1　特殊相対論

ミンコフスキー時空，ローレンツ変換，ローレンツ収縮，ローレンツ不変，双子のパラドックス，ガレージのパラドックス

1.1　特殊相対論の基本原理

(1)　相対性原理（Galileo Galilei）：どんな実験も観測者の絶対速度を測ることはできない．ある観測者によって行われたどんな実験の結果も，その実験に関与しない別の観測との相対速度に依存しない．

(2)　光速の不変性（Einstein）：加速運動していない任意の観測者に対する光速は，その観測者と光源の相対速度に関係なく $c = 3\times10^8$ m/s という値をとる．

1.2　慣性観測者の定義

加速運動をしない観測者だけが，自分の時計を他の時計に同時化できる．
いくつかの事象を同時に見るとき，目はそれらが同時に起こったとみなす．
いくつかの事象が起こったとき，おのおのの一番近くにある時計がさす時刻が同じとき慣性観測者はそれらを同時とみなす．

1.3　新しい単位系

自然単位では，光速度を１（無次元）とするため，長さの単位と時間の単位の次元が同じになる．光速度は $c = 3\times10^8$ m/s なので，時間の単位を m にするため，$1\mathrm{s} = 3\times10^8\,\mathrm{m}$ と置換してしまう．

1.4　時空図

時空図をつくる規則

(1)　事象は草書の大文字 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}$ などで表す．ただし $\mathcal{O}$ は観測者を表す．

(2)　座標は (ct, x, y, z) と書く．任意の４数の組，たとえば $(5, -3, 2, 10^{16})$ はその座標値が $ct = 5,\ x = -3,\ y = 2,\ z = 10^{16}$ をもつ事象を表す．いつも時間 ct を一番最初に書き，すべての座標はメートルで測る．

(3)　(ct, x, y, z) をおのおのの成分を区別せず全体として用いることが便利なことも多い．そのときは (x^0, x^1, x^2, x^3) という別の書き方をする．上付の添字はべきではなく，単なるラベルである．したがって $(x^3)^2$ は第３の座標（z 座標）の２乗を表す．x の３乗の２乗ではない．一般に座標 x^0, x^1, x^2, x^3 を x^α と書く．ギリシャ文字の添字（α, β, μ, ν など）は $(0, 1, 2, 3)$ から値をとるものとする．α に特定の値が与えられていないとき，x^α は四つの座標のどれをも表す．

(4)　ct と (x, y, z) を区別したい場合もある．空間座標だけを表すためにはローマ文字を用いる．ローマ文字の添字（a, b, i, j, k, l など）は $(1, 2, 3)$ から値をとるとする．i に特定の値が与えられていないとき，x^i は三つの空間座標のどれをも表す．

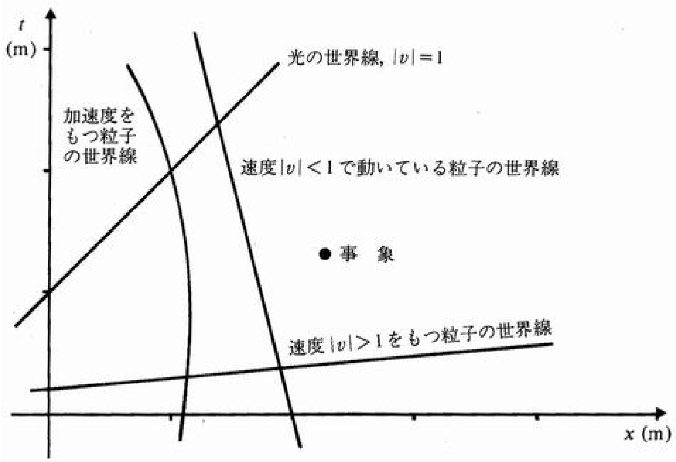


図 1.1　自然単位系での時空図

【ポイント】時空図の縦軸はＳＩ単位では常にctである．速度はＳＩ単位では常にv/cで表す．光の世界線は傾き４５°の直線である．

1.5　別の観測者による座標系

座標$c\bar{t}$, $\bar{x}$をもったある観測者$\overline{O}$が, 座標ct, xをもった別の観測者Oに対して, x方向に速度v/cで動いているとする．
$c\bar{t}$軸とct軸との傾き角，$\bar{x}$軸とx軸との傾き角は,

$$\phi = \tan^{-1}\frac{v}{c} = \tan^{-1}\beta \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

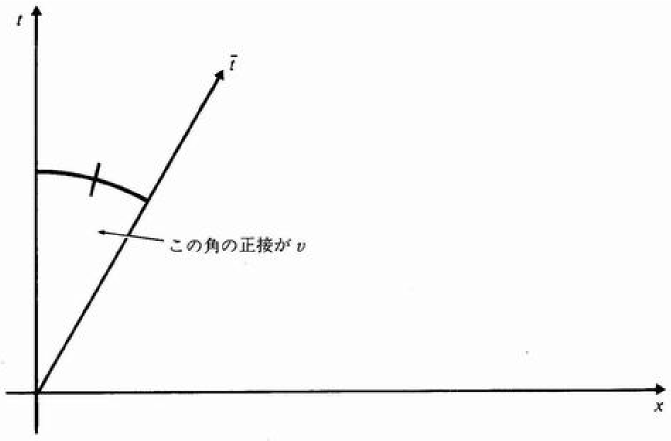


図 1.2　速度 v をもつ系の時間軸

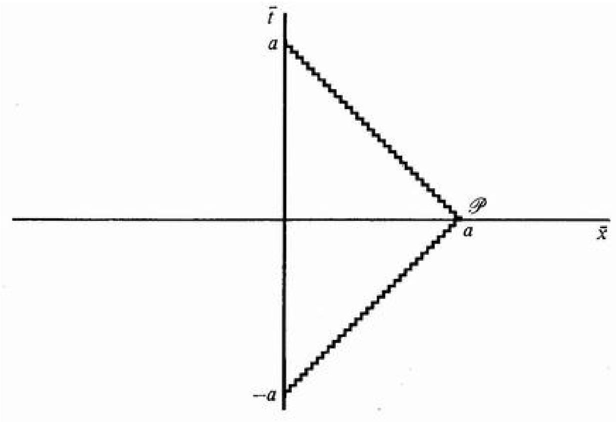


図 1.3　$\overline{\mathcal{O}}$から見た$\mathscr{P}$で反射された光

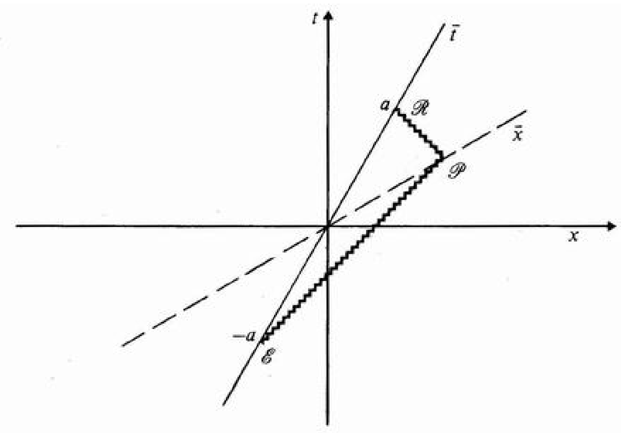


図 1.4　$\mathcal{O}$から見た図 1.3 の状況

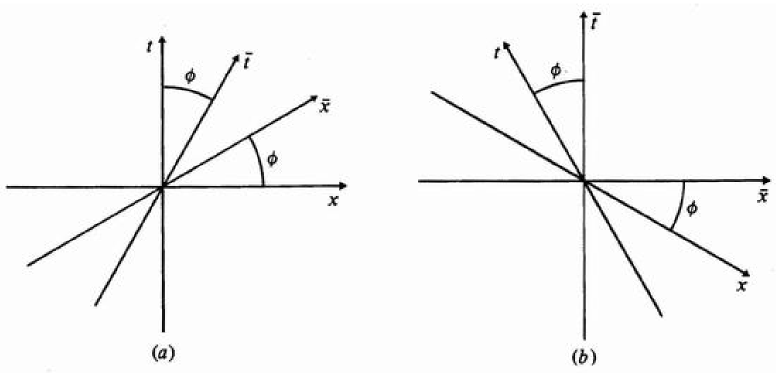


図 1.5　$\mathcal{O}$（左）と $\overline{\mathcal{O}}$（右）から見た時空図

1.6　間隔の不変性

事象間の間隔の定義

◆　$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$　(1.1)

【注意】Δs^2 は全体として１つの記号であり $(\Delta s)^2$ ではない．

$\Delta \bar{s}^2 = -c^2(\Delta \bar{t})^2 + (\Delta \bar{x})^2 + (\Delta \bar{y})^2 + (\Delta \bar{z})^2$　(1.1')

【ポイント】自然単位の式をＳＩ単位の式に変換するときは ct や $c\bar{t}$ を１つの記号とみなして公式を書いてもかまわない．

$\Delta \bar{s}^2 = M_{\alpha\beta}(\Delta x^{\alpha})(\Delta x^{\beta})$　(1.2)

$\Delta \bar{s}^2 = M_{00}(\Delta r)^2 + 2(M_{0i}\Delta x^i)\Delta r + M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j$　(1.3)

$M_{0i} = 0 \quad (i = 1,2,3)$　(1.4a)

$M_{ij} = -M_{00}\delta_{ij} \quad (i, j = 1,2,3)$　(1.4b)

$$\delta_{ij} = 1 \quad (i = j)$$
$$= 0 \quad (i \neq j)$$
(1.4c)

【ポイント】$M_{\alpha\beta}$ は結果としてミンコフスキー・メトリックとなる．

任意の二つの事象の間隔は，どの慣性観測者が計算しても一致する．

◆　$\Delta \bar{s}^2 = \Delta s^2$　(1.7)

