるベクトル $\vec{V}_{\perp}$ が

(a)　$\vec{U}$ に垂直であることを示せ．

(b)　また，このベクトルは，$\boldsymbol{P}$ を作用しても不変であること，つまり

$$V_{\perp\perp}{}^{\alpha} \equiv V_{\perp}{}^{\beta}P^{\alpha}{}_{\beta} = V_{\perp}{}^{\alpha}$$

となることを示せ．

(c)　任意のヌルでないベクトル $\vec{q}$ に対して, そのベクトルに垂直な方向への射影テンソルは

$$\boldsymbol{P}_{\vec{q}} = \boldsymbol{g} + \frac{\vec{q}\otimes\vec{q}}{\vec{q}\cdot\vec{q}}$$

である．ヌルベクトルの場合には，どういう形で表されるか？

(d)　$\vec{U}$ に垂直なベクトルに対しては，$P_{\vec{U}}$ がメトリックテンソルとなって，

$$\boldsymbol{P}_{\vec{U}}(\vec{V}_{\perp},\vec{W}_{\perp}) = \boldsymbol{g}(\vec{V}_{\perp},\vec{W}_{\perp})$$

$$= \vec{V}_{\perp}\cdot\vec{W}_{\perp}$$

であることを示せ．

(a)　$\vec{V}_{\perp}$ と $\vec{U}$ のスカラー積は,

$$\eta_{\alpha\gamma}V^{\alpha}{}_{\perp}U^{\gamma} = \eta_{\alpha\gamma}\eta^{\alpha}{}_{\beta}V^{\beta}U^{\gamma} + \eta_{\alpha\gamma}U^{\alpha}U_{\beta}V^{\beta}U^{\gamma}$$

$$= \eta_{\beta\gamma}V^{\beta}U^{\gamma} + U_{\alpha}U^{\alpha}U_{\beta}V^{\beta}$$

$$= U_{\beta}V^{\beta} + U_{\alpha}U^{\alpha}U_{\beta}V^{\beta}$$

$$= U_{\beta}V^{\beta}(1 + U_{\alpha}U^{\alpha})$$

$= 0$

where　$U_\alpha U^\alpha = -1$（自然単位で）

ゆえに，$\vec{V}_\perp$ と $\vec{U}$ とは垂直である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　$V_{\perp\perp}{}^\alpha \equiv V_\perp{}^\beta P^\alpha{}_\beta$

$$= P^\beta{}_\gamma V^\gamma P^\alpha{}_\beta$$

$$= (\eta^\beta{}_\gamma + U^\beta U_\gamma) V^\gamma (\eta^\alpha{}_\beta + U^\alpha U_\beta)$$

$$= (\eta^\beta{}_\gamma \eta^\alpha{}_\beta + \eta^\beta{}_\gamma U^\alpha U_\beta + \eta^\alpha{}_\beta U^\beta U_\gamma + U^\beta U_\gamma U^\alpha U_\beta) V^\gamma$$

$$= (\eta^\alpha{}_\gamma + U^\alpha U_\gamma + U^\alpha U_\gamma - U^\alpha U_\gamma) V^\gamma$$

$$= (\eta^\alpha{}_\gamma + U^\alpha U_\gamma) V^\gamma$$

$$= V_\perp{}^\alpha$$

ゆえに，与式が証明された．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　$\vec{q}\cdot\vec{q}$ で除するのは，単位ベクトルにするためであるが，ヌルベクトルであれば，$\vec{q}\cdot\vec{q} = 0$ であるので，与式は成り立たない．

ヌルベクトルはそれ自身で直交するので，任意のベクトル $\vec{V}$ を $\vec{q}$ に垂直にするには，$\vec{V}$ をヌルベクトルにすればよい．？

