

1 特殊相対論

ミンコフスキー時空, ローレンツ変換, ローレンツ収縮, ローレンツ不変,
双子のパラドックス, ガレージのパラドックス

1.1 特殊相対論の基本原理

(1) 相対性原理 (Galileo Galilei) : どんな実験も観測者の絶対速度を測ることはできない. ある観測者によって行われたどんな実験の結果も, その実験に関与しない別の観測との相対速度に依存しない.

(2) 光速の不変性 (Einstein) : 加速運動していない任意の観測者に対する光速は, その観測者と光源の相対速度に関係なく $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ という値をとる.

1.2 慣性観測者の定義

加速運動をしない観測者だけが, 自分の時計を他の時計に同時化できる.
いくつかの事象を同時に見るとき, 目はそれらが同時に起こったとみなす.
いくつかの事象が起こったとき, おのおのの一番近くにある時計がさす時刻が同じとき慣性観測者はそれらを同時とみなす.

1.3 新しい単位系

自然単位では, 光速度を 1 (無次元) とするため, 長さの単位と時間の単位の次元が同じになる. 光速度は $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ なので, 時間の単位を **m** にするため, $1\text{s} = 3 \times 10^8 \text{ m}$ と置換してしまう.

1.4 時空図

時空図をつくる規則

(1) 事象は草書の大文字 D, E, S などで表す. ただし R は観測者を表す.

(2) 座標は (ct, x, y, z) と書く. 任意の 4 数の組, たとえば $(5, -3, 2, 10^{16})$ はその座標値が $ct = 5, x = -3, y = 2, z = 10^{16}$ をもつ事象を表す. いつも時間 ct を一番最初に書き, すべての座標はメートルで測る.

(3) (ct, x, y, z) をおのおのの成分を区別せず全体として用いることが便利なことも多い. そのときは (x^0, x^1, x^2, x^3) という別の書き方をする. 上付の添字はべきではなく, 単なるラベルである. したがって $(x^3)^2$ は第 3 の座標 (z 座標) の 2 乗を表す. x の 3 乗の 2 乗ではない. 一般に座標 x^0, x^1, x^2, x^3 を x^α と書く. ギリシャ文字の添字 (α, β, μ, ν など) は $(0, 1, 2, 3)$ から値をとるものとする. α に特定の値が与えられていないとき, x^α は四つの座標のどれをも表す.

(4) ct と (x, y, z) を区別したい場合もある. 空間座標だけを表すためにはローマ文字を用いる. ローマ文字の添字 (a, b, i, j, k, l など) は $(1, 2, 3)$ から値をとるものとする. i に特定の値が与えられていないとき, x^i は三つの空間座標のどれをも表す.

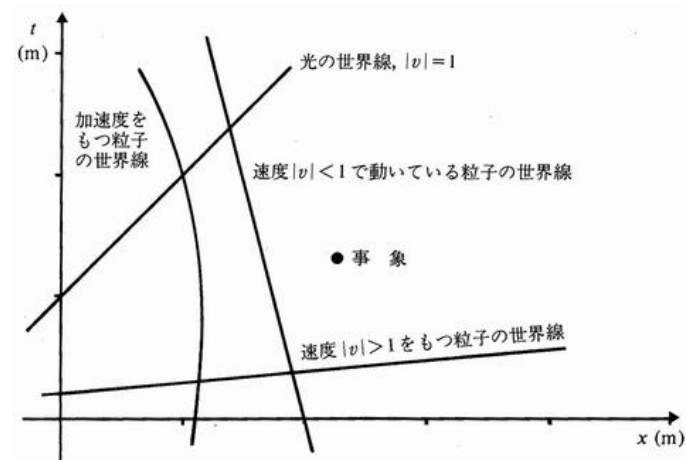


図 1.1 自然単位系での時空図

【ポイント】時空図の縦軸はS I 単位では常に ct である。速度はS I 単位では常に v/c で表す。光の世界線は傾き 45° の直線である。

1.5 別の観測者による座標系

座標 $c\bar{t}, \bar{x}$ をもったある観測者 \bar{O} が、座標 ct, x をもった別の観測者 O に対して、 x 方向に速度 v/c で動いているとする。

$c\bar{t}$ 軸と ct 軸との傾き角、 \bar{x} 軸と x 軸との傾き角は、

$$\phi = \tan^{-1} \frac{v}{c} = \tan^{-1} \beta \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right)$$

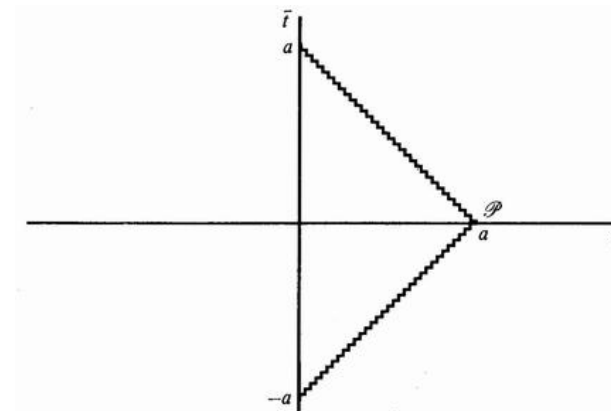
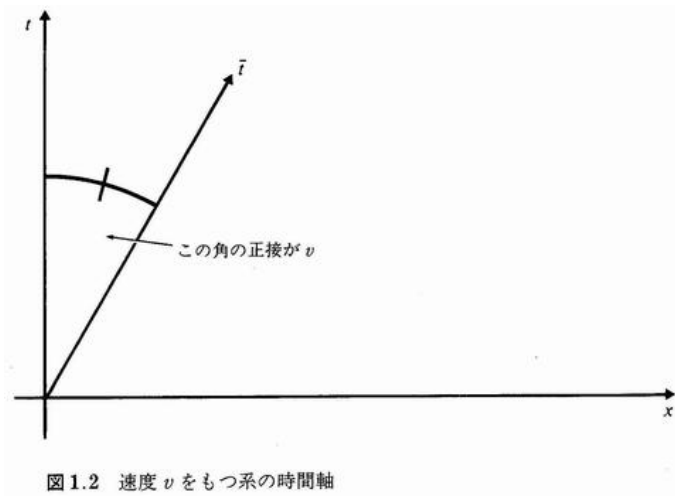


図 1.3 \bar{O} から見た \mathcal{P} で反射された光

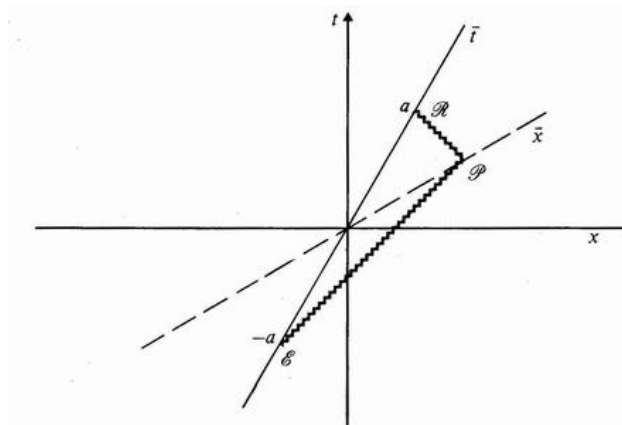


図 1.4 O から見た図 1.3 の状況

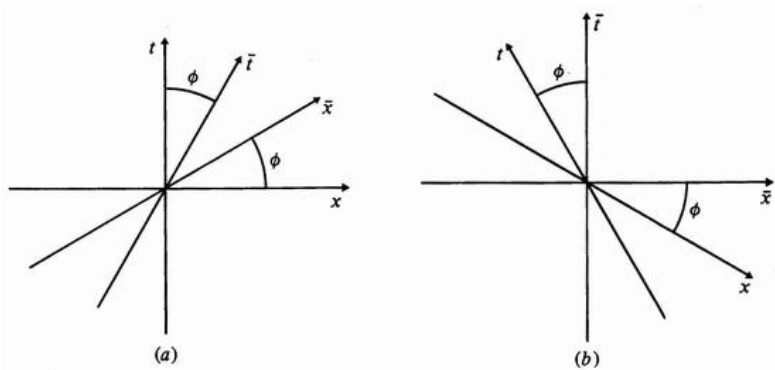


図 1.5 O (左) と O-bar (右) から見た時空間図

1.6 間隔の不変性

事象間の間隔の定義

◆ $\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ (1.1)

【注意】 Δs^2 は全体として 1 つの記号であり $(\Delta s)^2$ ではない.

$\Delta \bar{s}^2 = -c^2(\Delta \bar{t})^2 + (\Delta \bar{x})^2 + (\Delta \bar{y})^2 + (\Delta \bar{z})^2$ (1.1')

【ポイント】 自然単位の式を S I 単位の式に変換するときは ct や $c\bar{t}$ を 1 つの記号とみなして公式を書いてかまわない.