二つの系の相対速度に直交する棒の長さは，どちらの系で測っても同じである．

ある系で同時な二つの事象は，それらを結ぶ線に直交する方向に動いているすべての系でも同時である．

$\Delta s^2 > 0$ ；空間的に離れている

$\Delta s^2 < 0$ ；時間的に離れている

$\Delta s^2 = 0$ ；ヌル的に離れている

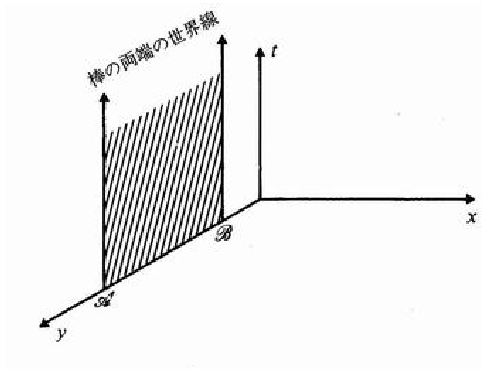


図 1.6　$\mathcal{O}$ で y 軸に沿って静止している棒

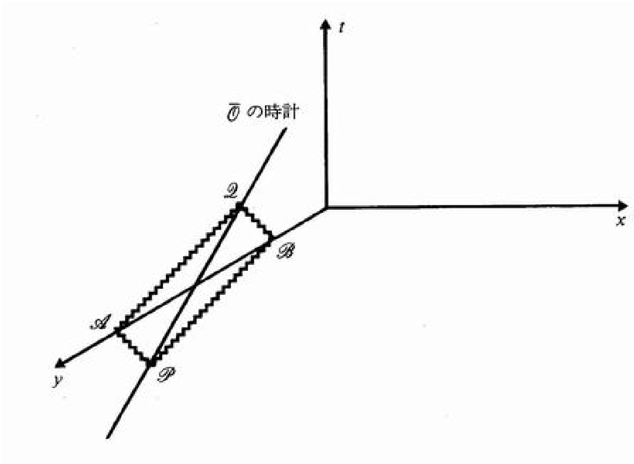


図 1.7　系 $\mathcal{O}$ に対して x 方向に動いている系 $\bar{\mathcal{O}}$ の時計

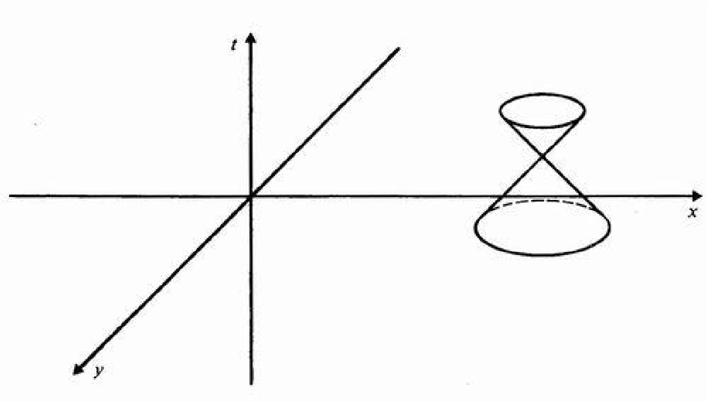


図 1.8　ある事象の光円錐．次元 z は描かれていない．

絶対未来；未来／前方光円錐の中の事象のこと

絶対過去；過去／後方光円錐の中の事象のこと

絶対的な非因果的領域；光円錐の外側

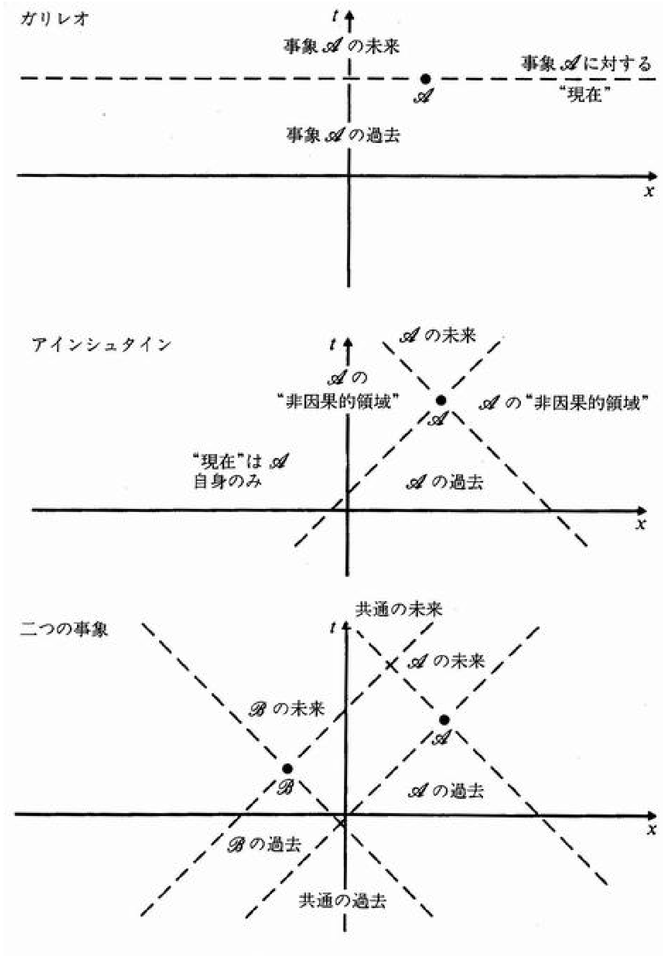


図 1.9　古い時空概念と新しい時空概念

1.7　不変双曲線

$\Delta s^2 = -(ct)^2 + (x)^2 = a^2$　　；空間的な間隔（spacelike）

$\Delta s^2 = -(ct)^2 + (x)^2 = b^2$　　；時間的な間隔（timelike）

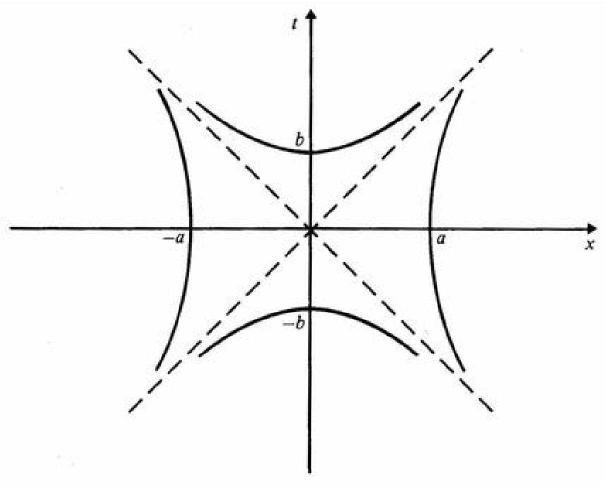


図 1.10　$a > b$ のときの不変双曲線

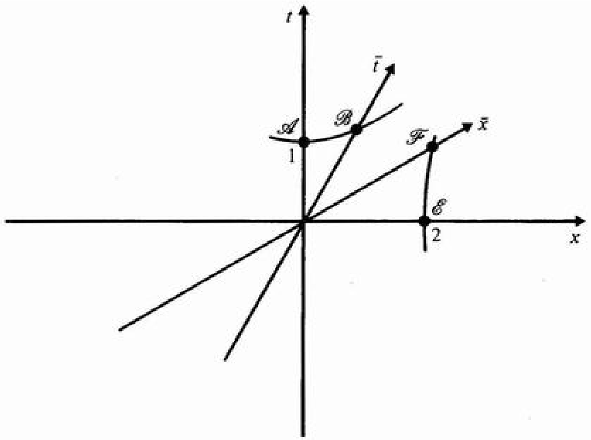


図 1.11　事象 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{E}$ を通る双曲線を用いた $\bar{x}$ 軸と $\bar{t}$ 軸の目盛づけ

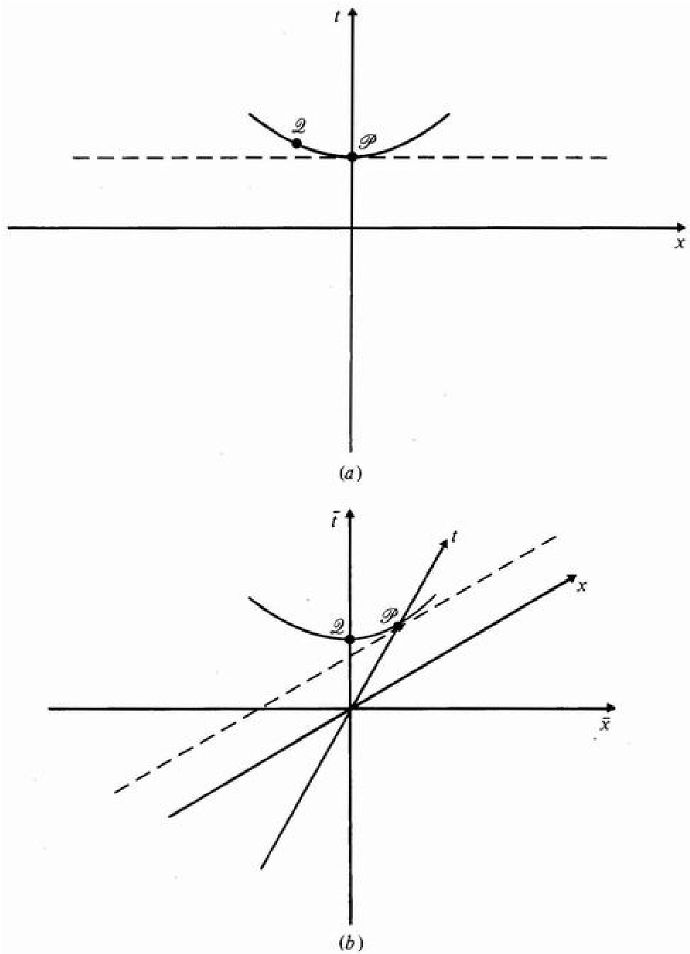


図 1.12　(a) $\mathcal{O}$ の同時の線は，$\mathcal{P}$ での双曲線の接線である．(b) $\bar{\mathcal{O}}$ から見た同じ接線

1.8　重要な結果

時間の遅れ（time dilation）

◆ $$(\Delta t)_{inO} = \gamma(\Delta \bar{t})_{in\bar{O}} \qquad (1.8)$$

◆ $$\Delta t = \frac{\Delta \bar{t}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \Delta \bar{t} \qquad (1.8)$$

where $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$,　$\beta = \dfrac{v}{c} < 1$

固有時間（proper time）（座標 $\overline{O}$ で静止している時計の）

$$\Delta s^2 = \Delta \bar{s}^2 = -c^2 \Delta \bar{t}^2 = -c^2 \Delta \tau^2 \qquad (1.9)$$

【ポイント】座標 $\overline{O}$ の固有時間は座標時間と同じ.

$$c\Delta\tau = \left[c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma}\Delta t \qquad (1.10)$$

【ポイント】（1.10）は（1.8）と実質的に同じ.

ローレンツ収縮（Lorentz contraction, length contraction）

◆ $$\Delta x = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta \bar{x} = \frac{1}{\gamma}\Delta \bar{x} \qquad (1.11)$$

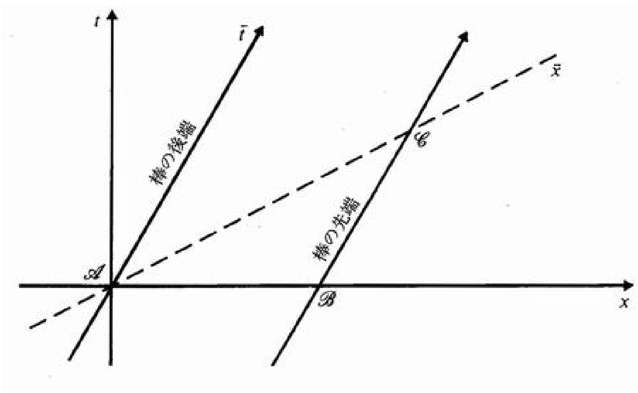


図1.13　$\mathscr{A}\mathscr{C}$の固有長さはその静止系での棒の長さであり，$\mathscr{A}\mathscr{B}$の固有長さは，$\overline{O}$でのその長さである.

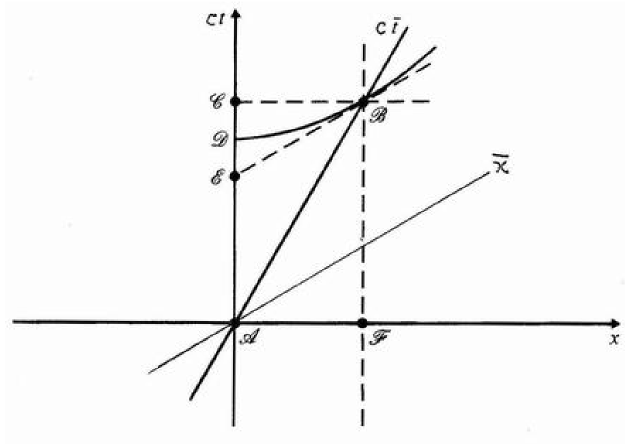


図1.14　$\mathscr{A}\mathscr{B}$の固有長さは，$\overline{O}$で静止している時計によって測られた時間であり一方$\mathscr{A}\mathscr{C}$の固有長さはOによって測られた時間である

1.9　ローレンツ変換

系 O の x 軸正方向に速度 v で系 $\overline{O}$ は等速運動しているときのローレンツ・ブーストのローレンツ変換式は,

◆ $$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1.12)$$

where $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$　$\beta = \dfrac{v}{c} < 1$

1.10　速度の合成則

◆ $$w' = \frac{w+v}{1+wv} \qquad (1.13)$$

節の中で使われている公式と問題

1.1　特殊相対論の基本原理

1.2　慣性観測者の定義

1.3　新しい単位系

問題 1，2

1.4　時空図

問題 3，4

1.5　別の観測者による座標系

1.6　間隔の不変性　（1.1）～（1.7）

問題 5，6，7，8，9，10

1.7　不変双曲線

問題 11，21

1.8　重要な結果　（1.8）～（1.11）

問題 12，13

1.9　ローレンツ変換　（1.12）

問題 16，19，20

1.10　速度の合成則　（1.13）

問題 14，15，18

1.11　パラドックスと物理的直観

問題 17

()

1　ＳＩ単位の量を自然単位（$c=1$）に変換し，すべてをｍと kg で表せ.

(a)　解答例：10J．ＳＩ単位系では$10\mathrm{J}=10\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$．$c=1$だから $1\mathrm{s}=3\times10^8\mathrm{m}$，したがって$1\mathrm{s}^{-2}=(9\times10^{16})^{-1}\mathrm{m}^{-2}$．これから $10\mathrm{J}=10\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2(9\times10^{16})^{-1}\mathrm{m}^{-2}=1.1\times10^{-16}\mathrm{kg}$．あるいは$c$を変換因子として次のように用いる.

$$1=3\times10^8\mathrm{ms}^{-1},$$

$$1=(3\times10^8)^{-1}\mathrm{m}^{-1}\mathrm{s},$$

$$\begin{aligned}10\mathrm{J}&=10\mathrm{kgm}^2\mathrm{s}^{-2}=10\mathrm{kgm}^2\mathrm{s}^{-2}\times(1)^2\\&=10\mathrm{kgm}^2\mathrm{s}^{-2}\times(3\times10^8)^{-2}\mathrm{s}^2\mathrm{m}^{-2}\\&=1.1\times10^{-16}\mathrm{kg}\end{aligned}$$

式から秒を消すために，cの何乗を掛けても，それで割ってもかまわない.

(b)　100W のパワー

(c)　プランク定数$\hbar=1.05\times10^{-34}\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$

(d)　車の速度　$v=30\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

(e)　車の運動量　$3\times10^4\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

(f)　１気圧$=10^5\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$

(g)　水の密度　$10^3\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$

(h)　光度　$10^6\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{cm}^{-2}$

【ポイント】シュッツ著では自然単位を使っているが，本書ではＳＩ単位を使う．ＳＩ単位は次元が解析できるので物理の本質を理解しやすい．自然単位は公式が簡単になるメリットがあるが，次元が混乱するデメリットがある.
＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋
【ポイント】自然単位では，光速度を１（無次元）とするため，長さの単位と時間の単位の次元が同じになる．光速度は$c=3\times10^8\mathrm{m/s}$なので，時間の単

位を m にするため，$1\mathrm{s}=3\times10^{8}\mathrm{m}$ と置換してしまう．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　$100\mathrm{W}=100\mathrm{Js}^{-1}=100\mathrm{kgm}^{2}\mathrm{s}^{-3}=100\mathrm{kgm}^{2}(3\times10^{8}\mathrm{m})^{-3}$

$=3.7\times10^{-24}\mathrm{kgm}^{-1}$

(c)　$1.05\times10^{-34}\mathrm{Js}=1.05\times10^{-34}\mathrm{kgm}^{2}\mathrm{s}^{-1}$

$=1.05\times10^{-34}\mathrm{kgm}^{2}(3\times10^{8}\mathrm{m})^{-1}$

$=3.5\times10^{-43}\mathrm{kgm}$

(d)　$30\mathrm{ms}^{-1}=30\mathrm{m}(3\times10^{8}\mathrm{m})^{-1}=10^{-7}$

(e)　$3\times10^{4}\mathrm{kgms}^{-1}=3\times10^{4}\mathrm{kgm}(3\times10^{8}\mathrm{m})^{-1}=10^{-4}\mathrm{kg}$

(f)　$10^{5}\mathrm{Nm}^{-2}=10^{5}\mathrm{kgms}^{-2}\mathrm{m}^{-2}=10^{5}\mathrm{kgm}^{-1}(3\times10^{8}\mathrm{m})^{-2}$

$=1.1\times10^{-12}\mathrm{kgm}^{-3}$

(g)　$10^{3}\mathrm{kgm}^{-3}$（変換なし）

(h)　$10^{6}\mathrm{Js}^{-1}\mathrm{cm}^{-2}=10^{6}\mathrm{kgm}^{2}\mathrm{s}^{-3}(10^{-2}\mathrm{m})^{-2}$