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　$\boldsymbol{P}_{\vec{U}}(\vec{V}_\perp, \vec{W}_\perp) = P_{\mu\nu} V_\perp{}^\mu W_\perp{}^\nu$

$$= \eta_{\alpha\beta} P^\alpha{}_\mu P^\beta{}_\nu V_\perp{}^\mu W_\perp{}^\nu$$

$$= \eta_{\alpha\beta} (V_\perp{}^\mu P^\alpha{}_\mu)(W_\perp{}^\nu P^\beta{}_\nu)$$

$$= \eta_{\alpha\beta} V_\perp{}^\alpha W_\perp{}^\beta$$

$$= \vec{V}_\perp \vec{W}_\perp$$

$$= \boldsymbol{g}(\vec{V}_\perp, \vec{W}_\perp)$$

（3.71）

32　(a)　（0,2）テンソルの成分の定義 $f_{\alpha\beta} = \boldsymbol{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$ から，変換則は

$$f_{\bar\alpha\bar\beta} = \Lambda^\mu{}_{\bar\alpha} \Lambda^\nu{}_{\bar\beta} f_{\mu\nu}$$

となることを示せ．これを行列で表現すると，成分が $\Lambda^\mu{}_{\bar\alpha}$ である行列を (Λ) として，

$$(\bar{f}) = (\Lambda)^T (f)(\Lambda)$$

となることも示せ．

(b)　ローレンツ系の定義からメトリックテンソルは $\eta_{\alpha\beta}$ となったので，このことはすべてのローレンツ系で成り立つ．したがって，より一般的なローレンツ変換を

$$\eta_{\bar\alpha\bar\beta} = \Lambda^\mu{}_{\bar\alpha} \Lambda^\nu{}_{\bar\beta} \eta_{\mu\nu} \qquad (3.71)$$

を満たすものとして定義できる．速度 $v\vec{e}_x$ のブーストに対する行列がこの関係を満たしており，ここでの新しい定義が古い定義を含んでいることを示せ．

(c)　(Λ) と (L) が式（3.71）を満たす，すなわち $(\eta) = (\Lambda)^T (\eta)(\Lambda)$，$(\eta) = (L)^T (\eta)(L)$ である行列とする．行列 $(\Lambda)(L)$ もローレンツ変換の行列となることを示せ．

(a)　変換先もテンソル成分の定義は同じだから，

$$f_{\bar\alpha\bar\beta} = \boldsymbol{f}(\vec{e}_{\bar\alpha}, \vec{e}_{\bar\beta})$$

$$= \boldsymbol{f}(\Lambda^\mu{}_{\bar\alpha}\vec{e}_\mu, \Lambda^\nu{}_{\bar\beta}\vec{e}_\nu)$$

$$= \Lambda^\mu{}_{\bar\alpha} \Lambda^\nu{}_{\bar\beta} f(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu)$$

$$= \Lambda^\mu{}_{\bar\alpha} \Lambda^\nu{}_{\bar\beta} f_{\mu\nu}$$

与式が証明できた．

$$(\bar{f}) = (\Lambda)^T (f)(\Lambda)$$

$$=\begin{pmatrix} \\ \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} \\ \\ \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \\ f_{\mu\nu} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} \\ \\ \end{pmatrix}$$

第２行列は行がフリー，第３行列は列がフリーなので行列演算ができる．

$$=\begin{pmatrix} \\ \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} \\ \\ \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \\ \Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} f_{\mu\nu} \\ \\ \end{pmatrix}$$

第１行列は行がフリー，第２行列は列がフリーなので行列演算ができる．

$$=\left(\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} f_{\mu\nu}\right)$$

$$=\left(f_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\right)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　二つの４元ベクトルのブーストを考える．

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\mu} A^{\mu}$$

$$B^{\bar{\beta}} = \Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\nu} B^{\nu}$$

ブースト後のスカラー積は，

$$\eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} A^{\bar{\alpha}} B^{\bar{\beta}} = (\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}\eta_{\mu\nu})(\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\mu}A^{\mu})(\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\nu}B^{\nu})$$

$$= (\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\mu})(\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\nu})(\eta_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu})$$

$$= \eta_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu}$$

座標変換（ブースト）してもスカラー積は変わらない．スカラー積は座標に依存しないことが証明された．

$$(\bar{\eta}) = (\Lambda)^T(\eta)(\Lambda)$$

$$=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\gamma^2+\gamma^2\beta^2 & \gamma^2\beta-\gamma^2\beta & 0 & 0 \\ \gamma^2\beta-\gamma^2\beta & \gamma^2-\gamma^2\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　行列$(\Lambda)(L)$も（3.71）を満たすことを確認する．

$$((\Lambda)(L))^T(\eta)((\Lambda)(L))$$

$$=(L)^T(\Lambda)^T(\eta)(\Lambda)(L)$$

$$=(L)^T(\eta)(L)$$

$$=(\eta)$$

()