$\Delta \bar{s}^2 = M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta)$ (1.2)

$\Delta \bar{s}^2 = M_{00}(\Delta t)^2 + 2(M_{0i}\Delta x^i)\Delta t + M_{ij}\Delta x^i\Delta x^j$ (1.3)

$M_{0i} = 0 \quad (i=1,2,3)$ (1.4a)

$M_{ij} = -M_{00}\delta_{ij} \quad (i, j=1,2,3)$ (1.4b)

$\delta_{ij} = 1 \quad (i=j)$
 $= 0 \quad (i \neq j)$ (1.4c)

【ポイント】 $M_{\alpha\beta}$ は結果としてミンコフスキー・メトリックとなる.

任意の二つの事象の間隔は、どの慣性観測者が計算しても一致する.

◆ $\Delta \bar{s}^2 = \Delta s^2$ (1.7)

二つの系の相対速度に直交する棒の長さは、どちらの系で測っても同じである.

ある系で同時な二つの事象は、それらを結ぶ線に直交する方向に動いているすべての系でも同時である.

$\Delta s^2 > 0$; 空間的に離れている

$\Delta s^2 < 0$; 時間的に離れている

$\Delta s^2 = 0$; スル的に離れている

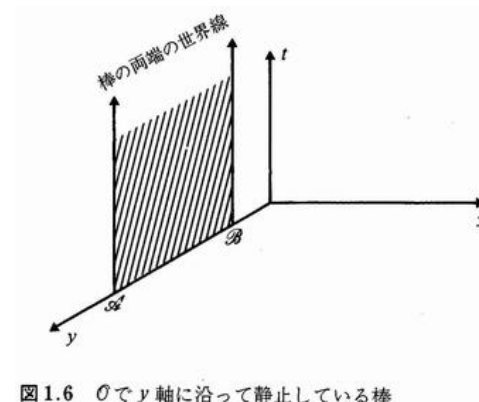


図 1.6 O で y 軸に沿って静止している棒

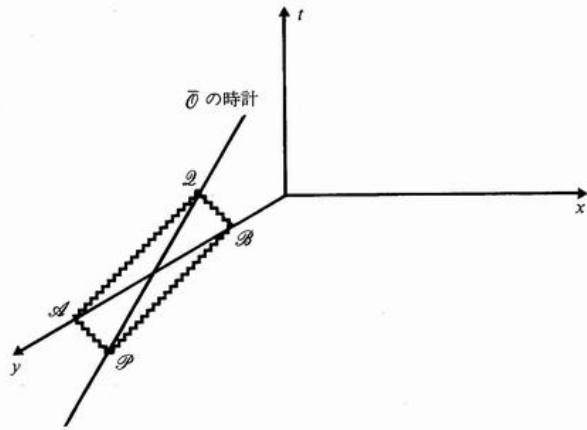


図 1.7 系 \bar{S} に対して x 方向に動いている系 \bar{S} の時計

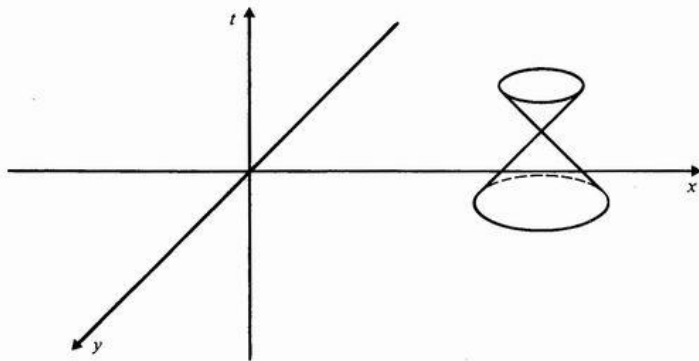


図 1.8 ある事象の光円錐. 次元 z は描かれていない.

絶対未来；未来／前方光円錐の中の事象のこと
 絶対過去；過去／後方光円錐の中の事象のこと
 絶対的な非因果的領域；光円錐の外側

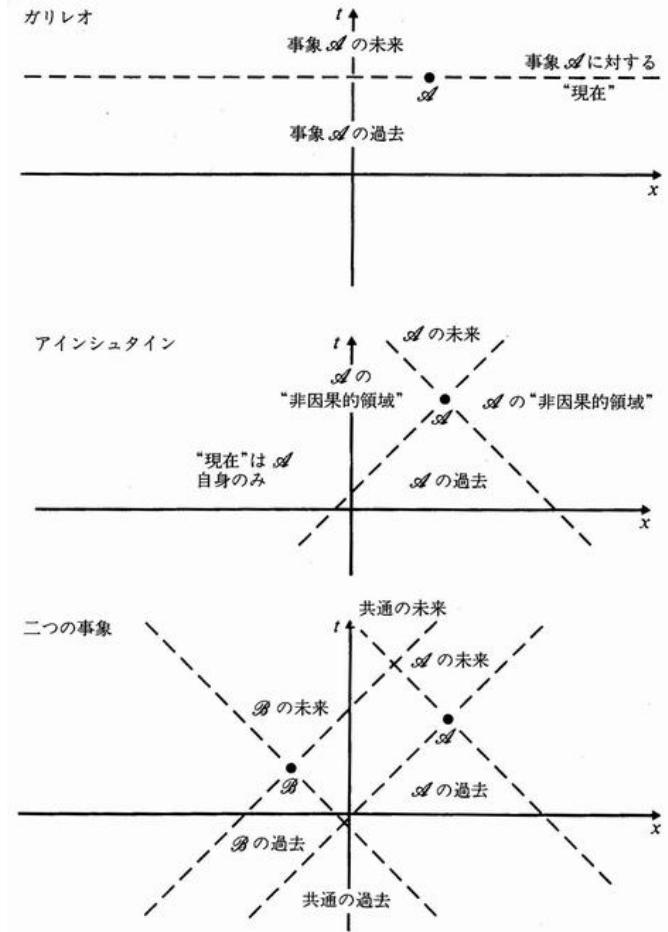


図 1.9 古い時空間概念と新しい時空間概念

1.7 不変双曲線

$\Delta s^2 = -(ct)^2 + (x)^2 = a^2$; 空間的な間隔 (spacelike)

$\Delta s^2 = -(ct)^2 + (x)^2 = b^2$; 時間的な間隔 (timelike)

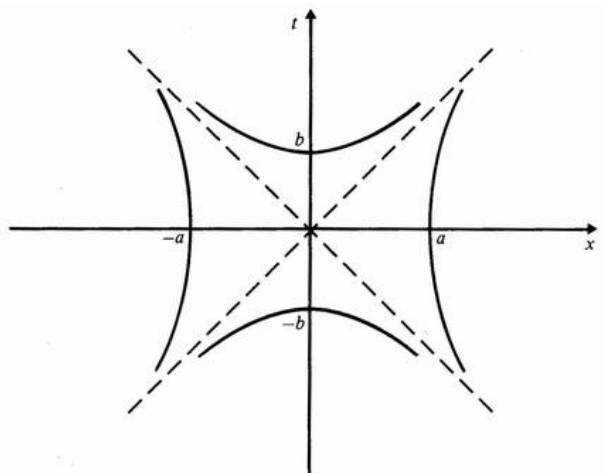


図 1.10 $a > b$ のときの不変双曲線

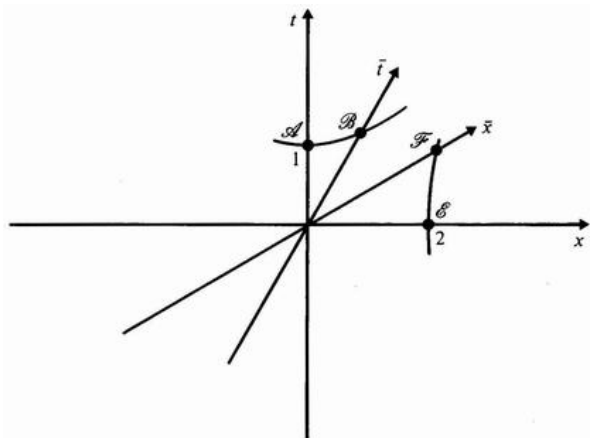


図 1.11 事象AとBを通る双曲線を用いたx̄軸とt̄軸の目盛づけ

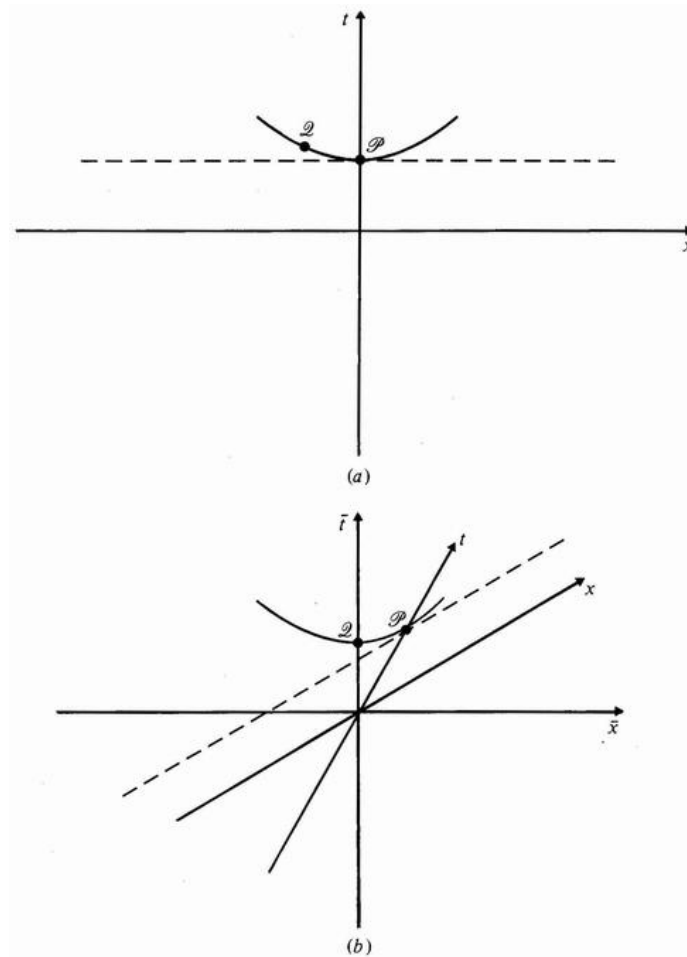


図 1.12 (a) \mathcal{O} の同時の線は、 \mathcal{P} での双曲線の接線である。(b) \mathcal{O} から見た同じ接線

1.8 重要な結果

時間の遅れ (time dilation)