$=10^{6}\mathrm{kgm}^{2}(3\times10^{8}\mathrm{m})^{-3}10^{4}\mathrm{m}^{-2}$

$=3.7\times10^{-16}\mathrm{kgm}^{-3}$

()

2　次の量を自然単位（$c=1$）からＳＩ単位に変えよ．

(a)　$v=10^{-2}$

(b)　圧力　$10^{19}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$

(c)　時間　$ct=10^{18}\mathrm{m}$

(d)　エネルギー密度　$u=1\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$

(e)　加速度　$10\mathrm{m}^{-1}$

【ポイント】ＳＩ単位の次元をもとに変換する．ＳＩ単位の次元の中に s^{-n} があれば，$(3\times10^{8}\mathrm{ms}^{-1})^{n}$ を掛ければよい．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(a)　$v[\mathrm{ms}^{-1}]=10^{-2}\times(3\times10^{8}\mathrm{ms}^{-1})=3\times10^{6}\mathrm{ms}^{-1}$

(b)　$P[\mathrm{Nm}^{-2}=\mathrm{kgm}^{-1}\mathrm{s}^{-2}]=10^{19}\mathrm{kgm}^{-3}\times(3\times10^{8}\mathrm{ms}^{-1})^{2}$

$=9\times10^{35}\mathrm{Nm}^{-2}$

(c)　$t[\mathrm{s}]=10^{18}\mathrm{m}\times(3\times10^{8}\mathrm{ms}^{-1})^{-1}=3.3\times10^{9}\mathrm{s}$

(d)　$u[\mathrm{Jm}^{-3}=\mathrm{kgm}^{-1}\mathrm{s}^{-2}]=1\mathrm{kgm}^{-3}\times(3\times10^{8}\mathrm{ms}^{-1})^{2}$

$=9\times10^{16}\mathrm{Jm}^{-3}$

(e)　$\alpha[\mathrm{ms}^{-2}]=10\mathrm{m}^{-1}\times(3\times10^{8}\mathrm{ms}^{-1})^{2}=9\times10^{17}\mathrm{ms}^{-2}$

()

3　観測者Oの時空のx軸とct軸を描いて，次に以下のものをその時空図上に描け．

(a)　$x=1\text{m}$でのOの時計の世界線．

(b)　$ct=0$のとき，$x=0.5\text{m}$で速度$v=0.1c$で運動している粒子の世界線．

(c)　Oに対して正のx軸方向に速度$v=0.5c$で動いている観測者$\overline{O}$の$c\bar{t}$軸と$\bar{x}$軸，ただし，その原点$(c\bar{t}=\bar{x}=0)$はOと一致するとする．

(d)　原点からの間隔Δs^2が-1m^2の事象の軌跡．

(e)　原点からの間隔Δs^2が$+1\text{m}^2$の事象の軌跡．

(f)　$\bar{x}$軸と$c\bar{t}$軸に沿って1m間隔の目盛り．

(g)　原点からの間隔が 0 の事象の軌跡．

(h)　時刻$ct=2\text{m}$（Oから見て同時）に起こったすべての事象の軌跡．

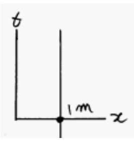
(i)　時刻$c\bar{t}=2\text{m}$（$\overline{O}$から見て同時）に起こったすべての事象の軌跡．

(j)　$c\bar{t}=0$，$\bar{x}=0.5\text{m}$で起こった事象．

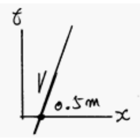
(k)　$\bar{x}=1\text{m}$の事象の軌跡．

(l)　$ct=-1$，$x=0\text{m}$で負のx方向に放出され，$\bar{x}=-1\text{m}$に置かれた鏡で跳ね返り，$x=0.75\text{m}$に置かれた検出装置に吸収された光子の世界線．

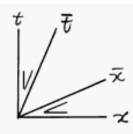
(a)



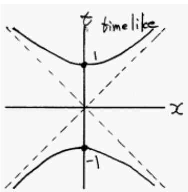
(b)



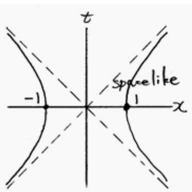
(c)



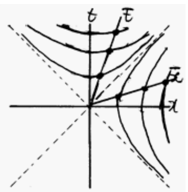
(d)



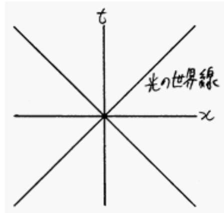
(e)



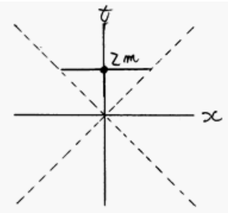
(f)



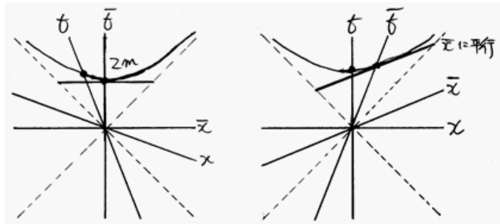
(g)



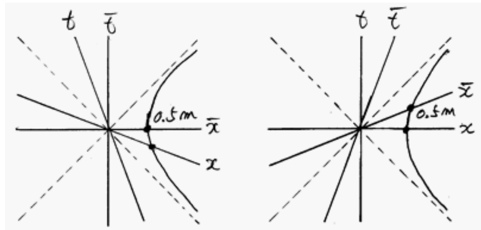
(h)



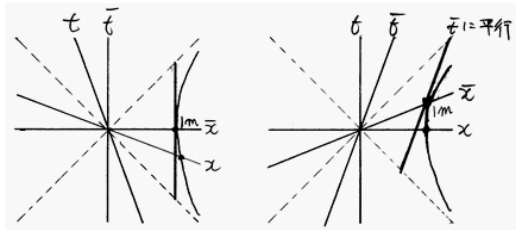
(i)



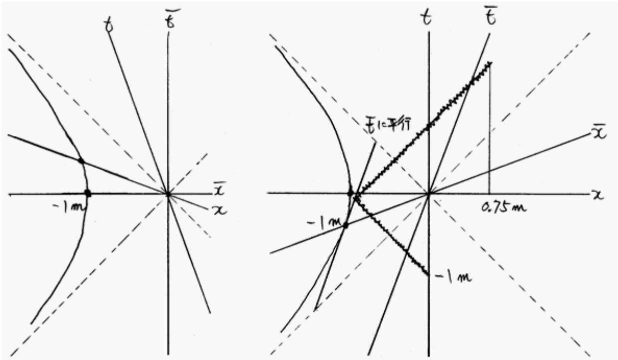
(j)



(k)



(l)



()

4　次の和の各項を書き下し，(x^0, x^1, x^2, x^3) に対して (ct, x, y, z) を代入せよ．

(a)　$\sum_{\alpha=0}^{3} V_\alpha \Delta x^\alpha$，ここで $\{V_\alpha, \alpha = 0, \cdots, 3\}$ は 4 個の任意の数の集り．

(b)　$\sum_{i=1}^{3} (\Delta x^i)^2$

(a)　$\sum_{\alpha=0}^{3} V_\alpha \Delta x^\alpha$

$$= V_0 \Delta x^0 + V_1 \Delta x^1 + V_2 \Delta x^2 + V_3 \Delta x^3$$

$$= V_0 c\Delta t + V_1 \Delta x + V_2 \Delta y + V_3 \Delta z$$

(b)　$\sum_{i=1}^{3} (\Delta x^i)^2$

$$= (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$$

$$= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

()

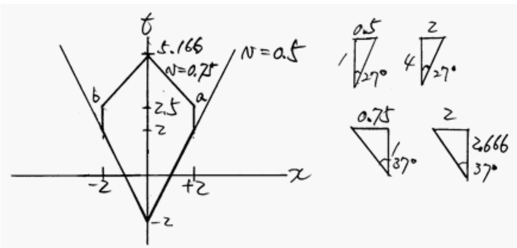
5　(a)　観測者 O の時空図を用いて O によってなされた次の実験を記述せよ．速度 $v = 0.5c$ をもった二つの粒子が $ct = -2$ で $x = 0$ から一つは正の x 方向に，他方は負の x 方向に発射された．それらは $x = \pm 2\mathrm{m}$ に置かれた検出装置にぶつかった．時間の $ct = 0.5\mathrm{m}$ 後に検出装置は $v = 0.75c$ で $x = 0$ に信号を送り返した．

(b)　信号は同時に $x = 0$ に戻ってきた．（描いた時空図でこのことが成り立っているかを確かめておくこと．）二つの検出装置が $x = 0$ から同じ距離にあることはわかっているから，このことから実験者はそれらの検出装置が実際に信号を同時に送ったことを結論する．この結論がなぜ正しいかを説明せよ．

(c)　第２の観測者 $\overline{O}$ が，O に対して負の x 方向に速度 $v = 0.75c$ で動いている．$\overline{O}$ の時空図を描き，その中に O によってなされた実験を書け．$\overline{O}$ は検出装置が同時に信号を送ったと結論するだろうか？　もしそうでないなら，どちらの信号が先に送られたか？

(d)　O と $\overline{O}$ の両方の座標を使って，検出装置が信号を発射した事象間の間隔 Δs^2 を計算せよ．

(a)　$\tan^{-1} 0.5 = 27$　,　$\tan^{-1} 0.75 = 37$



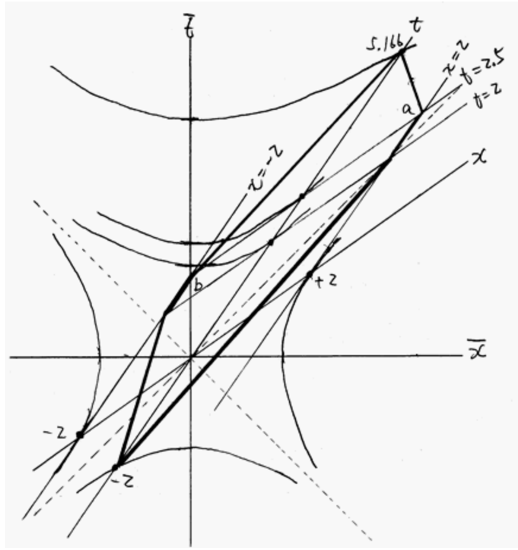
＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　検出装置から信号が送り返された事象 a，b を結ぶ線が x 軸に平行だから同時の事象．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　負側の検出装置から信号が送り返された事象 b が，正側の検出装置か

ら信号が送り返された事象 a より早い時刻に起きている．



＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　事象の座標は，

$$a \xrightarrow[O]{} (2.5, 2, 0, 0),\quad b \xrightarrow[O]{} (2.5, -2, 0, 0),\quad ab \xrightarrow[O]{} (0, 4, 0, 0)$$

ローレンツ変換式を使って，系 $\overline{O}$ へ変換する．

$$c\bar{t}_a = \frac{1}{\sqrt{1-0.75^2}}(2.5 + 0.75 \times 2) = 6.05$$

$$c\bar{t}_b = \frac{1}{\sqrt{1-0.75^2}}(2.5 - 0.75 \times 2) = 1.51$$

$$\bar{x}_a = \frac{1}{\sqrt{1-0.75^2}}(0.75 \times 2.5 + 2) = 5.86$$

$$\bar{x}_b = \frac{1}{\sqrt{1-0.75^2}}(0.75 \times 2.5 - 2) = -0.19$$

$$c\bar{t}_{ab} = 6.05 - 1.51 = 4.54$$

$$\bar{x}_{ab} = 5.86 + 0.19 = 6.05$$

系 $\overline{O}$ での事象の座標は，

$a \xrightarrow[\bar{O}]{} (6.05, 5.86, 0, 0)$， $b \xrightarrow[\bar{O}]{} (1.51, -0.19, 0, 0)$，

$ab \xrightarrow[\bar{O}]{} (4.54, 6.05, 0, 0)$

$(ab)^2 = 4^2 = 16$， $(\bar{a}\bar{b})^2 = -4.54^2 + 6.05^2 = 16$

（1. 2）

6　式（1.2）が $\alpha \neq \beta$ のとき，$M_{\alpha\beta}$ と $M_{\beta\alpha}$ を別々にではなく，$M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}$ の形でのみ含むことを示せ．このことから一般性を失うことなく $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$ とおけることを示せ．

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \qquad (1.2)$$

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{s}^2 &= M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \\
&= M_{00}\Delta x^0\Delta x^0 + M_{01}\Delta x^0\Delta x^1 + M_{02}\Delta x^0\Delta x^2 + M_{03}\Delta x^0\Delta x^3 \\
&\quad + M_{10}\Delta x^1\Delta x^0 + M_{11}\Delta x^1\Delta x^1 + M_{12}\Delta x^1\Delta x^2 + M_{13}\Delta x^1\Delta x^3 \\
&\quad + M_{20}\Delta x^2\Delta x^0 + M_{21}\Delta x^2\Delta x^1 + M_{22}\Delta x^2\Delta x^2 + M_{23}\Delta x^2\Delta x^3 \\
&\quad + M_{30}\Delta x^3\Delta x^0 + M_{31}\Delta x^3\Delta x^1 + M_{32}\Delta x^3\Delta x^2 + M_{33}\Delta x^3\Delta x^3 \\
&= M_{00}\Delta x^0\Delta x^0 + M_{11}\Delta x^1\Delta x^1 + M_{22}\Delta x^2\Delta x^2 + M_{33}\Delta x^3\Delta x^3 \\
&\quad + (M_{01} + M_{10})\Delta x^0\Delta x^1 + (M_{02} + M_{20})\Delta x^0\Delta x^2 \\
&\quad + (M_{12} + M_{21})\Delta x^1\Delta x^2 + (M_{03} + M_{30})\Delta x^0\Delta x^3 \\
&\quad + (M_{13} + M_{31})\Delta x^1\Delta x^3 + (M_{23} + M_{32})\Delta x^2\Delta x^3
\end{aligned}$$