33　練習問題 32(c)結果から，ローレンツ変換は行列の積に対して群をつくることがわかる．これをローレンツ群といい，$L(4)$ または $O(1,3)$ で表す．

(a)　ローレンツ群の単位元と式（1.12）で表される行列の逆元を求めよ．

(b)　ローレンツ変換の行列の行列式は±1であることを示せ．

(c)　行列式の値が＋１となる元の集合は部分群をつくるが，行列式の値が－１となる元ではそうならないことを示せ．

(d)　３元直交群 $O(3)$ は，３次元ユークリッド空間のメトリックに対する同様な群である．練習問題 20(b)で，その群は直交行列をつかって表現されることがわかった．直交行列が群をつくること，および，$O(3)$ が $L(4)$ の部分群（に同型）であることを示せ．

(a)　ローレンツ変換の式（1.12）は，テンソルと行列を使って，次のように書ける。

$$A^{\bar\beta}=\Lambda^{\bar\beta}{}_\alpha A^\alpha$$

$$\begin{pmatrix}A^{\bar0}\\A^{\bar1}\\A^{\bar2}\\A^{\bar3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma\beta&0&0\\-\gamma\beta&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^0\\A^1\\A^2\\A^3\end{pmatrix}\qquad(1.12)$$

$$\text{where}\quad\left(\Lambda^{\bar\beta}{}_\alpha(v)\right)=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma\beta&0&0\\-\gamma\beta&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

単位元（恒等変換）は

$$\left(\Lambda^{\bar\beta}{}_\alpha(0)\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(1,1,1,1)=I$$

逆元（逆変換）は，

$$\left(\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(-v)\right)=\begin{pmatrix}\gamma&\gamma\beta&0&0\\\gamma\beta&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

逆元は，逆行列である．

$$\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(-v)\Lambda^{\bar\beta}{}_\alpha(v)=\delta^\nu{}_\alpha$$

$$\left(\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(-v)\right)\left(\Lambda^{\bar\beta}{}_\alpha(v)\right)=\mathrm{diag}(1,1,1,1)=I$$

$$\left(\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(-v)\right)=\left(\Lambda^{\bar\beta}{}_\alpha(v)\right)^{-1}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　練習問題 32(c)から，

$$(\eta)=(\Lambda)^T(\eta)(\Lambda)$$

$$\det(\eta)=\det((\Lambda)^T(\eta)(\Lambda))=(\det(\Lambda))^2\det(\eta)$$

$$(\det(\Lambda))^2=1$$

$$\det(\Lambda)=\pm1$$

$$\text{where}\quad\det(\eta)=-1$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　１つ行列の行列式が－１では，２つの積の行列の行列式が＋１になるので，部分群にならない．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　ローレンツ変換が変換群をつくるとは，概略，系 O から系 $\overline{O}$ への変換，系 $\overline{O}$ から系 $\overline{\overline{O}}$ への変換，系 O から系 $\overline{\overline{O}}$ への変換が同じ形になることをいう．その条件は，練習問題 32(c)とローレンツ不変から，

$$\det(\Lambda)=+1\quad\text{and}\quad\Lambda^{\bar0}{}_0\geq+1$$

である．これを proper ローレンツ変換という．

３次元空間回転を直交行列 (A) とすると，

$$(\Lambda)=\begin{pmatrix}1&0\ 0\ 0\\\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}&(A)\end{pmatrix},\quad\text{where}\quad\det(\Lambda)=1$$

空間回転の変換式を表し，部分群である．

x, y, z 方向のブースト は，

$\Lambda^{\bar{0}}{}_0 \geq 1$， $\det(\Lambda) = 1$ であり，部分群である．

$$\text{時間反転} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(\Lambda) = -1$$

$$\text{空間反転} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(\Lambda) = -1$$

$$\text{時間空間反転} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(\Lambda) = +1, \quad \Lambda^{\bar{0}}{}_0 \leq +1$$