◆ $(\Delta t)_{inO} = \gamma(\Delta \bar{t})_{in\bar{O}}$ (1.8)

◆ $\Delta t = \frac{\Delta \bar{t}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \Delta \bar{t}$ (1.8)

where $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1, \beta = \frac{v}{c} < 1$

固有時間 (proper time) (座標 \bar{O} で静止している時計の)

$\Delta s^2 = \Delta \bar{s}^2 = -c^2 \Delta \bar{t}^2 = -c^2 \Delta \tau^2$ (1.9)

【ポイント】座標 \bar{O} の固有時間は座標時間と同じ.

$c\Delta\tau = [c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2]^{\frac{1}{2}}$
 $\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma} \Delta t$ (1.10)

【ポイント】(1.10) は (1.8) と実質的に同じ.

ローレンツ収縮 (Lorentz contraction, length contraction)

◆ $\Delta x = \sqrt{1-\beta^2} \Delta \bar{x} = \frac{1}{\gamma} \Delta \bar{x}$ (1.11)

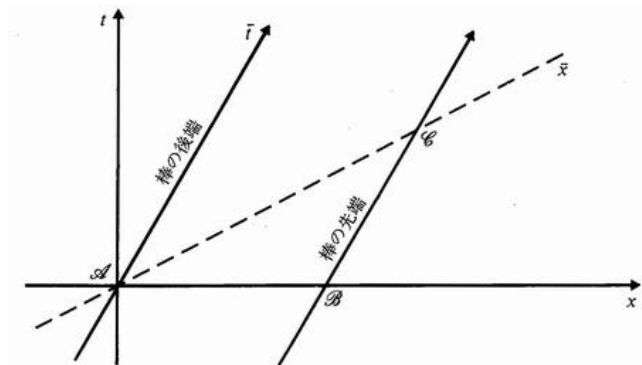


図1.13 $A\bar{B}$ の固有長さはその静止系での棒の長さであり、 $A\bar{B}$ の固有長さは、 O での長さである。

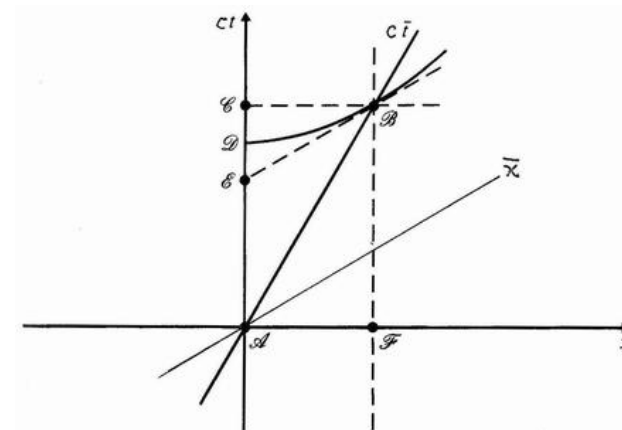


図1.14 $A\bar{B}$ の固有長さは、 \bar{O} で静止している時計によって測られた時間であり一方 $A\bar{B}$ の固有長さは O によって測られた時間である

1.9 ローレンツ変換

系 O の x 軸正方向に速度 v で系 \bar{O} は等速運動しているときのローレンツ・ブーストのローレンツ変換式は,

◆
$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
 (1.12)

where $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1, \beta = \frac{v}{c} < 1$

1.10 速度の合成則

◆ $w' = \frac{w+v}{1+vw}$ (1.13)

1 特殊相対論 1.14 練習問題

節の中で使われている公式と問題

1.1 特殊相対論の基本原理

1.2 慣性観測者の定義

1.3 新しい単位系

問題 1, 2

1.4 時空図

問題 3, 4

1.5 別の観測者による座標系

1.6 間隔の不変性

問題 5, 6, 7, 8, 9, 10

1.7 不変双曲線

問題 11, 21

1.8 重要な結果

問題 12, 13

1.9 ローレンツ変換

問題 16, 19, 20

1.10 速度の合成則

問題 14, 15, 18

1.11 パラドックスと物理的直観

問題 17

(1.1) ~ (1.7)

(1.8) ~ (1.11)

(1.12)

(1.13)

1 特殊相対論 1.14 練習問題

()

1 S I 単位の量を自然単位 ($c=1$) に変換し、すべてを m と kg で表せ.

(a) 解答例: $10J$. S I 単位系では $10J = 10kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$. $c=1$ だから $1s = 3 \times 10^8 m$, したがって $1s^{-2} = (9 \times 10^{16})^{-1} m^{-2}$. これから $10J = 10kg \cdot m^2 (9 \times 10^{16})^{-1} m^{-2} = 1.1 \times 10^{-16} kg$. あるいは c を変換因子として次のように用いる.

$$1 = 3 \times 10^8 ms^{-1},$$

$$1 = (3 \times 10^8)^{-1} m^{-1} s,$$

$$10J = 10kgm^2s^{-2} = 10kgm^2s^{-2} \times (1)^2$$

$$= 10kgm^2s^{-2} \times (3 \times 10^8)^{-2} s^2 m^{-2}$$

$$= 1.1 \times 10^{-16} kg$$

式から秒を消すために, c の何乗を掛けても, それで割ってもかまわない.

(b) $100W$ のパワー

(c) プランク定数 $h = 1.05 \times 10^{-34} J \cdot s$

(d) 車の速度 $v = 30m \cdot s^{-1}$

(e) 車の運動量 $3 \times 10^4 kg \cdot m \cdot s^{-1}$

(f) 1 気圧 $= 10^5 N \cdot m^{-2}$

(g) 水の密度 $10^3 kg \cdot m^{-3}$

(h) 光度 $10^6 J \cdot s^{-1} \cdot cm^{-2}$

【ポイント】シュッツ著では自然単位を使っているが、本書では S I 単位を使う。S I 単位は次元が解析できるので物理の本質を理解しやすい。自然単位は公式が簡単になるメリットがあるが、次元が混乱するデメリットがある。
+++++

【ポイント】自然単位では、光速度を 1 (無次元) とするため、長さの単位と時間の単位の次元が同じになる。光速度は $c = 3 \times 10^8 m/s$ なので、時間の単

1 特殊相対論 1.14 練習問題

位を m にするため, $1\text{s} = 3 \times 10^8 \text{m}$ と置換してしまう.

+++++

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad 100\text{W} &= 100\text{Js}^{-1} = 100\text{kgm}^2\text{s}^{-3} = 100\text{kgm}^2(3 \times 10^8 \text{m})^{-3} \\ &= 3.7 \times 10^{-24} \text{kgm}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad 1.05 \times 10^{-34} \text{Js} &= 1.05 \times 10^{-34} \text{kgm}^2\text{s}^{-1} \\ &= 1.05 \times 10^{-34} \text{kgm}^2 (3 \times 10^8 \text{m})^{-1} \\ &= 3.5 \times 10^{-43} \text{kgm} \end{aligned}$$

$$\text{(d)} \quad 30\text{ms}^{-1} = 30\text{m}(3 \times 10^8 \text{m})^{-1} = 10^{-7}$$

$$\text{(e)} \quad 3 \times 10^4 \text{kgms}^{-1} = 3 \times 10^4 \text{kgm}(3 \times 10^8 \text{m})^{-1} = 10^{-4} \text{kg}$$

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad 10^5 \text{Nm}^{-2} &= 10^5 \text{kgms}^{-2}\text{m}^{-2} = 10^5 \text{kgm}^{-1} (3 \times 10^8 \text{m})^{-2} \\ &= 1.1 \times 10^{-12} \text{kgm}^{-3} \end{aligned}$$

$$\text{(g)} \quad 10^3 \text{kgm}^{-3} \quad (\text{変換なし})$$

$$\begin{aligned} \text{(h)} \quad 10^6 \text{Js}^{-1}\text{cm}^{-2} &= 10^6 \text{kgm}^2\text{s}^{-3} (10^{-2} \text{m})^{-2} \\ &= 10^6 \text{kgm}^2 (3 \times 10^8 \text{m})^{-3} 10^4 \text{m}^{-2} \\ &= 3.7 \times 10^{-16} \text{kgm}^{-3} \end{aligned}$$

1 特殊相対論 1.14 練習問題

()

2 次の量を自然単位 ($c=1$) から S I 単位に変えよ.

$$\text{(a)} \quad v = 10^{-2}$$

$$\text{(b)} \quad \text{圧力} \quad 10^{19} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\text{(c)} \quad \text{時間} \quad ct = 10^{18} \text{m}$$

$$\text{(d)} \quad \text{エネルギー密度} \quad u = 1 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\text{(e)} \quad \text{加速度} \quad 10 \text{m}^{-1}$$

【ポイント】 S I 単位の次元をもとに変換する. S I 単位の次元の中に s^{-n} があれば, $(3 \times 10^8 \text{ms}^{-1})^n$ を掛ければよい.