（1. 2）

7　式（1.2）を導いた議論で，$\bar{O}$ の座標が次のような O の座標の線形結合で与えられていると仮定する．

$$c\bar{t} = \alpha ct + \beta x,\quad \bar{x} = \mu ct + \nu x,\quad \bar{y} = ay,\quad \bar{z} = bz$$

ここで，α，β，μ，ν，a，b は $\bar{O}$ の O に対する速度 $\boldsymbol{v}$ の関数ではありうるが，座標に依存しない．式（1.2）の数 $\{M_{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 0,\cdots,3\}$ を α，β，μ，ν，a，b で表せ．

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \qquad (1.\ 2)$$

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \qquad (1.\ 2)$$

$$= -(c\Delta\bar{t})^2 + (\Delta\bar{x})^2 + (\Delta\bar{y})^2 + (\Delta\bar{z})^2$$

$$= -(\alpha ct + \beta x)^2 + (\mu ct + \nu x)^2 + (ay)^2 + (bz)^2$$

$$= -\alpha^2(ct)^2 - 2\alpha\beta ctx - \beta^2 x^2 + \mu^2(ct)^2 + 2\mu\nu ctx + \nu^2 x^2 + a^2 y^2 + b^2 z^2$$

$$= (-\alpha^2 + \mu^2)(ct)^2 + (-2\alpha\beta + 2\mu\nu)ctx + (-\beta^2 + \nu^2)x^2 + a^2 y^2 + b^2 z$$

$$M_{00} = \mu^2 - \alpha^2,\quad M_{11} = \nu^2 - \beta^2,\quad M_{22} = a^2,\quad M_{33} = b^2,$$

$$M_{01} = \mu\nu - \alpha\beta,\quad M_{02} = M_{03} = M_{12} = M_{13} = M_{23} = 0$$

（1.2）～（1.4）

8　(a)　一般の $\{M_{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 0,\cdots,3\}$ に対して，式（1.2）から式（1.3）を導け．

(b)　式 (1.3) の任意の $\{\Delta x^i\}$ に対して $\Delta\bar{s}^2 = 0$ だから，式 (1.3) で Δx^i を $-\Delta x^i$ に変え，その結果の式をもとの式から引いて，$i = 1,2,3$ に対して，$M_{0i} = 0$ を示せ．

(c)　$\Delta\bar{s}^2 = 0$ とした式 (1.3) を用いて式 (1.4a) を示せ．（ヒント：$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ が任意であることを使え．）

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \qquad (1.2)$$

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{00}(\Delta r)^2 + 2(M_{0i}\Delta x^i)\Delta r + M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j \qquad (1.3)$$

$$M_{ij} = -M_{00}\delta_{ij} \quad (i, j = 1,2,3),\quad \delta_{ij} = 1\ (i = j),\ 0\ (i \neq j) \qquad (1.4b)$$

(a)　$M_{\alpha\beta}$ を分類する．

$$M_{00}, M_{01,02,03}, M_{10,20,30}, M_{11,12,13}, M_{21,22,23}, M_{31,32,33}$$

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \qquad (1.2)$$

$$= M_{00}(\Delta x^0)^2 + M_{0i}(\Delta x^0)(\Delta x^i) + M_{i0}(\Delta x^i)(\Delta x^0) + M_{ij}(\Delta x^i)(\Delta x^j)$$

（$\Delta x^0 = \Delta t = \Delta r$ を代入）

$$= M_{00}(\Delta r)^2 + 2(M_{0i}\Delta x^i)\Delta r + M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j \qquad (1.3)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　式（1.3）で $\Delta x^i \to -\Delta x^i$ とする．

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{00}(\Delta r)^2 - 2(M_{0i}\Delta x^i)\Delta r + M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j \qquad (1.3')$$

式（1.3）－式（1.3’）$= 4(M_{0i}\Delta x^i)\Delta r = 0$

$$M_{0i} = 0 \quad (i = 1,2,3) \qquad (1.4a)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　$\Delta\bar{s}^2 = M_{00}(\Delta r)^2 + M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j = 0 \qquad (1.3)$

$\Delta x = 1, \Delta y = 0, \Delta z = 0$ として $M_{00} + M_{11} = 0 \quad \therefore M_{11} = -M_{00}$

$\Delta x = 0, \Delta y = 1, \Delta z = 0$ として $M_{00} + M_{22} = 0 \quad \therefore M_{22} = -M_{00}$

$\Delta x = 0, \Delta y = 0, \Delta z = 1$ として $M_{00} + M_{33} = 0 \quad \therefore M_{33} = -M_{00}$

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{00}(\Delta r)^2 - M_{00}(\Delta x)^2 - M_{00}(\Delta y)^2 - M_{00}(\Delta z)^2$$
$$+ M_{12}(\Delta x)(\Delta y) + M_{13}(\Delta x)(\Delta z) + M_{23}(\Delta y)(\Delta z) = 0$$

$M_{12} = M_{13} = M_{23} = 0$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(a),（b),（c)をまとめて

$M_{0i} = 0 \quad (i = 1,2,3)$

$M_{ij} = -M_{00}\delta_{ij} \quad (i, j = 1,2,3)$,　$\delta_{ij} = 1\ (i = j), 0\ (i \neq j)$

$$\Delta\bar{s}^2 = -M_{00}[-(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] = -M_{00}\Delta s^2$$

()

9　図 1.7 で線 PQ を本文中のように描いた理由を説明せよ.

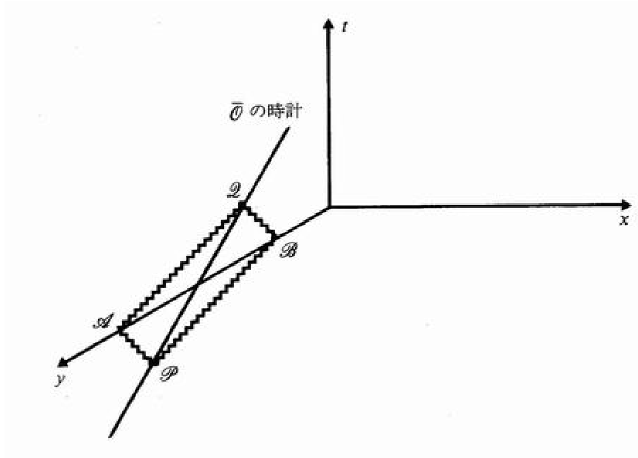


図 1.7　系 $\mathscr{O}$ に対して x 方向に動いている系 $\bar{\mathscr{O}}$ の時計

ミンコフスキー時空図上では光の世界線は傾き 45 度の直線となる.

()

10　ある系での座標(ct, x, y, z)が以下で与えられている一組の事象について それらの間隔を時間的，空間的あるいはヌル的に分類せよ．

(a)　$(0, 0, 0, 0)$ と $(-1, 1, 0, 0)$

(b)　$(1, 1, -1, 0)$ と $(-1, 1, 0, 2)$

(c)　$(6, 0, 1, 0)$ と $(5, 0, 1, 0)$

(d)　$(-1, 1, -1, 1)$ と $(4, 1, -1, 6)$

(a)　差$(1, -1, 0, 0)$　$\Delta s^2 = -1^2 + (-1)^2 = 0$　ヌル的

(b)　差$(2, 0, -1, -2)$　$\Delta s^2 = -2^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 1$　空間的

(c)　差$(1, 0, 0, 0)$　$\Delta s^2 = -1^2 = -1$　時間的

(d)　差$(-5, 0, 0, -5)$　$\Delta s^2 = (-5)^2 + (-5)^2 = 0$　ヌル的

2015.06.09
1　特殊相対論　1.14　練習問題

()

11　双曲線$-(ct)^2 + x^2 = a^2$と$-(ct)^2 + x^2 = -b^2$がaとbのいかんにかかわらず，直線$ct = \pm x$に漸近的に近づくことを示せ．

【ポイント】

$$-(ct)^2 + x^2 = a^2$$

上式はx軸上の$\pm a$を通る空間的な双曲線である．

$$-(ct)^2 + x^2 = -b^2$$

上式はct軸上の$\pm b$を通る時間的な双曲線である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

両辺をx^2で除して$x \to \infty$とする．

$$-\frac{(ct)^2}{x^2} + 1 = \frac{a^2}{x^2} = 0 \qquad \frac{(ct)^2}{x^2} = 1 \qquad ct = \pm x$$

$$-\frac{(ct)^2}{x^2} + 1 = -\frac{b^2}{x^2} = 0 \qquad \frac{(ct)^2}{x^2} = 1 \qquad ct = \pm x$$

()

12　(a)　図 1.14 の双曲線 DB の接線は$\overline{O}$にとっての同時の線であるという事実を使って，時間間隔 AE は$\overline{O}$が A から B まで動くときその時計が記録する時間より短いことを示せ.

(b)　次の式を示せ：

$$(\Delta s^2)_{AE} = (1-(v/c)^2)(\Delta s^2)_{AB}$$

(c)　(b)を使って，$\overline{O}$から見るとOの時計がちょうど正しい割合でゆっくり進むことを示せ.

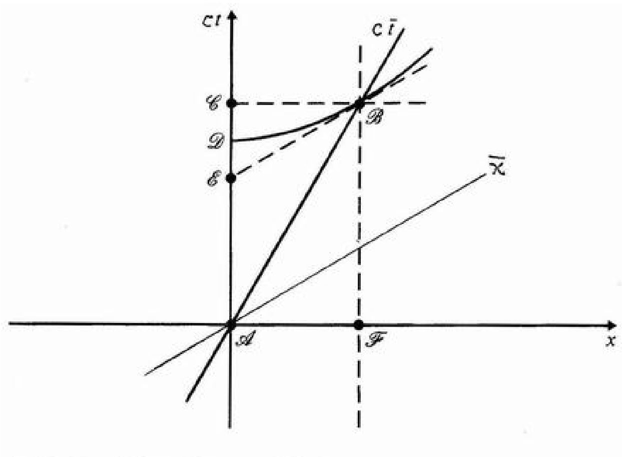


図 1.14　$\mathscr{A}\mathscr{B}$の固有長さは，$\overline{O}$で静止している時計によって測られた時間であり一方$\mathscr{A}\mathscr{C}$の固有長さはOによって測られた時間である

【ポイント】$\bar{x}$軸とそれに平行な線は，系$\overline{O}$の同時の線である．双曲線 DB の接線で$\bar{x}$軸に平行な線 EB も系$\overline{O}$の同時の線の一つである.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(a)

$$(\Delta s^2)_{AE} < (\Delta s^2)_{AD} = (\Delta s^2)_{AB}$$

$\Delta x = 0$，$\Delta\bar{x} = 0$ だから，

$$t_{AE} < t_{AD} = \bar{t}_{AB}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　Oの座標系で$AC = ct$とすると，$\beta = v/c$として，

$\bar{t}$軸の傾きはβ，$\bar{x}$軸と EB の傾きは$\dfrac{1}{\beta}$であるから，

$$CB = c\beta t,\quad EC = c\beta^2 t,\quad AE = c(1-\beta^2)t$$

$$C \xrightarrow[O]{} (ct, 0, 0, 0),\quad B \xrightarrow[O]{} (ct, c\beta t, 0, 0),\quad E \xrightarrow[O]{} (c(1-\beta^2)t, 0, 0, 0)$$

$$(\Delta s^2)_{AE} = -c^2(1-\beta^2)^2 t^2$$

$$(\Delta s^2)_{AB} = -c^2t^2 + c^2\beta^2t^2 = -c^2(1-\beta^2)t^2$$

$$(\Delta s^2)_{AE} / (\Delta s^2)_{AB} = 1-\beta^2 < 1$$

与式が証明できた.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　$\overline{O}$の座標系では$\bar{x}$軸に平行な EB は同時である.

$$E \xrightarrow[O]{} (ct_{AE}, 0, 0, 0),\quad E \xrightarrow[\overline{O}]{} (c\bar{t}_{AB}, 0, 0, 0)$$

$$(\Delta s^2)_{AE} = (ct_{AE})^2,\quad (\Delta s^2)_{AB} = (\Delta\bar{s}^2)_{AB} = (c\bar{t}_{AB})^2$$

問題(b)の結果を使って，

$$\frac{(\Delta s^2)_{AE}}{(\Delta s^2)_{AB}} = \frac{(ct_{AE})^2}{(c\bar{t}_{AB})^2} = \frac{(t_{AE})^2}{(\bar{t}_{AB})^2} = 1-\beta^2$$

$$t_{AE} = \sqrt{1-\beta^2} \times \bar{t}_{AB} = \frac{1}{\gamma}\bar{t}_{AB}$$

O系で事象 E はct_{AE}で起こり$\overline{O}$系で事象 B は$c\bar{t}_{AB}$で起こり，2 つの事象は$\overline{O}$系で同時であるので，$\overline{O}$系から見るとO系の時計が遅れて見える.

【ポイント】上式では，観測系が－（バー）ありであることに注意のこと.

練習問題 13 の時間の遅れの式（1.8）では，観測系が－（バー）なしであり，系が逆になっている.