は，部分群とならない．上の３つは，擬似ローレンツ変換である．

結論として，ブースト，回転は部分群をつくり，反転は部分群をつくらない．

()

34　ミンコフスキー空間で，座標 $u = t - x$， $v = t + x$ を考える．（自然単位）

(a)　$\vec{e}_u$ を座標 $(u = 1, v = 0, y = 0, z = 0)$ と $(u = 0, v = 0, y = 0, z = 0)$ の事象をつなぐベクトル，$\vec{e}_v$ も同様なベクトルとする．$\vec{e}_u = (\vec{e}_t - \vec{e}_x)/2$，$\vec{e}_v = (\vec{e}_t + \vec{e}_x)/2$ であることを示し， $t - x$ 面の時空図中に $\vec{e}_u$， $\vec{e}_v$ を描け．

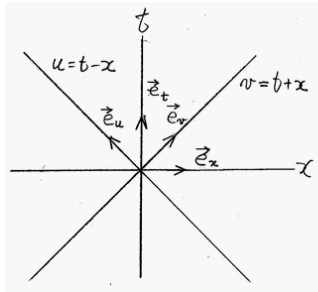
(b)　$\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ はミンコフスキー空間の基底であることを示せ．

(c)　この基底に対するメトリックの成分を求めよ．

(d)　$\vec{e}_u$，$\vec{e}_v$ はヌルであるが直交してないことを示せ．（$t - x$ 平面のヌル基底とよばれる．）

(e)　四つの１形式 $\tilde{d}u$， $\tilde{d}v$， $\boldsymbol{g}(\vec{e}_u,\ )$， $\boldsymbol{g}(\vec{e}_v,\ )$ を $\tilde{d}t$ と $\tilde{d}x$ を使って表せ．

(a)　時空図中の基底は，



基底変換式は，

$$(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_y, \vec{e}_z) = (\vec{e}_t, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_u = \frac{1}{2}\vec{e}_t - \frac{1}{2}\vec{e}_x$$

$$\vec{e}_v = \frac{1}{2}\vec{e}_t + \frac{1}{2}\vec{e}_x$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　最初の基底を線形変換しただけだから，基底の条件を満たす.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　練習問題 32(c)を使って，この基底のメトリックを求める.

$$(\overline{\eta}) = (\Lambda)^T(\eta)(\Lambda)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　$\vec{e}_u$ と $\vec{e}_v$ は，問題から明らかにヌルである（傾き 45 度の直線だから，距離を計算するまでもない）．スカラー積は，

$$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_u = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\vec{e}_v \cdot \vec{e}_v = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$\vec{e}_u$ と $\vec{e}_v$ は，直交していない.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(e)

$$u = t - x$$

から，

$$\tilde{d}u = \tilde{d}t - \tilde{d}x$$

$$v = t + x$$

から，

$$\tilde{d}v = \tilde{d}t + \tilde{d}x$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}(\vec{e}_u\ ,\quad) = -\frac{1}{2}\tilde{d}v = -\frac{1}{2}\tilde{d}t - \frac{1}{2}\tilde{d}x$$

別解）$\eta = diag(-1,1,1,1)$ から

$$\boldsymbol{g}(\vec{e}_u\ ,\quad) = \boldsymbol{g}(\frac{1}{2}\vec{e}_t - \frac{1}{2}\vec{e}_x\ ,\quad) = -\frac{1}{2}\tilde{d}t - \frac{1}{2}\tilde{d}x$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}(\vec{e}_v\ ,\quad) = -\frac{1}{2}\tilde{d}u = -\frac{1}{2}\tilde{d}t + \frac{1}{2}\tilde{d}x$$

別解）$\eta = diag(-1,1,1,1)$ から

$$\boldsymbol{g}(\vec{e}_v\ ,\quad) = \boldsymbol{g}(\frac{1}{2}\vec{e}_t + \frac{1}{2}\vec{e}_x\ ,\quad) = -\frac{1}{2}\tilde{d}t + \frac{1}{2}\tilde{d}x$$