+++++

$$\text{(a)} \quad v[\text{ms}^{-1}] = 10^{-2} \times (3 \times 10^8 \text{ms}^{-1}) = 3 \times 10^6 \text{ms}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad P[\text{Nm}^{-2} = \text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}] &= 10^{19} \text{kgm}^{-3} \times (3 \times 10^8 \text{ms}^{-1})^2 \\ &= 9 \times 10^{35} \text{Nm}^{-2} \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad t[\text{s}] = 10^{18} \text{m} \times (3 \times 10^8 \text{ms}^{-1})^{-1} = 3.3 \times 10^9 \text{s}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad u[\text{Jm}^{-3} = \text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}] &= 1 \text{kgm}^{-3} \times (3 \times 10^8 \text{ms}^{-1})^2 \\ &= 9 \times 10^{16} \text{Jm}^{-3} \end{aligned}$$

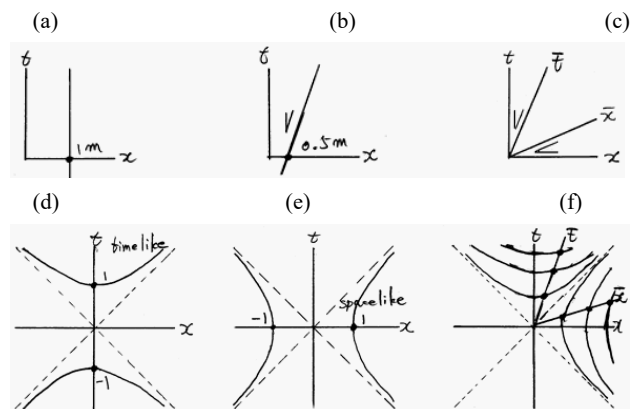
$$\text{(e)} \quad \alpha[\text{ms}^{-2}] = 10 \text{m}^{-1} \times (3 \times 10^8 \text{ms}^{-1})^2 = 9 \times 10^{17} \text{ms}^{-2}$$

1 特殊相対論 1.14 練習問題

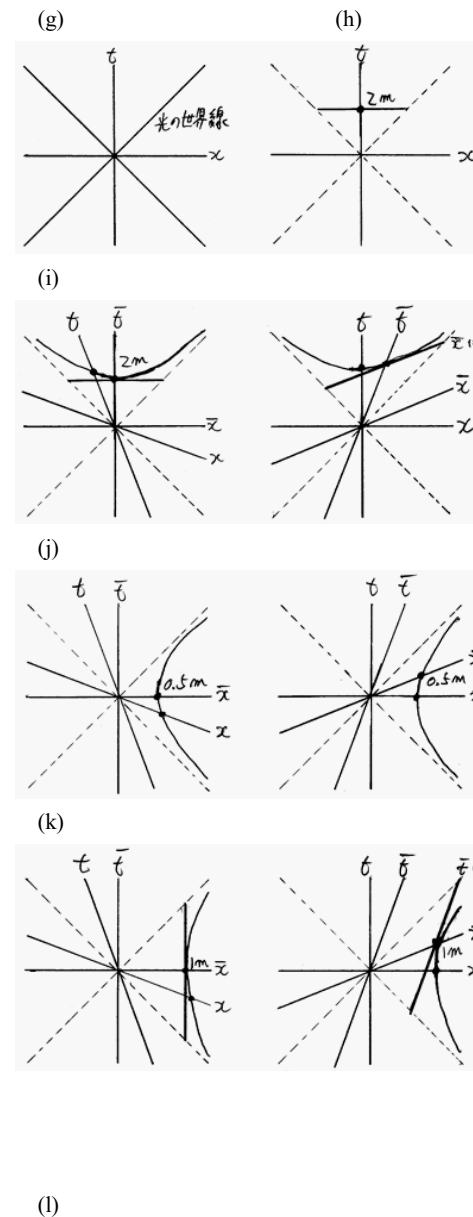
()

3 観測者 O の時空の x 軸と ct 軸を描いて、次に以下のものをその時空図上に描け.

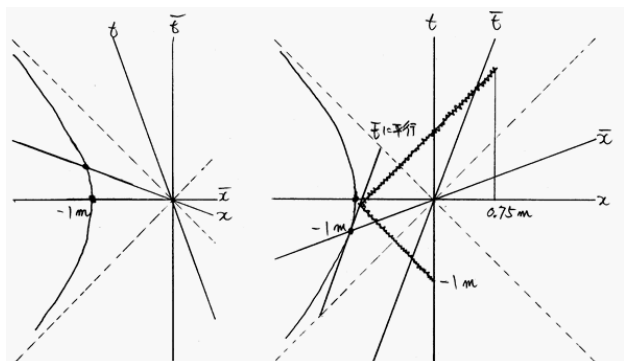
- (a) $x = 1\text{m}$ での O の時計の世界線.
- (b) $ct = 0$ のとき, $x = 0.5\text{m}$ で速度 $v = 0.1c$ で運動している粒子の世界線.
- (c) O に対して正の x 軸方向に速度 $v = 0.5c$ で動いている観測者 \bar{O} の $c\bar{t}$ 軸と \bar{x} 軸, ただし, その原点 ($c\bar{t} = \bar{x} = 0$) は O と一致するとする.
- (d) 原点からの間隔 Δs^2 が -1m^2 の事象の軌跡.
- (e) 原点からの間隔 Δs^2 が $+1\text{m}^2$ の事象の軌跡.
- (f) \bar{x} 軸と $c\bar{t}$ 軸に沿って 1m 間隔の目盛り.
- (g) 原点からの間隔が 0 の事象の軌跡.
- (h) 時刻 $ct = 2\text{m}$ (O から見て同時) に起こったすべての事象の軌跡.
- (i) 時刻 $c\bar{t} = 2\text{m}$ (\bar{O} から見て同時) に起こったすべての事象の軌跡.
- (j) $c\bar{t} = 0$, $\bar{x} = 0.5\text{m}$ で起こった事象.
- (k) $\bar{x} = 1\text{m}$ の事象の軌跡.
- (l) $ct = -1$, $x = 0\text{m}$ で負の x 方向に放出され, $\bar{x} = -1\text{m}$ に置かれた鏡で跳ね返り, $x = 0.75\text{m}$ に置かれた検出装置に吸収された光子の世界線.



1 特殊相対論 1.14 練習問題



(l)



()

4 次の和の各項を書き下し, (x^0, x^1, x^2, x^3) に対して (ct, x, y, z) を代入せよ.

(a) $\sum_{\alpha=0}^3 V_{\alpha} \Delta x^{\alpha}$, ここで $\{V_{\alpha}, \alpha = 0, \dots, 3\}$ は 4 個の任意の数の集り.

(b) $\sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2$

(a) $\sum_{\alpha=0}^3 V_{\alpha} \Delta x^{\alpha}$

$$= V_0 \Delta x^0 + V_1 \Delta x^1 + V_2 \Delta x^2 + V_3 \Delta x^3$$

$$= V_0 c \Delta t + V_1 \Delta x + V_2 \Delta y + V_3 \Delta z$$

(b) $\sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2$

$$= (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$$

$$= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

()

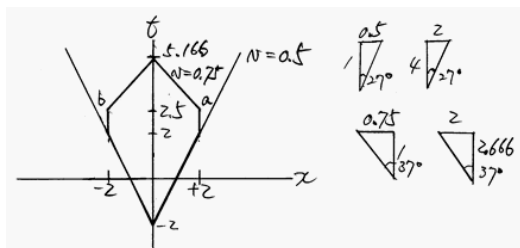
5 (a) 観測者 O の時空図を用いて O によってなされた次の実験を記述せよ。速度 $v = 0.5c$ をもった二つの粒子が $ct = -2$ で $x = 0$ から一つは正の x 方向に、他方は負の x 方向に発射された。それらは $x = \pm 2m$ に置かれた検出装置にぶつかった。時間の $ct = 0.5m$ 後に検出装置は $v = 0.75c$ で $x = 0$ に信号を送り返した。

(b) 信号は同時に $x = 0$ に戻ってきた。(描いた時空図でこのことが成り立っているかを確かめておくこと。) 二つの検出装置が $x = 0$ から同じ距離にあることはわかっているから、このことから実験者はそれらの検出装置が実際に信号を同時に送ったことを結論する。この結論がなぜ正しいかを説明せよ。

(c) 第2の観測者 \bar{O} が、 O に対して負の x 方向に速度 $v = 0.75c$ で動いている。 \bar{O} の時空図を描き、その中に O によってなされた実験を書け。 \bar{O} は検出装置が同時に信号を送ったと結論するだろうか? もしそうでないなら、どちらの信号が先に送られたか?