（）

13　パイ中間子（あるいはパイオン）とよばれる素粒子の半減期は，その崩壊の観測者にパイオンが静止しているとき，$2.5\times10^{-8}s$ である．相対性原理よりパイオンが $v=0.999c$ で運動しているとき，静止している観測者から見た半減期は $5.6\times10^{-7}s$ となることを示せ．

【ポイント】式（1.8）は，粒子の静止系 $\overline{O}$ の固有時間 $(\Delta\bar{t})_{in\overline{O}}$ を観測系 O の時計で計測すると $(\Delta t)_{inO}$ となり必ず固有時間より大きいことを示す．練習問題 12 と比べて観測系と静止系が逆になっていることに注意．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

時間の遅れの式（1.8）を使って，

◆ $$(\Delta t)_{inO}=\gamma(\Delta\bar{t})_{in\overline{O}}\text{, where}\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}>1,\ \beta=\frac{v}{c}<1 \qquad (1.8)$$

$$=\frac{2.5\times10^{-8}}{\sqrt{1-0.999^2}}=5.6\times10^{-7}s$$

（1.8）（1.11）（1.13）

14　O に対する $\overline{O}$ の速度 v が小さいとする（$|v|<<1$）．そのとき時間の遅れ，ローレンツ収縮，速度の合成則が，それぞれ以下の式で近似できることを示せ．（ここでの v と w は c との比として無次元とする．）

(a)　$\Delta t\approx(1+\frac{1}{2}v^2)\Delta\bar{t}$

(b)　$\Delta x\approx(1-\frac{1}{2}v^2)\Delta\bar{x}$

(c)　$w'\approx w+v-wv(w+v)$　（$|w|<<1$ も成り立つとする）

(d)　$|v|=w=0.1c$ のとき，これらの近似の相対誤差はいくらか？

(a)　時間の遅れの式（1.8）を使って，

◆ $$\Delta t=\frac{\Delta\bar{t}}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (1.8)$$

$$=(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}\Delta\bar{t}\approx(1+\frac{1}{2}v^2)\Delta\bar{t}$$

where　$(1+v)^{\alpha}\approx(1+\alpha v)$　when　$v<<1$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　ローレンツ収縮の式（1.11）を使って，

◆ $$\Delta x=\sqrt{1-v^2}\Delta\bar{x} \qquad (1.11)$$

$$=(1-v^2)^{\frac{1}{2}}\Delta\bar{x}\approx(1-\frac{1}{2}v^2)\Delta\bar{x}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　速度の合成則の式（1.13）を使って，

◆ $$w'=\frac{w+v}{1+wv} \qquad (1.13)$$

$$=(w+v)(1+wv)^{-1}\approx(w+v)(1-wv)$$

$$=w+v-wv(w+v)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)

(a)

$$(1-0.1^2)^{-\frac{1}{2}}=1.005037815\,,\quad (1+\frac{1}{2}0.1^2)=1.005$$

$$\frac{0.0000378}{1.005}=3.8\times10^{-5}$$

(b)

$$(1-0.1^2)^{\frac{1}{2}}=0.994987437\,,\quad (1-\frac{1}{2}0.1^2)=0.995$$

$$\frac{0.0000125}{0.994987}=1.3\times10^{-5}$$

(c)

$$\frac{0.1+0.1}{1+0.1\times0.1}=0.19801980\,,$$

$$0.1+0.1-0.1\times0.1\times(0.1+0.1)=0.198$$

$$\frac{0.0000198}{0.19801980}=10^{-4}$$

（1.8）（1.11）（1.13）

15　$\bar{O}$ の O に対する速度がほとんど光速とする（$|\boldsymbol{v}|=1-\varepsilon$，$0<\varepsilon<<1$）．練習問題 14 の公式は次のようになることを示せ．

(a)　$\Delta t\approx\Delta\bar{t}/\sqrt{(2\varepsilon)}$

(b)　$\Delta x\approx\Delta\bar{x}\sqrt{(2\varepsilon)}$

(c)　$w'=1-\varepsilon(1-w)/(1+w)$

(d)　$\varepsilon=0.1$ と $w=0.9$ のとき，これらの近似の相対誤差はいくらか？

（ここでの v と w は c との比として無次元とする．）

(a)　時間の遅れの式（1.8）を使って，

◆ $$\frac{\Delta t}{\Delta\bar{t}}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (1.8)$$

$$=(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}=(1-(1-\varepsilon)^2)^{-\frac{1}{2}}=(2\varepsilon-\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta\bar{t}}\approx(2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　ローレンツ収縮の式（1.11）を使って，

◆ $$\frac{\Delta x}{\Delta\bar{x}}=\sqrt{1-v^2} \qquad (1.11)$$

$$=(1-(1-\varepsilon)^2)^{\frac{1}{2}}=(2\varepsilon-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta\bar{x}}\approx(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　速度の合成則の式（1.13）を使って，

◆ $$w'=\frac{w+v}{1+wv} \qquad (1.13)$$

$$=\frac{w+1-\varepsilon}{1+w-w\varepsilon}=1-\frac{\varepsilon-w\varepsilon}{1+w-w\varepsilon}$$

◇　　$w' \approx 1 - \varepsilon \dfrac{1-w}{1+w}$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)

(a)

$$(1-0.9^2)^{-\frac{1}{2}} = 2.294157339,\quad (2\times 0.1)^{-\frac{1}{2}} = 2.236067978$$

$$\frac{0.058}{2.29415} = 0.025$$

(b)

$$(1-0.9^2)^{\frac{1}{2}} = 0.435889894,\quad (2\times 0.1)^{\frac{1}{2}} = 0.447213595$$

$$\frac{0.0113}{0.43588} = 0.025$$

(c)

$$\frac{0.9+0.9}{1+0.9\times 0.9} = 0.994475138,$$

$$1-0.1\frac{1-0.9}{1+0.9} = 0.994736842$$

$$\frac{0.000026}{0.99} = 2.6\times 10^{-4}$$

（1.8）（1.11）（1.12）

16　ローレンツ変換式（1.12）を用いて，(a)　時間の遅れ，(b)　ローレンツ収縮の公式を導け．まず，比較すべき事象のペアをみつけて，次にローレンツ変換を使って本文でのように不変双曲線を用いて問題を解け．

系Oのx軸正方向に速度vで系$\overline{O}$は等速運動しているときのローレンツ・ブーストのローレンツ変換式は,

◆
$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1.12)$$

where　$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1 \quad \beta = \dfrac{v}{c} < 1$

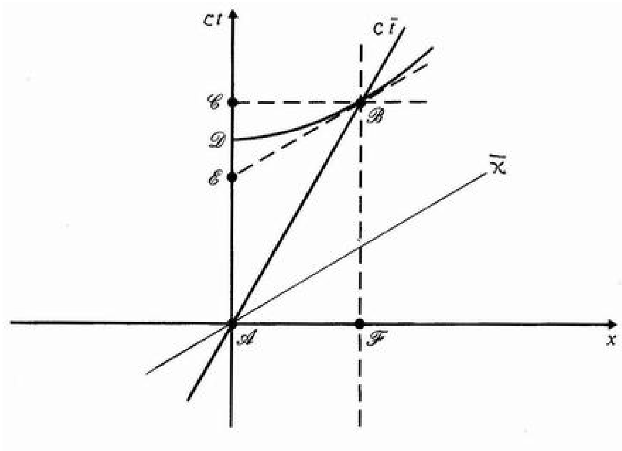


図 1.14　$\mathscr{A}\mathscr{B}$の固有長さは，$\overline{O}$で静止している時計によって測られた時間であり一方$\mathscr{A}\mathscr{C}$の固有長さはOによって測られた時間である

(a)

$$B \xrightarrow[O]{} (ct, c\beta t, 0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} t \\ \beta t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \gamma t - \gamma\beta^2 t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} t/\gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{t}_{AB} = \frac{1}{\gamma} t$$

◆ $$t = \gamma \bar{t} \tag{1.8}$$

これは，時間の遅れの式である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

$$F \xrightarrow[O]{} (0, x, 0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_{AF} = \gamma x$$

◆ $$x = \frac{1}{\gamma} \bar{x} \tag{1.11}$$

これは，ローレンツ収縮の式である．

（1.11）

17　長さ 20 mの軽い棒が 15 mの長さの小屋の横に置いてある．オリンピックの陸上選手が，その棒をもって遠くに持っていき，そこから棒を小屋に向け 0.8 c の速さで小屋めがけて走る．彼の友達は小屋の戸の前で立っている．若干難しいものもあるが，以下の質問のすべてに答えてみよ．

(a)　棒が近づいてくるとき，その友人が測る棒の長さはいくらか？

(b)　小屋の戸は最初開いているとする．走者と棒が完全に小屋の中に入るやいなや，友人は戸を閉める．友人が測って，戸が閉められてからどれだけ後に棒の先端は小屋の反対側の壁にぶつかるか？　戸を通過する事象と壁にぶつかる事象の間隔を計算せよ．その間隔は空間的か，時間的か．あるいはヌル的か？

(c)　走者の基準系では小屋と棒の長さはいくらか？

(d)　走者は棒の先端が小屋の反対側に壁にぶつかったとき，棒が完全に小屋に含まれていると信じるか．

(e)　衝突後，棒と走者とは小屋に対して静止する．小屋の戸は棒が止まる前に閉められたのだから，友人の観点では，20 mの棒が，15 mの小屋に入っていることになる．これは可能か？一方，走者の観点に立つと，戸が閉まる前に衝突によって棒は止まる．したがって戸をしめることはできない．棒や小屋に入って戸は閉まっているのか．あるいはそうでないのか？

(f)　友人の観点からの時空図を描き，それを使って読者の結論を示し，正当化せよ．

【ポイント】この問題はガレージのパラドックスといわれているものである．この問題では車が棒に代わっている．このパラドックスはこのホームページで詳細に解説されている．数値はこの問題のものを使っている．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(a)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} = \frac{1}{0.6},$$

$$x = \frac{1}{\gamma}\bar{x} = 0.6 \times 20 = 12m$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

$$ct = \frac{15-12}{0.8} = 3.75m$$

$$A \xrightarrow[O]{} (0,0)\,,\quad E \xrightarrow[O]{} (3.75, 15)$$

$\Delta s^2 = -3.75^2 + 15^2 = 211m^2$，空間的

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　小屋の長さ$= \frac{1}{\gamma}15 = 0.6 \times 15 = 9m$，棒の長さ$= 20m$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　空間的に離れている事象の前後は判定できない．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(e)　戸が閉められたのは，どの観測者から見ても事実である．走者から見て，棒の先端が反対側の壁に到達したとき棒の後端はまだ小屋に入っていないが，衝突した情報が棒の後に伝わるのは光速を超えられないので，後端も小屋の中に入ることができる．小屋から見れば，棒の長さの方が短いので，入ったことを確認できる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(f)　（友人）から見て，

棒の静止長　　$AD = 20m$

小屋の長さ　　$AC = 15m$

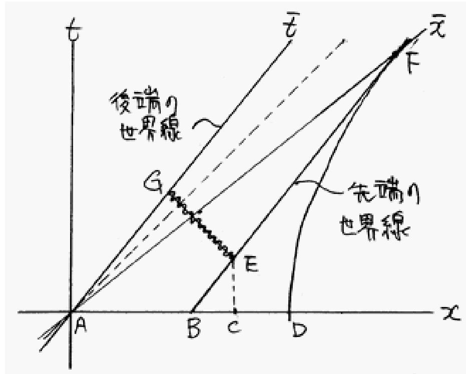
棒の動長　　$AB = 12m$

$\bar{O}$（走者）から見て，

棒の静止長　　$AF = 20m$

事象 E；棒の先端が壁に到達

事象 G；先端衝突情報が後端に届く



（1.13）

18　(a)　アインシュタインの速度の合成則（1.13）は次式で定義される速度パラメータ u の概念を導入すると簡単な形をとる.

$$v = \tanh u$$

$-\infty < u < \infty$ に対し速度が許容範囲 $-1 < v < 1$ に含まれることに注意する．もし

$$v = \tanh u\,,\quad w = \tanh U$$

なら式（1.13）は次のように書けることを示せ.

$$w' = \tanh(u + U)$$

これは速度のパラメータが線形に足し合わされることを意味する.

(b)　これを用いて次の問題を解け. ある星は第２の星が $v = 0.9c$ の速さで遠ざかっていることを観測する．第２の星は第３の星が同じ方向に $0.9c$ の速さで遠ざかっていることを観測する．同様にして第３の星は，第４の星を，第４の星は第５の星をというようにある大きな数 N 個の星まで続くとする．第 N 番目星の最初の星に対する速度はいくらか？正確な答と大きな N に対して有用な近似式を与えよ.

（ここでの v と w は c との比として無次元とする．）

(a)

◆

$$w' = \frac{v + w}{1 + v \cdot w} \qquad (1.13)$$

$$= \frac{\tanh u + \tanh U}{1 + \tanh u \cdot \tanh U} = \tanh(u + U)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　第３星は,

$$\tanh(\tanh^{-1} 0.9 + \tanh^{-1} 0.9) = \tanh(2\tanh^{-1} 0.9) = 0.9945$$

第４星は,

$$\tanh(3\tanh^{-1} 0.9) = 0.9997$$

第５星は,

$$\tanh(4\tanh^{-1} 0.9) = 0.999985$$

第 N+1 星は,

$$\tanh(N \tanh^{-1} 0.9) \approx 1 - 2 \cdot 19^{-N}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

最後の式の証明

$$\tanh x = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 h\, x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx \frac{e^x}{2} \quad \text{when} \quad x > 4$$

$$\tanh x \approx 1 - 2 \cdot \exp(-2x) = 1 - 2 \cdot \exp(-2N \tanh^{-1} 0.9)$$

$$\text{where} \quad x = N \tanh^{-1} 0.9$$

$$\exp(-2N \tanh^{-1} 0.9) = \left(\exp(2\tanh^{-1} 0.9)\right)^{-N} = 19^{-N}$$

$$\tanh(N \tanh^{-1} 0.9) \approx 1 - 2 \cdot 19^{-N}$$

第 6 星は,

$$\tanh(5\tanh^{-1} 0.9) = 0.999999192 = 1 - 8.07 \times 10^{-7}$$

$$1 - 2 \cdot 19^{-5} = 1 - 8.07 \times 10^{-7}$$

（）

19　(a)　練習問題 1.18 で導入した速度パラメータを用いて，ローレンツ変換の式（1.12）が次の形に書けることを示せ．

$$\bar{t} = ct\cosh u - x\sinh u\,,\quad \bar{y} = y$$

$$\bar{x} = -ct\sinh u + x\cosh u\,,\quad \bar{z} = z$$

(b)　恒等式 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ を用いて，これらの式から間隔の普遍性を示せ．

(c)　時空の幾何学と通常の２次元ユークリッド幾何学との類似点をできる限り導け．ここでローレンツ変換に対応する座標変換は次のように与えられる．

$$\bar{x} = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$\bar{y} = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

間隔に対応するものは何か？　不変双曲線に対応するものは何か？

(a)　ローレンツ変換式は，

◆
$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

where $\quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1 \quad \beta = \dfrac{v}{c} < 1$

数学公式

$$\cosh^2 u = \frac{1}{1-\tanh^2 u}\,,\quad \sinh^2 u = \frac{\tanh^2 u}{1-\tanh^2 u}\,,\quad \tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u}$$

を使って，

$$\beta = \tanh u$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 u}} = \cosh u$$

$$\gamma\beta = \cosh u \tanh u = \sinh u$$

これから，問題の式が導出できる．

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u & -\sinh u & 0 & 0 \\ -\sinh u & \cosh u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　間隔の普遍性を確認する．

$$\begin{aligned} \Delta\bar{s}^2 &= -(c\bar{t})^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \\ &= -(ct)^2\cosh^2 + 2ctx\cosh\cdot\sinh - x^2\sinh^2 \\ &\quad + (ct)^2\sinh^2 - 2ctx\cosh\cdot\sinh + x^2\cosh^2 + y^2 + z^2 \\ &= -(ct)^2(\cosh^2 - \sinh^2) + x^2(\cosh^2 - \sinh^2) + y^2 + z^2 \\ &= -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \Delta s^2 \end{aligned}$$

（変数は省略した．）

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　略（4.10　練習問題　25(b)　を参照のこと）

()

20　ローレンツ変換を行列の形に書け．

練習問題 16 と 19 に示した．

ローレンツ・ブーストのローレンツ変換式は，

◆
$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

where　$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1 \quad \beta = \dfrac{v}{c} < 1$

2015.06.09
1　特殊相対論　1.14　練習問題

()

21　(a)　二つの事象が時間的に離れているなら，それらが同一点で起こる，すなわち同じ空間座標をもつようなローレンツ系があることを示せ．

(b)　同様に二つの事象が空間的に離れているなら，それらが同時に起こるようなローレンツ系があることを示せ．

(a)　二つの事象を結ぶ線が時間軸と平行な座標系．二つの事象を結ぶ線が世界線であるなら，それは停止しているものの世界線である．

(b)　時間軸に垂直な超平面（３次元）上に二つの事象があるような座標系．この超平面は x 軸と y 軸と z 軸に平行である． z 軸を無視すれば，平面になるので想像できるが，３次元超平面は想像し難い．

2　特殊相対論におけるベクトル解析

ベクトル解析，４元速度，４元加速度，４元運動量，一様加速度運動，ドップラー偏移，コンプトン散乱

2.1　ベクトルの定義

位置の変位ベクトルの成分表示

$$\Delta\vec{x} \xrightarrow[O]{} (\Delta ct, \Delta x, \Delta y, \Delta z) \tag{2.1}$$

$$\Delta\vec{x} \xrightarrow[O]{} \{\Delta x^{\alpha}\} \tag{2.2}$$

$$\Delta\vec{x} \xrightarrow[\overline{O}]{} \{\Delta x^{\overline{\alpha}}\} \tag{2.2'}$$

ローレンツ変換の式（式（1.12）の一般化）

◆　$\Delta x^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta}$　（2.3）　（2.4）

【注意】式（2.3）は総和記号Σを使っているので省略した．式（2.4）はアインシュタインの総和の規約を使っている．

◆　$\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{0}\Delta x^{0} + \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{i}\Delta x^{i}$　（2.5）

【ポイント】和をとる添字をダミーの添字，和をとらない添字をフリーな添字という．ギリシャ文字の添字は(0, 1, 2, 3)から値を，ローマ文字の添字は(1, 2, 3)から値をとるとする．

【ポイント】$\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}$のように，上付添字がバーありで下付添字がバーなしのとき添字の文字に関係なく系Oから系$\overline{O}$への座標変換行列である．

一般のベクトルの成分表示

$$\vec{A} \xrightarrow[O]{} (A^0, A^1, A^2, A^3) = \{A^{\alpha}\} \tag{2.6}$$

$$A^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta} \tag{2.7}$$

【ポイント】ベクトル成分は座標そのものと同じ変換をする．

$$\vec{A}+\vec{B} \xrightarrow[O]{} (A^0+B^0, A^1+B^1, A^2+B^2, A^3+B^3)$$

$$\mu\vec{A} \xrightarrow[O]{} (\mu A^0, \mu A^1, \mu A^2, \mu A^3) \tag{2.8}$$

【ポイント】４元ベクトルは上付矢印（ベクトルと読む）で表す．

2.2　ベクトル代数

系Oの基底ベクトル

$$\vec{e}_0 \xrightarrow[O]{} (1, 0, 0, 0)$$

$$\vec{e}_1 \xrightarrow[O]{} (0, 1, 0, 0)$$

$$\vec{e}_2 \xrightarrow[O]{} (0, 0, 1, 0)$$

$$\vec{e}_3 \xrightarrow[O]{} (0, 0, 0, 1) \tag{2.9}$$

系$\overline{O}$の基底ベクトル

$$\vec{e}_{\overline{0}} \xrightarrow[\overline{O}]{} (1, 0, 0, 0)$$

$$\vec{e}_{\overline{1}} \xrightarrow[\overline{O}]{} (0, 1, 0, 0)$$

$$\vec{e}_{\overline{2}} \xrightarrow[\overline{O}]{} (0, 0, 1, 0)$$

$$\vec{e}_{\overline{3}} \xrightarrow[\overline{O}]{} (0, 0, 0, 1) \tag{2.9'}$$

基底ベクトルの定義

$$(\vec{e}_{\alpha})^{\beta} = \delta_{\alpha}{}^{\beta} \tag{2.10}$$

$\vec{e}_{\alpha}$のβ成分はクロネッカーのデルタで表される．

$$\vec{A} \xrightarrow[O]{} (A^0, A^1, A^2, A^3) = \{A^{\alpha}\} \tag{2.6}$$

$$\vec{A} = A^0\vec{e}_0 + A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3 = A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} \tag{2.11}$$

$$\vec{A} = A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} = A^{\overline{\alpha}}\vec{e}_{\overline{\alpha}} \tag{2.12}$$

【ポイント】座標変換すると基底ベクトルと成分が変わるだけで，ベクトルそのものは変わらない．

基底ベクトルの変換則

◆　$\vec{e}_{\alpha} = \Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}\vec{e}_{\overline{\beta}}$　（2.13）

【注意】系$\overline{O}$の基底ベクトルから系Oの基底ベクトルへの変換

$$\vec{e}_{\alpha} = \Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})\vec{e}_{\bar{\beta}} \tag{2.14}$$

$$\vec{e}_{\bar{\mu}} = \Lambda^{\nu}{}_{\bar{\mu}}(-\boldsymbol{v})\vec{e}_{\nu} \tag{2.15}$$

◆
$$\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}(-\boldsymbol{v})\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v}) = \delta^{\nu}{}_{\alpha} \tag{2.18}$$

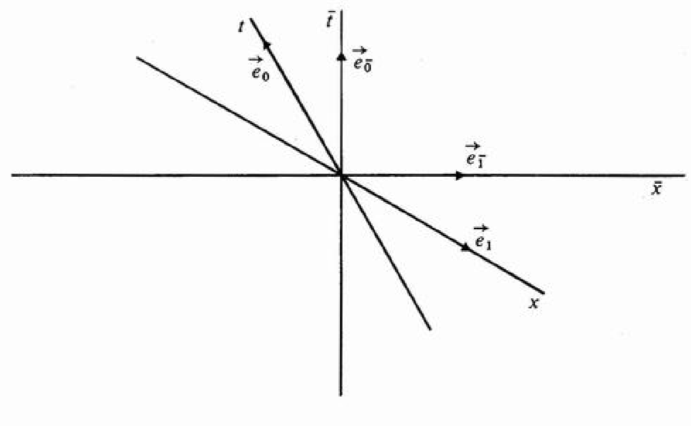


図 2.1　系 $\bar{O}$ から見た系 $\bar{O}$ と系 O での基底ベクトル

2.3　４元速度

ＭＣＲ系，ＭＣＲＦ；

瞬間的共動慣性系（momentary commoving reference frame）

４元速度；その事象点でのＭＣＲ系の基底ベクトル $c\vec{e}_{\bar{0}} \cdot = \vec{U}$

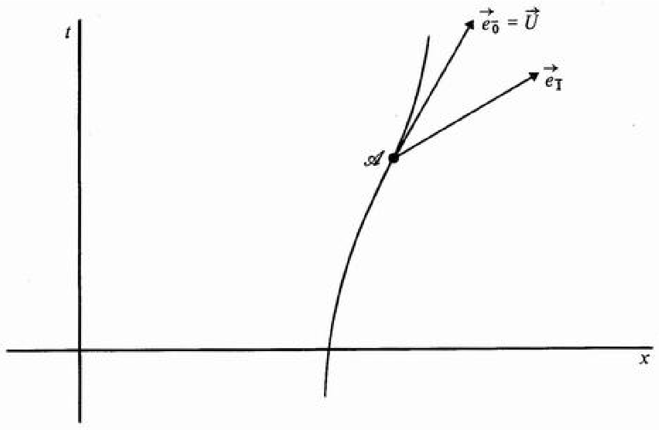


図 2.2　$\mathscr{A}$ における世界線の四元速度と瞬時的共動座標系の基底ベクトル

2.4　４元運動量

◆
$$\vec{p} = m\vec{U} \tag{2.19}$$

$$\vec{p} \xrightarrow[O]{} \left(E/c,\ p^1,\ p^2,\ p^3\right) \tag{2.20}$$

$$\vec{U} = c\vec{e}_{\bar{0}} \to (c,0,0,0) \qquad \vec{p} = m\vec{U}$$

$$U^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}(c\vec{e}_{\bar{0}})^{\bar{\beta}} = c\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{0}} \qquad p^{\alpha} = mc\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{0}} \tag{2.21}$$

Therefore

$$\begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ c\gamma\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \gamma v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U^{\alpha} = \gamma(c,v,0,0) = \gamma(c,\boldsymbol{v})$$

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} m\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} c\gamma \\ c\gamma\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} c\gamma \\ \gamma v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p^{\alpha} = m\gamma(c,v,0,0) = m\gamma(c,\boldsymbol{v})$$

where $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1 \quad \beta = \dfrac{v}{c} < 1$

４元運動量の保存

$$\vec{p} \equiv \sum_{(i)} \vec{p}_{(i)} \tag{2.22}$$

ゼロ運動量系

$$\sum_{(i)} \vec{p}_{(i)} \xrightarrow[\mathrm{CM}]{} \left(E_{\mathrm{TOTAL}}/c,\ 0,\ 0,\ 0\right) \tag{2.23}$$

ＣＭ系；ゼロ運動量系（center of momentum frame）

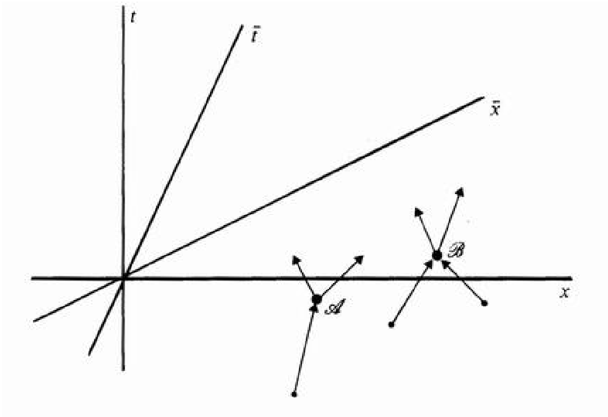


図 2.3　いくつかの衝突が関与するとき，ある特別な時刻において，個々の四元運動量の全四元運動量に対する寄与の仕方は，系に依存するが,全四元運動量はどの系からみても同じ四元ベクトルである．つまり，その成分は，ローレンツ変換によって別の系へ変換される．

2.5　スカラー積

$$\vec{A}^2 = -\left(A^0\right)^2 + \left(A^1\right)^2 + \left(A^2\right)^2 + \left(A^3\right)^2 \tag{2.24}$$

$$-\left(A^0\right)^2 + \left(A^1\right)^2 + \left(A^2\right)^2 + \left(A^3\right)^2 = -\left(A^{\bar{0}}\right)^2 + \left(A^{\bar{1}}\right)^2 + \left(A^{\bar{2}}\right)^2 + \left(A^{\bar{3}}\right)^2 \tag{2.25}$$

$\vec{A}^2 > 0$　；空間的ベクトル

$\vec{A}^2 = 0$　；ヌルベクトル

$\vec{A}^2 < 0$　；時間的ベクトル

スカラー積

◆　$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \eta_{\alpha\beta}A^{\alpha}B^{\beta} = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3 \tag{2.26}$$

メトリックテンソル

$$\eta_{\alpha\beta} = diag(-1, 1, 1, 1)$$

◆　$$\vec{e}_{\alpha}\cdot\vec{e}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{2.27}$$

$$\vec{e}_{\bar{\alpha}}\cdot\vec{e}_{\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \tag{2.27'}$$