(d) O と \bar{O} の両方の座標を使って、検出装置が信号を発射した事象間の間隔 Δs^2 を計算せよ。

(a) $\tan^{-1} 0.5 = 27^\circ, \tan^{-1} 0.75 = 37^\circ$



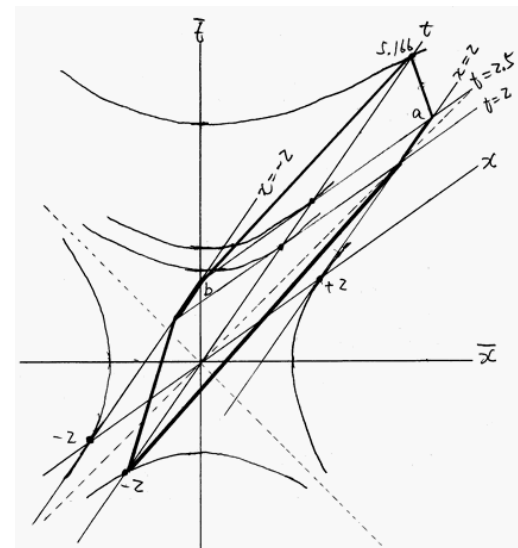
+++++

(b) 検出装置から信号が送り返された事象 a, b を結ぶ線が x 軸に平行だから同時の事象。

+++++

(c) 負側の検出装置から信号が送り返された事象 b が、正側の検出装置か

ら信号が送り返された事象 a より早い時刻に起きている。



+++++

(d) 事象の座標は,

$$a \xrightarrow{O} (2.5, 2, 0, 0), \quad b \xrightarrow{O} (2.5, -2, 0, 0), \quad ab \xrightarrow{O} (0, 4, 0, 0)$$

ローレンツ変換式を使って、系 \bar{O} へ変換する。

$$c\bar{t}_a = \frac{1}{\sqrt{1-0.75^2}}(2.5 + 0.75 \times 2) = 6.05$$

$$c\bar{t}_b = \frac{1}{\sqrt{1-0.75^2}}(2.5 - 0.75 \times 2) = 1.51$$

$$\bar{x}_a = \frac{1}{\sqrt{1-0.75^2}}(0.75 \times 2.5 + 2) = 5.86$$

$$\bar{x}_b = \frac{1}{\sqrt{1-0.75^2}}(0.75 \times 2.5 - 2) = -0.19$$

$$c\bar{t}_{ab} = 6.05 - 1.51 = 4.54$$

$$\bar{x}_{ab} = 5.86 + 0.19 = 6.05$$

系 \bar{O} での事象の座標は,

$$a \xrightarrow{O} (6.05, 5.86, 0, 0), \quad b \xrightarrow{O} (1.51, -0.19, 0, 0),$$

$$ab \xrightarrow{O} (4.54, 6.05, 0, 0)$$

$$(ab)^2 = 4^2 = 16, \quad (\bar{a}\bar{b})^2 = -4.54^2 + 6.05^2 = 16$$

(1.2)

6 式 (1.2) が $\alpha \neq \beta$ のとき, $M_{\alpha\beta}$ と $M_{\beta\alpha}$ を別々にではなく, $M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}$ の形でのみ含むことを示せ. このことから一般性を失うことなく $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$ とおけることを示せ.

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta\bar{s}^2 &= M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \\ &= M_{00}\Delta x^0\Delta x^0 + M_{01}\Delta x^0\Delta x^1 + M_{02}\Delta x^0\Delta x^2 + M_{03}\Delta x^0\Delta x^3 \\ &\quad + M_{10}\Delta x^1\Delta x^0 + M_{11}\Delta x^1\Delta x^1 + M_{12}\Delta x^1\Delta x^2 + M_{13}\Delta x^1\Delta x^3 \\ &\quad + M_{20}\Delta x^2\Delta x^0 + M_{21}\Delta x^2\Delta x^1 + M_{22}\Delta x^2\Delta x^2 + M_{23}\Delta x^2\Delta x^3 \\ &\quad + M_{30}\Delta x^3\Delta x^0 + M_{31}\Delta x^3\Delta x^1 + M_{32}\Delta x^3\Delta x^2 + M_{33}\Delta x^3\Delta x^3 \\ &= M_{00}\Delta x^0\Delta x^0 + M_{11}\Delta x^1\Delta x^1 + M_{22}\Delta x^2\Delta x^2 + M_{33}\Delta x^3\Delta x^3 \\ &\quad + (M_{01} + M_{10})\Delta x^0\Delta x^1 + (M_{02} + M_{20})\Delta x^0\Delta x^2 \\ &\quad + (M_{12} + M_{21})\Delta x^1\Delta x^2 + (M_{03} + M_{30})\Delta x^0\Delta x^3 \\ &\quad + (M_{13} + M_{31})\Delta x^1\Delta x^3 + (M_{23} + M_{32})\Delta x^2\Delta x^3 \end{aligned}$$

(1.2)

7 式 (1.2) を導いた議論で、 \bar{O} の座標が次のような O の座標の線形結合で与えられていると仮定する。

$$c\bar{t} = \alpha ct + \beta x, \quad \bar{x} = \mu ct + \nu x, \quad \bar{y} = ay, \quad \bar{z} = bz$$

ここで、 $\alpha, \beta, \mu, \nu, a, b$ は \bar{O} の O に対する速度 \mathbf{v} の関数ではありうるが、座標に依存しない。式 (1.2) の数 $\{M_{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 0, \dots, 3\}$ を $\alpha, \beta, \mu, \nu, a, b$ で表せ。

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \tag{1.2}$$

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \tag{1.2}$$

$$= -(c\Delta\bar{t})^2 + (\Delta\bar{x})^2 + (\Delta\bar{y})^2 + (\Delta\bar{z})^2$$

$$= -(\alpha ct + \beta x)^2 + (\mu ct + \nu x)^2 + (ay)^2 + (bz)^2$$

$$= -\alpha^2(ct)^2 - 2\alpha\beta ct x - \beta^2 x^2 + \mu^2(ct)^2 + 2\mu\nu ct x + \nu^2 x^2 + a^2 y^2 + b^2 z^2$$

$$= (-\alpha^2 + \mu^2)(ct)^2 + (-2\alpha\beta + 2\mu\nu)ct x + (-\beta^2 + \nu^2)x^2 + a^2 y^2 + b^2 z^2$$

$$M_{00} = \mu^2 - \alpha^2, \quad M_{11} = \nu^2 - \beta^2, \quad M_{22} = a^2, \quad M_{33} = b^2,$$

$$M_{01} = \mu\nu - \alpha\beta, \quad M_{02} = M_{03} = M_{12} = M_{13} = M_{23} = 0$$

(1.2) ~ (1.4)

8 (a) 一般の $\{M_{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 0, \dots, 3\}$ に対して、式 (1.2) から式 (1.3) を導け。

(b) 式 (1.3) の任意の $\{\Delta x^i\}$ に対して $\Delta\bar{s}^2 = 0$ だから、式 (1.3) で Δx^i を $-\Delta x^i$ に変え、その結果の式をもとの式から引いて、 $i = 1, 2, 3$ に対して、 $M_{0i} = 0$ を示せ。

(c) $\Delta\bar{s}^2 = 0$ とした式 (1.3) を用いて式 (1.4a) を示せ。(ヒント: $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ が任意であることを使え。)

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \tag{1.2}$$

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{00}(\Delta r)^2 + 2(M_{0i}\Delta x^i)\Delta r + M_{ij}\Delta x^i\Delta x^j \tag{1.3}$$

$$M_{ij} = -M_{00}\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad \delta_{ij} = 1 (i = j), 0 (i \neq j) \tag{1.4b}$$

(a) $M_{\alpha\beta}$ を分類する。

$$M_{00}, M_{01}, M_{02}, M_{03}, M_{10}, M_{20}, M_{30}, M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, M_{33}$$

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \tag{1.2}$$

$$= M_{00}(\Delta x^0)^2 + M_{0i}(\Delta x^0)(\Delta x^i) + M_{i0}(\Delta x^i)(\Delta x^0) + M_{ij}(\Delta x^i)(\Delta x^j)$$

($\Delta x^0 = \Delta t = \Delta r$ を代入)

$$= M_{00}(\Delta r)^2 + 2(M_{0i}\Delta x^i)\Delta r + M_{ij}\Delta x^i\Delta x^j \tag{1.3}$$