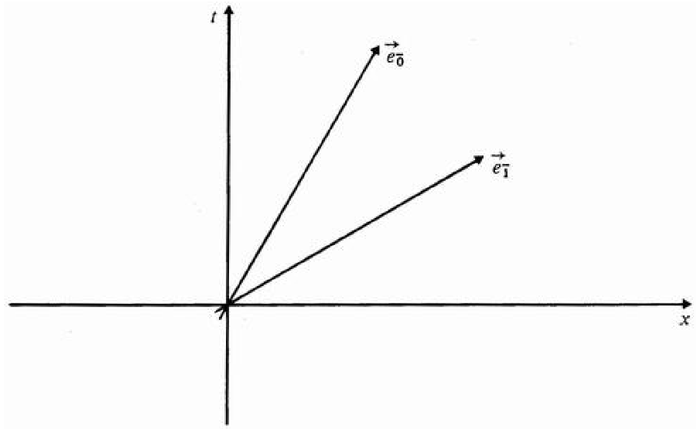


図 2.4　$\bar{O}$の基底ベクトルをOで書くと，ユークリッド的な意味では“垂直”ではない．しかし，基底ベクトルはミンコフスキー時空のスカラー積に関し“直交して”いる．

$$\vec{U}\cdot\vec{U} = -c^2 \tag{2.28}$$

導出法は問題 17 を参照

2.6　応用

４元速度と４元加速度

成分のスカラー積は間隔

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\vec{x}\cdot d\vec{x} \tag{2.29}$$

$$d\bar{s}^2 = -c^2d\bar{t}^2 = -c^2d\tau^2$$

固有時間

$$c^2d\tau^2 = c^2d\bar{t}^2 = -d\vec{x}\cdot d\vec{x} = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.30}$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau}\cdot\frac{d\vec{x}}{d\tau} = -c^2$$

$$d\vec{x} \xrightarrow[\substack{\text{MCRF} \\ d\tau = dt}]{} (cdt, 0, 0, 0)$$　（バーを消した）

４元速度

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau}\xrightarrow[\text{MCRF}]{}(c, 0, 0, 0)$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau}=\left(c\vec{e}_0\right)_{\text{MCRF}}$$

◆ $$\vec{U}=\frac{d\vec{x}}{d\tau} \tag{2.31}$$

４元加速度

$$\frac{d\vec{U}}{d\tau}=\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2}$$

$$\vec{U}\cdot\frac{d\vec{U}}{d\tau}=0$$

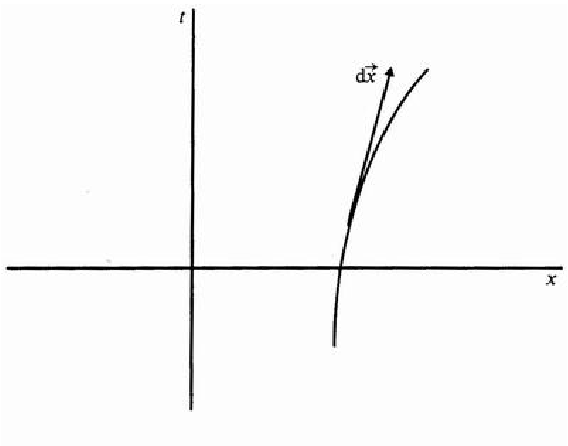


図 2.5　世界線に接している微小変位ベクトル $d\vec{x}$

$$\frac{d\vec{U}}{d\tau}\xrightarrow[\text{MCRF}]{}(0, a^1, a^2, a^3)$$

◆ $$\vec{a}=\frac{d\vec{U}}{d\tau},\quad \vec{U}\cdot\vec{a}=0 \tag{2.32}$$

エネルギーと運動量

４元運動量

$$\vec{p}\cdot\vec{p}=m^2\vec{U}\cdot\vec{U}=-m^2c^2 \tag{2.33}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{p}=-E^2/c^2+\left(p^1\right)^2+\left(p^2\right)^2+\left(p^3\right)^2$$

$$E^2=m^2c^4+\sum_{i=1}^{3}\left(p^i\right)^2c^2 \tag{2.34}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{U}_{\text{obs}}=\vec{p}\cdot c\vec{e}_0$$

$$\vec{p}\xrightarrow[\bar{O}]{}\left(\bar{E}/c,\ p^{\bar{1}},\ p^{\bar{2}},\ p^{\bar{3}}\right)$$

◆ $$-\vec{p}\cdot\vec{U}_{obs}=\bar{E} \tag{2.35}$$

2.7　光子

４元速度ではない

光子は世界線上を運動する．

$$d\vec{x}\cdot d\vec{x}=0 \tag{2.37}$$

$d\tau=0$ で４元速度は定義できない．

４元運動量

$$\vec{p}\cdot\vec{p}=-E^2/c^2+E^2/c^2=0 \tag{2.37}$$

光子はエネルギーに等しい空間的運動量をもっている．

$$E=h\nu \tag{2.38}$$

光子のドップラー偏移の公式

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu}=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{2.39}$$

静止質量ゼロの粒子

光子は静止質量がゼロでなくてはならない．

$$m^2c^2=-\vec{p}\cdot\vec{p}=0 \tag{2.40}$$

節の中で使われている公式と問題

2.1　ベクトルの定義　（2.1）～（2.8）

問題 1，2，3，4，34

2.2　ベクトル代数　（2.9）～（2.18）

問題 5，6，7，8，9，10，11，12，13，14，35

2.3　４元速度

問題 15，16，17

2.4　４元運動量　（2.19）～（2.23）

問題 22，31，32，33

2.5　スカラー積　（2.24）～（2.28）

問題 18，28

2.6　応用　（2.29）～（2.35）

問題 19，20，21，23，26，27，29，30

2.7　光子　（2.36）～（2.40）

問題 24，25

()

1　$\{A^0=5, A^1=0, A^2=-1, A^3=-6\}$，$\{B_0=0, B_1=-2, B_2=4, B_3=0\}$，
$\{C_{00}=1, C_{01}=0, C_{02}=2, C_{03}=3, C_{30}=-1,\ C_{10}=5, C_{11}=-2, C_{12}=-2, C_{13}=0,$
$C_{21}=5, C_{22}=2, C_{23}=-2, C_{20}=4, C_{31}=-1, C_{32}=-3, C_{33}=0\}$
が与えられているとき，次の値を求めよ．

(a)　$A^\alpha B_\alpha$ の値

(b)　すべての β について $A^\alpha C_{\alpha\beta}$ の値

(c)　すべての σ について $A^\gamma C_{\gamma\sigma}$ の値

(d)　すべての μ について $A^\mu C_{\mu\nu}$ の値

(e)　すべての α と β について $A^\alpha B_\beta$ の値

(f)　$A^i B_i$ の値

(g)　すべての j と k について $A^j B_k$ の値

(a)　$$A^\alpha B_\alpha = \begin{pmatrix}0 & -2 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\-6\end{pmatrix} = -4$$

(b)　$$A^\alpha C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & -1\\0 & -2 & 5 & -1\\2 & -2 & 2 & -3\\3 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\26\\17\end{pmatrix}$$

(c)　(b)と同じ

(d)　$$A^\mu C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\5 & -2 & -2 & 0\\4 & 5 & 2 & -2\\-1 & -1 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\27\\30\\-2\end{pmatrix}$$

(e)　$A^{\alpha}B_{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 12 & -24 & 0 \end{pmatrix}$

(f)　$A^{i}B_{i} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = -4$

(g)　(e)の中で添字 0 を除く.

$$A^{j}B_{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 12 & -24 & 0 \end{pmatrix}$$

()

2　次の式のなかのフリーおよびダミーの添字を指摘し，もとの添字と異なった添字を使って，書き換えよ．おのおのの式は何本の式を表しているか？

(a)　$A^{\alpha}B_{\alpha} = 5$

(b)　$A^{\bar{\mu}} = \Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\nu}A^{\nu}$

(c)　$T^{\alpha\mu\lambda}A_{\mu}C^{\gamma}{}_{\lambda} = D^{\gamma\alpha}$

(d)　$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2 = G_{\mu\nu}$

(a)　$A^{\alpha}B_{\alpha} = 5$

α ：ダミー，１つの式.

$$A^{\beta}B_{\beta} = 5$$

(b)　$A^{\bar{\mu}} = \Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\nu}A^{\nu}$

ν ：ダミー，$\bar{\mu}$ ：フリー，$\bar{\mu} = 0, 1, 2, 3$についての 4 式.

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta}$$

(c)　$T^{\alpha\mu\lambda}A_{\mu}C^{\gamma}{}_{\lambda} = D^{\gamma\alpha}$

μ, λ ：ダミー，α, γ ：フリー，$\alpha, \gamma = 0, 1, 2, 3$についての 16 式.

$$T^{\beta\sigma\tau}A_{\sigma}C^{\delta}{}_{\tau} = D^{\delta\beta}$$

(d)　$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2 = G_{\mu\nu}$

μ, ν ：フリー，$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$についての 16 式，和はない.

$$R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}R/2 = G_{\alpha\beta}$$

（2.5）

3　式（2.5）を証明せよ．

◆ $$\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{0}\Delta x^{0} + \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{i}\Delta x^{i} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta} &= \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{0}\Delta x^{0} + \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{1}\Delta x^{1} + \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{2}\Delta x^{2} + \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{3}\Delta x^{3} \\ &= \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{0}\Delta x^{0} + \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{i}\Delta x^{i} \qquad (2.5)\end{aligned}$$

ギリシャ文字は０，１，２，3，ローマ字は１，２，３を表す．

（）

4　二つのベクトル $\vec{A} \xrightarrow[O]{} (5, -1, 0, 1)$ と $\vec{B} \xrightarrow[O]{} (-2, 1, 1, -6)$ が与えられたとき，系 O での次の量の成分を求めよ．

(a)　$-6\vec{A}$

(b)　$3\vec{A}+\vec{B}$

(c)　$-6\vec{A}+3\vec{B}$

(a)　$-6\vec{A} \xrightarrow[O]{} (-30, 6, 0, -6)$

(b)　$3\vec{A}+\vec{B} \xrightarrow[O]{} (13, -2, 1, -3)$

(c)　$-6\vec{A}+3\vec{B} \xrightarrow[O]{} (-36, 9, 3, -24)$

（2.9）

5　ベクトルの集合$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$について，$0\vec{a}+0\vec{b}+0\vec{c}+0\vec{d}=0$なる自明の場合を除いて，いかなる線形結合をとってもゼロにならないとき，それらのベクトルは線形独立であるという．

(a)　式（2.9）基底ベクトルは線形独立であることを示せ．

(b)　次のベクトルの集合は線形独立か？

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, 5\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}\}$

$$\vec{e}_0 \xrightarrow[O]{} (1,0,0,0)$$
$$\vec{e}_1 \xrightarrow[O]{} (0,1,0,0)$$
$$\vec{e}_2 \xrightarrow[O]{} (0,0,1,0)$$
$$\vec{e}_3 \xrightarrow[O]{} (0,0,0,1) \qquad (2.9)$$

(a)　例えば，$\vec{e}_0$は，$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$の線形結合で表せない．$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$についても同様である．ゆえに線形独立である．

(b)　4番目のベクトルが他のベクトルの線形結合で表せる．ゆえに線形独立でない．

（）

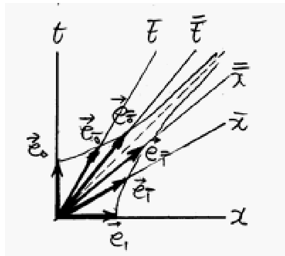
6　系Oの$ct-x$時空図に，基底ベクトル$\vec{e}_0$と$\vec{e}_1$を書け．系Oに対してx軸の正の方向に0.6cの速度で運動している系$\bar{O}$での対応するベクトルを書け．さらに，系$\bar{O}$に対してx軸の正の方向に0.6cの速度で運動している系$\bar{\bar{O}}$での対応するベクトルを書け．

1.14 練習問題18の速度の合成則の式を使う．

$$\bar{\bar{v}} = \tanh(\tanh^{-1} 0.6 + \tanh^{-1} 0.6) = 0.88$$

$$\tan^{-1} 0.6 = 31$$

$$\tan^{-1} 0.88 = 41$$



（2.9）～（2.11）

7　(a)　すべてのαとβについて，式（2.10）が成り立っていることを示せ．
(b)　式（2.9）から式（2.11）を証明せよ．

$$\vec{e}_0 \xrightarrow[O]{} (1, 0, 0, 0)$$
$$\vec{e}_1 \xrightarrow[O]{} (0, 1, 0, 0)$$
$$\vec{e}_2 \xrightarrow[O]{} (0, 0, 1, 0)$$
$$\vec{e}_3 \xrightarrow[O]{} (0, 0, 0, 1) \qquad (2.9)$$
$$(\vec{e}_\alpha)^\beta = \delta_\alpha{}^\beta \qquad (2.10)$$
$$\vec{A} = A^0\vec{e}_0 + A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3 = A^\alpha\vec{e}_\alpha \qquad (2.11)$$

(a)　式（2.9）から，

$$(\vec{e}_0)^0 = 1,\ (\vec{e}_1)^1 = 1,\ (\vec{e}_2)^2 = 1,\ (\vec{e}_3)^3 = 1,$$
$$(\vec{e}_0)^1 = 0,\ (\vec{e}_0)^2 = 0,\ (\vec{e}_0)^3 = 0,\ \text{など}$$

ゆえに

$$(\vec{e}_\alpha)^\beta = \delta_\alpha{}^\beta \qquad (2.10)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　$\vec{A} \xrightarrow[O]{} (A^0, A^1, A^2, A^3)$

$$\vec{A}(\vec{e}_\alpha) = \vec{A}\cdot\vec{e}_\alpha = A^\alpha$$

となるので

$$\vec{A} = A^0\vec{e}_0 + A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3 = A^\alpha\vec{e}_\alpha \qquad (2.11)$$

（2.7）

8　(a)　ゼロベクトル$(0, 0, 0, 0)$はすべての系で同じ成分をもつことを示せ．
(b)　(a)を使って，二つのベクトルが一つの系で同じ成分をもてば，すべての系で同じ成分をもつことを証明せよ．

(a)　$\vec{A} \xrightarrow[O]{} (0, 0, 0, 0)$

とする．成分変換式

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_\beta A^\beta \qquad (2.7)$$