+++++

(b) 式 (1.3) で $\Delta x^i \rightarrow -\Delta x^i$ とする。

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{00}(\Delta r)^2 - 2(M_{0i}\Delta x^i)\Delta r + M_{ij}\Delta x^i\Delta x^j \tag{1.3'}$$

$$\text{式 (1.3) - 式 (1.3')} = 4(M_{0i}\Delta x^i)\Delta r = 0$$

$$M_{0i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.4a}$$

+++++

$$(c) \quad \Delta\bar{s}^2 = M_{00}(\Delta r)^2 + M_{ij}\Delta x^i\Delta x^j = 0 \tag{1.3}$$

$$\Delta x = 1, \Delta y = 0, \Delta z = 0 \text{ として } M_{00} + M_{11} = 0 \quad \therefore M_{11} = -M_{00}$$

$$\Delta x = 0, \Delta y = 1, \Delta z = 0 \text{ として } M_{00} + M_{22} = 0 \quad \therefore M_{22} = -M_{00}$$

$$\Delta x = 0, \Delta y = 0, \Delta z = 1 \text{ として } M_{00} + M_{33} = 0 \quad \therefore M_{33} = -M_{00}$$

$$\Delta \bar{s}^2 = M_{00}(\Delta t)^2 - M_{00}(\Delta x)^2 - M_{00}(\Delta y)^2 - M_{00}(\Delta z)^2$$

$$+ M_{12}(\Delta x)(\Delta y) + M_{13}(\Delta x)(\Delta z) + M_{23}(\Delta y)(\Delta z) = 0$$

$$M_{12} = M_{13} = M_{23} = 0$$

+++++

(a), (b), (c)をまとめて

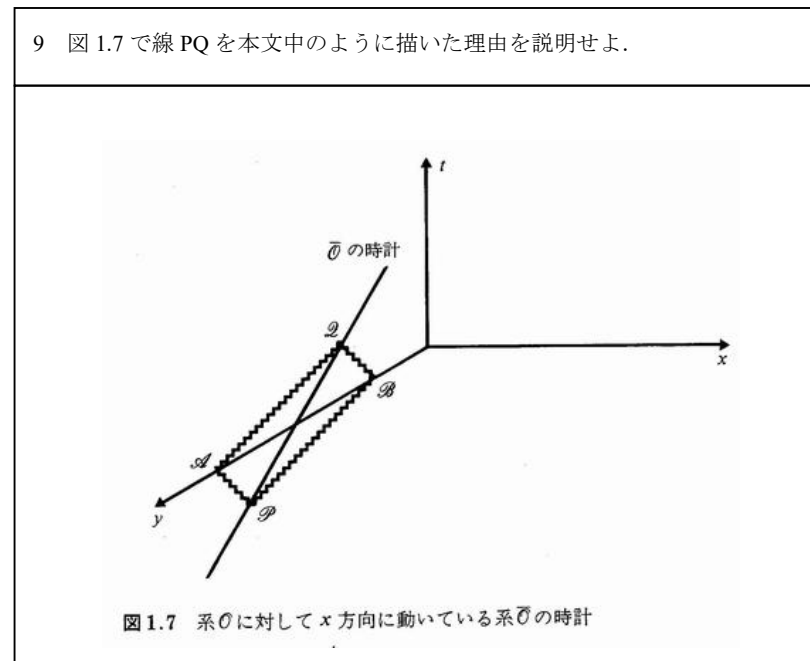
$$M_{0i} = 0 \quad (i=1,2,3)$$

$$M_{ij} = -M_{00}\delta_{ij} \quad (i, j=1,2,3), \quad \delta_{ij} = 1 (i=j), 0 (i \neq j)$$

$$\Delta \bar{s}^2 = -M_{00}[-(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] = -M_{00}\Delta s^2$$

()

9 図 1.7 で線 PQ を本文中のように描いた理由を説明せよ.



ミンコフスキー時空図上では光の世界線は傾き 45 度の直線となる.

()

10 ある系での座標 (ct, x, y, z) が以下で与えられている一組の事象についてそれらの間隔を時間的, 空間的あるいはヌルのに分類せよ.

- (a) $(0, 0, 0, 0)$ と $(-1, 1, 0, 0)$
 (b) $(1, 1, -1, 0)$ と $(-1, 1, 0, 2)$
 (c) $(6, 0, 1, 0)$ と $(5, 0, 1, 0)$
 (d) $(-1, 1, -1, 1)$ と $(4, 1, -1, 6)$

- (a) 差 $(1, -1, 0, 0)$ $\Delta s^2 = -1^2 + (-1)^2 = 0$ ヌルの
 (b) 差 $(2, 0, -1, -2)$ $\Delta s^2 = -2^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 1$ 空間的
 (c) 差 $(1, 0, 0, 0)$ $\Delta s^2 = -1^2 = -1$ 時間的
 (d) 差 $(-5, 0, 0, -5)$ $\Delta s^2 = (-5)^2 + (-5)^2 = 0$ ヌルの

()

11 双曲線 $-(ct)^2 + x^2 = a^2$ と $-(ct)^2 + x^2 = -b^2$ が a と b のいかんにかかわらず, 直線 $ct = \pm x$ に漸近的に近づくことを示せ.

【ポイント】

$$-(ct)^2 + x^2 = a^2$$

上式は x 軸上の $\pm a$ を通る空間的な双曲線である.

$$-(ct)^2 + x^2 = -b^2$$

上式は ct 軸上の $\pm b$ を通る時間的な双曲線である.

+++++

両辺を x^2 で除して $x \rightarrow \infty$ とする.

$$-\frac{(ct)^2}{x^2} + 1 = \frac{a^2}{x^2} = 0 \quad \frac{(ct)^2}{x^2} = 1 \quad ct = \pm x$$

$$-\frac{(ct)^2}{x^2} + 1 = -\frac{b^2}{x^2} = 0 \quad \frac{(ct)^2}{x^2} = 1 \quad ct = \pm x$$

()

12 (a) 図 1.14 の双曲線 DB の接線は \bar{O} にとっての同時の線であるという事実を使って、時間間隔 AE は \bar{O} が A から B まで動くときその時計が記録する時間より短いことを示せ。

(b) 次の式を示せ：

$$(\Delta s^2)_{AE} = (1 - (v/c)^2)(\Delta s^2)_{AB}$$

(c) (b) を使って、 \bar{O} から見ると O の時計がちょうど正しい割合でゆっくり進むことを示せ。

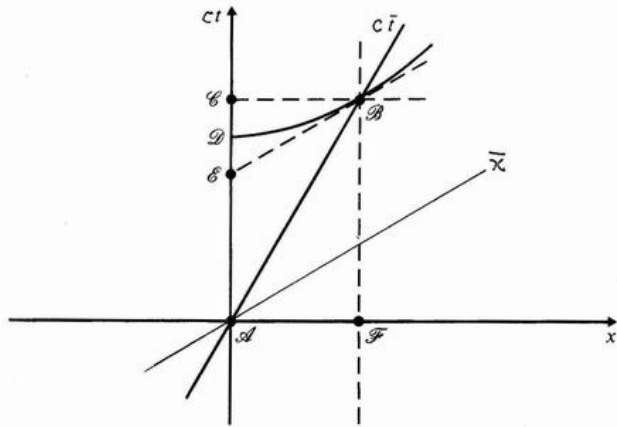


図 1.14 A B の固有長さは、 \bar{O} で静止している時計によって測られた時間であり一方 A C の固有長さは O によって測られた時間である

【ポイント】 \bar{x} 軸とそれに平行な線は、系 \bar{O} の同時の線である。双曲線 DB の接線で \bar{x} 軸に平行な線 EB も系 \bar{O} の同時の線の一つである。

+++++

(a)

$$(\Delta s^2)_{AE} < (\Delta s^2)_{AD} = (\Delta s^2)_{AB}$$

$\Delta x = 0$, $\Delta \bar{x} = 0$ だから、

$$t_{AE} < t_{AD} = \bar{t}_{AB}$$

+++++

(b) O の座標系で $AC = ct$ とすると、 $\beta = v/c$ として、

\bar{t} 軸の傾きは β , \bar{x} 軸と EB の傾きは $\frac{1}{\beta}$ であるから、

$$CB = c\beta t, \quad EC = c\beta^2 t, \quad AE = c(1 - \beta^2)t$$

$$C \xrightarrow{O} (ct, 0, 0, 0), \quad B \xrightarrow{O} (ct, c\beta t, 0, 0), \quad E \xrightarrow{O} (c(1 - \beta^2)t, 0, 0, 0)$$

$$(\Delta s^2)_{AE} = -c^2(1 - \beta^2)^2 t^2$$

$$(\Delta s^2)_{AB} = -c^2 t^2 + c^2 \beta^2 t^2 = -c^2(1 - \beta^2)t^2$$

$$(\Delta s^2)_{AE} / (\Delta s^2)_{AB} = 1 - \beta^2 < 1$$

与式が証明できた。

+++++

(c) \bar{O} の座標系では \bar{x} 軸に平行な EB は同時である。

$$E \xrightarrow{O} (ct_{AE}, 0, 0, 0), \quad E \xrightarrow{\bar{O}} (c\bar{t}_{AB}, 0, 0, 0)$$

$$(\Delta s^2)_{AE} = (ct_{AE})^2, \quad (\Delta s^2)_{AB} = (\Delta \bar{s}^2)_{AB} = (c\bar{t}_{AB})^2$$

問題(b)の結果を使って、

$$\frac{(\Delta s^2)_{AE}}{(\Delta s^2)_{AB}} = \frac{(ct_{AE})^2}{(c\bar{t}_{AB})^2} = \frac{(t_{AE})^2}{(\bar{t}_{AB})^2} = 1 - \beta^2$$

$$t_{AE} = \sqrt{1 - \beta^2} \times \bar{t}_{AB} = \frac{1}{\gamma} \bar{t}_{AB}$$

O 系で事象 E は ct_{AE} で起こり \bar{O} 系で事象 B は $c\bar{t}_{AB}$ で起こり、2つの事象は \bar{O} 系で同時であるので、 \bar{O} 系から見ると O 系の手計が遅れて見える。

【ポイント】 上式では、観測系が - (バー) ありであることに注意のこと。練習問題 13 の時間の遅れの式 (1.8) では、観測系が - (バー) なしであり、系が逆になっている。

()

13 パイ中間子 (あるいはパイオン) とよばれる素粒子の半減期は, その崩壊の観測者にパイオンが静止しているとき, $2.5 \times 10^{-8} s$ である. 相対性原理よりパイオンが $v = 0.999c$ で運動しているとき, 静止している観測者から見た半減期は $5.6 \times 10^{-7} s$ となることを示せ.

【ポイント】式 (1.8) は, 粒子の静止系 \bar{O} の固有時間 $(\Delta\bar{t})_{in\bar{O}}$ を観測系 O の時計で計測すると $(\Delta t)_{inO}$ となり必ず固有時間より大きいことを示す. 練習問題 12 と比べて観測系と静止系が逆になっていることに注意.

+++++
時間の遅れの式 (1.8) を使って,

◆ $(\Delta t)_{inO} = \gamma(\Delta\bar{t})_{in\bar{O}}, \text{ where } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1, \beta = \frac{v}{c} < 1 \quad (1.8)$

$$= \frac{2.5 \times 10^{-8}}{\sqrt{1-0.999^2}} = 5.6 \times 10^{-7} s$$

(1.8) (1.11) (1.13)

14 O に対する \bar{O} の速度 v が小さいとする ($|v| \ll 1$). そのとき時間の遅れ, ローレンツ収縮, 速度の合成則が, それぞれ以下の式で近似できることを示せ. (ここでの v と w は c との比として無次元とする.)

(a) $\Delta t \approx (1 + \frac{1}{2}v^2)\Delta\bar{t}$

(b) $\Delta x \approx (1 - \frac{1}{2}v^2)\Delta\bar{x}$

(c) $w' \approx w + v - vw(w+v) \quad (|w| \ll 1 \text{ も成り立つとする})$

(d) $|v| = w = 0.1c$ のとき, これらの近似の相対誤差はいくらか?

(a) 時間の遅れの式 (1.8) を使って,

◆ $\Delta t = \frac{\Delta\bar{t}}{\sqrt{1-v^2}} \quad (1.8)$

$$= (1-v^2)^{-\frac{1}{2}} \Delta\bar{t} \approx (1 + \frac{1}{2}v^2)\Delta\bar{t}$$

where $(1+v)^\alpha \approx (1+\alpha v)$ when $v \ll 1$

+++++
(b) ローレンツ収縮の式 (1.11) を使って,

◆ $\Delta x = \sqrt{1-v^2} \Delta\bar{x} \quad (1.11)$

$$= (1-v^2)^{\frac{1}{2}} \Delta\bar{x} \approx (1 - \frac{1}{2}v^2)\Delta\bar{x}$$

+++++
(c) 速度の合成則の式 (1.13) を使って,

◆ $w' = \frac{w+v}{1+vw} \quad (1.13)$

$$= (w+v)(1+vw)^{-1} \approx (w+v)(1-wv)$$

$$= w+v - vw(w+v)$$

+++++

(d)

(a)

$$(1-0.1^2)^{-\frac{1}{2}} = 1.005037815, \quad (1+\frac{1}{2}0.1^2) = 1.005$$

$$\frac{0.0000378}{1.005} = 3.8 \times 10^{-5}$$

(b)

$$(1-0.1^2)^{\frac{1}{2}} = 0.994987437, \quad (1-\frac{1}{2}0.1^2) = 0.995$$

$$\frac{0.0000125}{0.994987} = 1.3 \times 10^{-5}$$

(c)

$$\frac{0.1+0.1}{1+0.1 \times 0.1} = 0.19801980,$$

$$0.1+0.1-0.1 \times 0.1 \times (0.1+0.1) = 0.198$$

$$\frac{0.0000198}{0.19801980} = 10^{-4}$$

(1.8) (1.11) (1.13)

15 \bar{O} の O に対する速度がほとんど光速とする ($|v|=1-\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$).

練習問題 14 の公式は次のようになることを示せ.

(a) $\Delta t \approx \Delta \bar{t} / \sqrt{(2\varepsilon)}$

(b) $\Delta x \approx \Delta \bar{x} \sqrt{(2\varepsilon)}$

(c) $w' = 1 - \varepsilon(1-w)/(1+w)$

(d) $\varepsilon = 0.1$ と $w = 0.9$ のとき, これらの近似の相対誤差はいくらか?

(ここでの v と w は c との比として無次元とする.)

(a) 時間の遅れの式 (1.8) を使って,

◆
$$\frac{\Delta t}{\Delta \bar{t}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{1.8}$$

$$= (1-v^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-(1-\varepsilon)^2)^{-\frac{1}{2}} = (2\varepsilon - \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta \bar{t}} \approx (2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$$

+++++

(b) ローレンツ収縮の式 (1.11) を使って,

◆
$$\frac{\Delta x}{\Delta \bar{x}} = \sqrt{1-v^2} \tag{1.11}$$

$$= (1-(1-\varepsilon)^2)^{\frac{1}{2}} = (2\varepsilon - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta \bar{x}} \approx (2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$$

+++++

(c) 速度の合成則の式 (1.13) を使って,

◆
$$w' = \frac{w+v}{1+wv} \tag{1.13}$$

$$= \frac{w+1-\varepsilon}{1+w-w\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon-w\varepsilon}{1+w-w\varepsilon}$$

1 特殊相対論 1.14 練習問題

◇ $w' \approx 1 - \varepsilon \frac{1-w}{1+w}$

+++++

(d)

(a)

$$(1 - 0.9^2)^{\frac{1}{2}} = 2.294157339, \quad (2 \times 0.1)^{\frac{1}{2}} = 2.236067978$$

$$\frac{0.058}{2.29415} = 0.025$$

(b)

$$(1 - 0.9^2)^{\frac{1}{2}} = 0.435889894, \quad (2 \times 0.1)^{\frac{1}{2}} = 0.447213595$$

$$\frac{0.0113}{0.43588} = 0.025$$

(c)

$$\frac{0.9 + 0.9}{1 + 0.9 \times 0.9} = 0.994475138,$$

$$1 - 0.1 \frac{1 - 0.9}{1 + 0.9} = 0.994736842$$

$$\frac{0.000026}{0.99} = 2.6 \times 10^{-4}$$

1 特殊相対論 1.14 練習問題

(1.8) (1.11) (1.12)

16 ローレンツ変換式 (1.12) を用いて, (a) 時間の遅れ, (b) ローレンツ収縮の公式を導け. まず, 比較すべき事象のペアをみつめて, 次にローレンツ変換を使って本文でのように不変双曲線を用いて問題を解け.

系 O の x 軸正方向に速度 v で系 \bar{O} は等速運動しているときのローレンツ・ブーストのローレンツ変換式は,

◆
$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

where $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$ $\beta = \frac{v}{c} < 1$

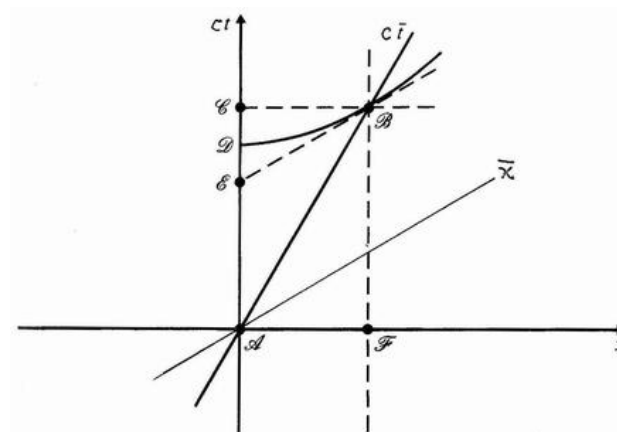


図1.14 $A B$ の固有長さは, \bar{O} で静止している時計によって測られた時間であり一方 $A C$ の固有長さは O によって測られた時間である

(a)

$$B \xrightarrow{O} (ct, c\beta t, 0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \beta t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \gamma t - \gamma\beta^2 t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} t/\gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{t}_{AB} = \frac{1}{\gamma} t$$

◆ $t = \gamma \bar{t}$ (1.8)

これは、時間の遅れの式である。

+++++

(b)

$$F \xrightarrow{O} (0, x, 0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_{AF} = \gamma x$$

◆ $x = \frac{1}{\gamma} \bar{x}$ (1.11)

これは、ローレンツ収縮の式である。

(1.11)

17 長さ 20 m の軽い棒が 15 m の長さの小屋の横に置いてある。オリンピックの陸上選手が、その棒をもって遠くに持っていき、そこから棒を小屋に向けて 0.8 c の速さで小屋めがけて走る。彼の友達は小屋の戸の前で立っている。若干難しいものもあるが、以下の質問のすべてに答えてみよ。

- (a) 棒が近づいてくるとき、その友人が測る棒の長さはいくらか？
- (b) 小屋の戸は最初開いているとする。走者と棒が完全に小屋の中に入るやいなや、友人は戸を閉める。友人が測って、戸が閉められてからどれだけ後に棒の先端は小屋の反対側の壁にぶつかるか？ 戸を通過する事象と壁にぶつかる事象の間隔を計算せよ。その間隔は空間的か、時間的か、あるいはヌル的か？
- (c) 走者の基準系では小屋と棒の長さはいくらか？
- (d) 走者は棒の先端が小屋の反対側に壁にぶつかったとき、棒が完全に小屋に含まれていると信じるか。
- (e) 衝突後、棒と走者とは小屋に対して静止する。小屋の戸は棒が止まる前に閉められたのだから、友人の観点では、20 m の棒が、15 m の小屋に入っていることになる。これは可能か？一方、走者の観点到立つと、戸が閉まる前に衝突によって棒は止まる。したがって戸をしめることはできない。棒や小屋に入って戸は閉まっているのか。あるいはそうでないのか？
- (f) 友人の観点からの時空図を描き、それを使って読者の結論を示し、正当化せよ。

【ポイント】この問題はガレージのパラドックスといわれているものである。この問題では車が棒に代わっている。このパラドックスはこのホームページで詳細に解説されている。数値はこの問題のものを使っている。

+++++

(a)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} = \frac{1}{0.6},$$

1 特殊相対論 1.14 練習問題

$$x = \frac{1}{\gamma} \bar{x} = 0.6 \times 20 = 12m$$

+++++

(b)

$$ct = \frac{15-12}{0.8} = 3.75m$$

$$A \xrightarrow{o} (0, 0), E \xrightarrow{o} (3.75, 15)$$

$$\Delta s^2 = -3.75^2 + 15^2 = 211m^2, \text{空間的}$$

+++++

(c) 小屋の長さ = $\frac{1}{\gamma} 15 = 0.6 \times 15 = 9m$, 棒の長さ = $20m$

+++++

(d) 空間的に離れている事象の前後は判定できない.

+++++

(e) 戸が閉められたのは, どの観測者から見ても事実である. 走者から見て, 棒の先端が反対側の壁に到達したとき棒の後端はまだ小屋に入っていないが, 衝突した情報が棒の後に伝わるのは光速を超えられないので, 後端も小屋の中に入ることができる. 小屋から見れば, 棒の長さの方が短いので, 入ったことを確認できる.

+++++

(f) (友人) から見て,

棒の静止長 $AD = 20m$

小屋の長さ $AC = 15m$

棒の動長 $AB = 12m$

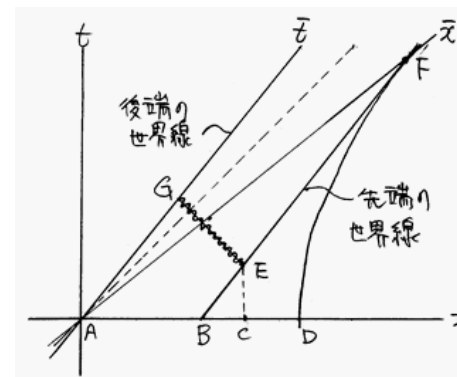
\bar{O} (走者) から見て,

棒の静止長 $AF = 20m$

事象 E; 棒の先端が壁に到達

事象 G; 先端衝突情報が後端に届く

1 特殊相対論 1.14 練習問題



(1.13)

18 (a) アインシュタインの速度の合成則 (1.13) は次式で定義される速度パラメータ u の概念を導入すると簡単な形をとる.

$$v = \tanh u$$

$-\infty < u < \infty$ に対し速度が許容範囲 $-1 < v < 1$ に含まれることに注意する. もし

$$v = \tanh u, \quad w = \tanh U$$

なら式 (1.13) は次のように書けることを示せ.

$$w' = \tanh(u + U)$$

これは速度のパラメータが線形に足し合わされることを意味する.

(b) これを用いて次の問題を解け. ある星は第 2 の星が $v = 0.9c$ の速さで遠ざかっていることを観測する. 第 2 の星は第 3 の星が同じ方向に $0.9c$ の速さで遠ざかっていることを観測する. 同様にして第 3 の星は, 第 4 の星を, 第 4 の星は第 5 の星をというようにある大きな数 N 個の星まで続くとする. 第 N 番目星の最初の星に対する速度はいくらか? 正確な答と大きな N に対し有用な近似式を与えよ.

(ここでの v と w は c との比として無次元とする.)

(a)

$$\begin{aligned} \blacklozenge \quad w' &= \frac{v + w}{1 + v \cdot w} && (1.13) \\ &= \frac{\tanh u + \tanh U}{1 + \tanh u \cdot \tanh U} = \tanh(u + U) \end{aligned}$$

+++++

(b) 第 3 星は,

$$\tanh(\tanh^{-1} 0.9 + \tanh^{-1} 0.9) = \tanh(2 \tanh^{-1} 0.9) = 0.9945$$

第 4 星は,

$$\tanh(3 \tanh^{-1} 0.9) = 0.9997$$

第 5 星は,

$$\tanh(4 \tanh^{-1} 0.9) = 0.999985$$

第 $N+1$ 星は,

$$\tanh(N \tanh^{-1} 0.9) \approx 1 - 2 \cdot 19^{-N}$$

+++++

最後の式の証明

$$\tanh x = 1 - \frac{1}{2 \cosh^2 x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx \frac{e^x}{2} \quad \text{when } x > 4$$

$$\tanh x \approx 1 - 2 \cdot \exp(-2x) = 1 - 2 \cdot \exp(-2N \tanh^{-1} 0.9)$$

$$\text{where } x = N \tanh^{-1} 0.9$$

$$\exp(-2N \tanh^{-1} 0.9) = \left(\exp(2 \tanh^{-1} 0.9) \right)^{-N} = 19^{-N}$$

$$\tanh(N \tanh^{-1} 0.9) \approx 1 - 2 \cdot 19^{-N}$$

第 6 星は,

$$\tanh(5 \tanh^{-1} 0.9) = 0.999999192 = 1 - 8.07 \times 10^{-7}$$

$$1 - 2 \cdot 19^{-5} = 1 - 8.07 \times 10^{-7}$$

()

19 (a) 練習問題 1.18 で導入した速度パラメータを用いて, ローレンツ変換の式 (1.12) が次の形に書けることを示せ.

$$\bar{t} = ct \cosh u - x \sinh u, \quad \bar{y} = y$$

$$\bar{x} = -ct \sinh u + x \cosh u, \quad \bar{z} = z$$

(b) 恒等式 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ を用いて, これらの式から間隔の普遍性を示せ.

(c) 時空の幾何学と通常の 2 次元ユークリッド幾何学との類似点をできる限り導け. ここでローレンツ変換に対応する座標変換は次のように与えられる.

$$\bar{x} = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$\bar{y} = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

間隔に対応するものは何か? 不変双曲線に対応するものは何か?

(a) ローレンツ変換式は,

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

where $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$ $\beta = \frac{v}{c} < 1$

数学公式

$$\cosh^2 u = \frac{1}{1 - \tanh^2 u}, \quad \sinh^2 u = \frac{\tanh^2 u}{1 - \tanh^2 u}, \quad \tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u}$$

を使って,

$$\beta = \tanh u$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 u}} = \cosh u$$

$$\gamma\beta = \cosh u \tanh u = \sinh u$$

これから, 問題の式が導出できる.

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u & -\sinh u & 0 & 0 \\ -\sinh u & \cosh u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

+++++

(b) 間隔の普遍性を確認する.

$$\begin{aligned} \Delta\bar{s}^2 &= -(c\bar{t})^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \\ &= -(ct)^2 \cosh^2 u + 2ctx \cosh u \sinh u - x^2 \sinh^2 u \\ &\quad + (ct)^2 \sinh^2 u - 2ctx \cosh u \sinh u + x^2 \cosh^2 u + y^2 + z^2 \\ &= -(ct)^2 (\cosh^2 u - \sinh^2 u) + x^2 (\cosh^2 u - \sinh^2 u) + y^2 + z^2 \\ &= -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \Delta s^2 \end{aligned}$$

(変数は省略した.)

+++++

(c) 略 (4.10 練習問題 25(b) を参照のこと)

()

20 ローレンツ変換を行列の形に書け.

練習問題 16 と 19 に示した.

ローレンツ・ブーストのローレンツ変換式は,

$$\diamond \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

$$\text{where } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1 \quad \beta = \frac{v}{c} < 1$$

()

21 (a) 二つの事象が時間的に離れているなら, それらが同一点で起こる, すなわち同じ空間座標をもつようなローレンツ系があることを示せ.

(b) 同様に二つの事象が空間的に離れているなら, それらが同時に起こるようなローレンツ系があることを示せ.

(a) 二つの事象を結ぶ線が時間軸と平行な座標系. 二つの事象を結ぶ線が世界線であるなら, それは停止しているものの世界線である.

(b) 時間軸に垂直な超平面(3次元)上に二つの事象があるような座標系. この超平面は x 軸と y 軸と z 軸に平行である. z 軸を無視すれば, 平面になるので想像できるが, 3次元超平面は想像し難い.