から，

$$A^\beta = 0$$

なので

$$A^{\bar{\alpha}} = 0$$

となる．ゆえに，

$$\vec{A} \xrightarrow[\bar{O}]{} (0, 0, 0, 0)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　$\vec{A}$と$\vec{B}$の成分が同じなら，

$$\vec{A} - \vec{B} \xrightarrow[O]{} (0, 0, 0, 0)\ \text{となる．}$$

したがって，(a)から，

$$\vec{A} - \vec{B} \xrightarrow[\bar{O}]{} (0, 0, 0, 0)$$

ゆえに，$\bar{O}$系でも$\vec{A} = \vec{B}$となる．

（）

9　すべての項を書き下すことで，次の式を証明せよ．

$$\sum_{\bar{\alpha}=0}^{3}\left(\sum_{\beta=0}^{3}\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta}\vec{e}_{\bar{\alpha}}\right)=\sum_{\beta=0}^{3}\left(\sum_{\bar{\alpha}=0}^{3}\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta}\vec{e}_{\bar{\alpha}}\right)$$

総和の順序が問題にならないので，総和の順序を明示しないで，アインシュタインの総和の規約を使って，$\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta}\vec{e}_{\bar{\alpha}}$ と書くことが正当化される．

$\bar{O}$ 系で，

$$\vec{A}=A^{\bar{0}}\vec{e}_{\bar{0}}+A^{\bar{1}}\vec{e}_{\bar{1}}+A^{\bar{2}}\vec{e}_{\bar{2}}+A^{\bar{3}}\vec{e}_{\bar{3}}$$

であるが，その成分変換式を書き下すと，

$$\begin{pmatrix}A^{\bar{0}}\\A^{\bar{1}}\\A^{\bar{2}}\\A^{\bar{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda^{\bar{0}}{}_{0}&\Lambda^{\bar{0}}{}_{1}&\Lambda^{\bar{0}}{}_{2}&\Lambda^{\bar{0}}{}_{3}\\\Lambda^{\bar{1}}{}_{0}&\Lambda^{\bar{1}}{}_{1}&\Lambda^{\bar{1}}{}_{2}&\Lambda^{\bar{1}}{}_{3}\\\Lambda^{\bar{2}}{}_{0}&\Lambda^{\bar{2}}{}_{1}&\Lambda^{\bar{2}}{}_{2}&\Lambda^{\bar{2}}{}_{3}\\\Lambda^{\bar{3}}{}_{0}&\Lambda^{\bar{3}}{}_{1}&\Lambda^{\bar{3}}{}_{2}&\Lambda^{\bar{3}}{}_{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{0}\\A^{1}\\A^{2}\\A^{3}\end{pmatrix}$$

したがって，ベクトルは，

$$\vec{A}=A^{\bar{\alpha}}\vec{e}_{\bar{\alpha}}=\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta}\vec{e}_{\bar{\alpha}}$$

と書くことができる．

（2.13）

10　任意のベクトル $\vec{A}$ の成分適当に選んで，$A^{\alpha}(\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}\vec{e}_{\bar{\beta}}-\vec{e}_{\alpha})=0$ を使って，式（2.13）を証明せよ．

◆

$$\vec{e}_{\alpha}=\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}\vec{e}_{\bar{\beta}} \tag{2.13}$$

【ポイント】ベクトルの変換式と基底ベクトルの逆変換式は変換行列を用い，ベクトルの逆変換式と基底ベクトルの変換式は逆変換行列を用いる．
逆変換行列は変換行列の逆行列である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

$$\vec{A}\to(1,0,0,0)$$

とすると，

$$A^{0}(\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{0}\vec{e}_{\bar{\beta}}-\vec{e}_{0})=0 \qquad \therefore \Lambda^{\bar{\beta}}{}_{0}\vec{e}_{\bar{\beta}}=\vec{e}_{0}$$

$$\vec{A}\to(0,1,0,0)$$

とすると，

$$A^{1}(\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{1}\vec{e}_{\bar{\beta}}-\vec{e}_{1})=0 \qquad \therefore \Lambda^{\bar{\beta}}{}_{1}\vec{e}_{\bar{\beta}}=\vec{e}_{1}$$

$$\vec{A}\to(0,0,1,0)$$

とすると，

$$A^{2}(\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{2}\vec{e}_{\bar{\beta}}-\vec{e}_{2})=0 \qquad \therefore \Lambda^{\bar{\beta}}{}_{2}\vec{e}_{\bar{\beta}}=\vec{e}_{2}$$

$$\vec{A}\to(0,0,0,1)$$

とすると，

$$A^{3}(\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{3}\vec{e}_{\bar{\beta}}-\vec{e}_{3})=0 \qquad \therefore \Lambda^{\bar{\beta}}{}_{3}\vec{e}_{\bar{\beta}}=\vec{e}_{3}$$

$$\vec{e}_{\alpha}=\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}\vec{e}_{\bar{\beta}} \tag{2.13}$$

これは，基底ベクトルの変換則である．

（2.18）

11　$\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}$ を式（1.12）で与えられる，O から $\bar{O}$ へのローレンツ変換の変換行列とする．$\vec{A}$ は系 O の成分が (A^0, A^1, A^2, A^3) であるような任意のベクトルである．

$$\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{（1.12）から}$$

(a)　逆変換行列 $\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\mu}}(-v)$ を書き下せ．

(b)　すべての $\bar{\alpha}$ につき $A^{\bar{\alpha}}$ を求めよ．

(c)　すべての ν とに α ついて，式（2.18）を証明せよ．

(d)　系 $\bar{O}$ から O へのローレンツ変換の行列の要素を書き下せ．

(e)　(d)を利用して，A^{β} を $A^{\bar{\alpha}}$ で表せ．また，式（2.18）との関係を述べよ．

(f)　(c)と同様にして，

$$\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}(v)\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\nu}(-v) = \delta^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\beta}}$$

を示せ．

(g)　次の関係を確かめよ．

$$\vec{e}_{\alpha} = \delta^{\nu}{}_{\alpha}\vec{e}_{\nu}$$

および

$$A^{\bar{\beta}} = \delta^{\bar{\beta}}{}_{\bar{\mu}}A^{\bar{\mu}}$$

◆　$$\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}(-\boldsymbol{v})\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v}) = \delta^{\nu}{}_{\alpha} \quad (2.18)$$

【ポイント】粒子静止系を $\bar{O}$ としてそれの観測系を O とした場合，

変換行列は，$\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}(v)$ のように上付添字にバー付き，下付添字にバー無しの記号を用いる．記号は何であっても同じ変換行列を表す．

逆変換行列は，$\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}(-v)$ のように下付添字にバー付き，上付添字にバー無しの

記号を用いる．記号は何であっても同じ逆変換行列を表す．

(v) は変換行列を強調し，$(-v)$ は逆変換行列を強調している．実際には変換行列には $-\beta$ が，逆変換行列には β が入っている．

前付添字が行，後付添字が列を表す．（この原則は曖昧であるが重要である）

ベクトルは列ベクトル，基底ベクトルは行ベクトルで表す．

ベクトルや行列の掛け算では，ダミー添字が同じものを掛けてフリー添字が同じものの総和をとる．この原則に従うために転置することもある．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(a)　これは逆変換行列である．

$$\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\mu}}(-v) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　これは，ローレンツ変換式である．

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}(v)A^{\beta} \quad (2.7)$$

書き下すと，行列の行がフリー，列がダミーとなるから，

◆　$$\begin{pmatrix} A^{\bar{0}} \\ A^{\bar{1}} \\ A^{\bar{2}} \\ A^{\bar{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

$$\text{where} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1 \quad \beta = \frac{v}{c} < 1$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　逆変換行列は変換行列の逆行列であることを示す．

第１行列の行がフリー，第２行列の列がフリーとなるから，ν と α がフリーとなるようにして，

$$\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}(-v)\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}(v)$$
$$= \left(\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}(-v)\right)\left(\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}(v)\right)$$

$$=\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\beta & 0 & 0\\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\gamma^2-\gamma^2\beta^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \gamma^2-\gamma^2\beta^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\delta^{\nu}{}_{\alpha}$$

ゆえに，

◆　$\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(-v)\Lambda^{\bar\beta}{}_{\alpha}(v)=\delta^{\nu}{}_{\alpha}$　（2.18）

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　逆変換式の逆変換行列であるから，問題(a)と同じ.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(e)　これは逆変換式であるから，

$$A^{\beta}=\Lambda^{\beta}{}_{\bar\alpha}(-v)A^{\bar\alpha}$$

書き下すと，行列の行がフリー，列がダミーとなるから，

$$\begin{pmatrix}A^0\\ A^1\\ A^2\\ A^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\beta & 0 & 0\\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{\bar 0}\\ A^{\bar 1}\\ A^{\bar 2}\\ A^{\bar 3}\end{pmatrix}$$

where　$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}>1$　$\beta=\dfrac{v}{c}<1$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(f)　変換行列は逆変換行列の逆行列であることを示す.

第１行列の行がフリー，第２行列の列がフリーになるから，$\bar\beta$ と $\bar\alpha$ がフリーとなるようにして，

$$\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(v)\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\nu}(-v)$$

$$=\left[\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(v)\right]^T\left[\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\nu}(-v)\right]^T$$

$$=\left[\Lambda_{\bar\beta}{}^{\nu}(v)\right]\left[\Lambda_{\nu}{}^{\bar\alpha}(-v)\right]$$

$$=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\beta & 0 & 0\\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\gamma^2-\gamma^2\beta^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \gamma^2-\gamma^2\beta^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\delta^{\bar\alpha}{}_{\bar\beta}$$

$$\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(v)\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\nu}(-v)=\delta^{\bar\alpha}{}_{\bar\beta}$$

$\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(v)$ と $\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\nu}(-v)$ とは逆行列なので，行列の順序を入れ換えても結果は変わず，問題(c)の式（2.18）と同じである.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(g)　$\vec e_{\alpha}=\delta^{\nu}{}_{\alpha}\vec e_{\nu}$

$\delta^{\nu}{}_{\alpha}$ は単位行列であり，列の α がフリーである.

$$\begin{pmatrix}\vec e_0 & \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec e_0 & \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

これは，基底ベクトルは線形独立であると同義である.

$$A^{\bar\beta}=\delta^{\bar\beta}{}_{\bar\mu}A^{\bar\mu}$$

$\delta^{\bar\beta}{}_{\bar\mu}$ は単位行列であり，行の $\bar\beta$ がフリーである.

$$\begin{pmatrix}A^{\bar 0}\\ A^{\bar 1}\\ A^{\bar 2}\\ A^{\bar 3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{\bar 0}\\ A^{\bar 1}\\ A^{\bar 2}\\ A^{\bar 3}\end{pmatrix}$$

この変換では成分が変わらないことを示す.

()

12　$\vec{A} \xrightarrow[O]{} (0,-2,3,5)$ であるとき，以下の問に答えよ．

(a)　系 O に対し x 軸の正の方向に速度 0.8c で運動している系 $\overline{O}$ で $\vec{A}$ の成分を求めよ．

(b)　系 $\overline{O}$ に対し x 軸の正の方向に速度 0.6c で運動している系 $\overline{\overline{O}}$ で $\vec{A}$ の成分を求めよ．

(c)　系 O での成分から $\vec{A}$ の大きさを求めよ．

(d)　系 $\overline{O}$ での成分から $\vec{A}$ の大きさを求めよ．

(a)　ブーストのローレンツ変換式を使って，

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} = \frac{1}{0.6}$$

$$\begin{pmatrix} A^{\bar{0}} \\ A^{\bar{1}} \\ A^{\bar{2}} \\ A^{\bar{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0.6} & -\frac{0.8}{0.6} & 0 & 0 \\ -\frac{0.8}{0.6} & \frac{1}{0.6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.66 \\ -3.33 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　速度の合成則の式を使って，

$$\beta = \tanh(\tanh^{-1} 0.8 + \tanh^{-1} 0.6) = \tanh 1.79 = 0.946$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.946^2}} = 3.083,\quad \gamma\beta = 2.916$$

$$\begin{pmatrix} A^{\bar{\bar{0}}} \\ A^{\bar{\bar{1}}} \\ A^{\bar{\bar{2}}} \\ A^{\bar{\bar{3}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.083 & -2.916 & 0 & 0 \\ -2.916 & 3.083 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.83 \\ -6.17 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

別解）　問題(a)を使って，ローレンツ変換を２段階変換する．

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}} = 1.25,\quad \gamma\beta = 0.75$$

$$\begin{pmatrix} A^{\bar{\bar{0}}} \\ A^{\bar{\bar{1}}} \\ A^{\bar{\bar{2}}} \\ A^{\bar{\bar{3}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 & -0.75 & 0 & 0 \\ -0.75 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.66 \\ -3.33 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.82 \\ -6.16 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　$\vec{A}\cdot\vec{A} = -0^2 + (-2)^2 + 3^2 + 5^2 = 38$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　$\vec{A}\cdot\vec{A} = -2.66^2 + (-3.33)^2 + 3^2 + 5^2 = 38$

()

13　系 $\bar{O}$ は，系 O に対して速度 v で動き，系 $\bar{\bar{O}}$ は，系 $\bar{O}$ に対して速度 v' で動いているとする．

(a)　O から $\bar{\bar{O}}$ へのローレンツ変換は次のように表されることを示せ．

$$\Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\mu} = \Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\bar{\gamma}}(v')\Lambda^{\bar{\gamma}}{}_{\mu}(v) \qquad (2.41)$$

(b)　式（2.41）は，ローレンツ変換の行列の積であることを示せ．

(c)　$v/c = 0.6\vec{e}_x$，$v'/c = 0.8\vec{e}_{\bar{y}}$ としたとき，すべての μ と $\bar{\bar{\alpha}}$ について $\Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\mu}$ を求めよ．

(d)　(c)で求めた変換がローレンツ変換になっていることを，いかなる $(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ に対しても，$\Delta\bar{\bar{s}}^2 = \Delta s^2$ となることを示すことで証明せよ．

(e)　(c)に与えた v と v' について

$$\Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\bar{\gamma}}(v)\Lambda^{\bar{\gamma}}{}_{\mu}(v')$$

を計算し，結果が(c)のものと異なることを示せ．この違いを物理的に説明せよ．

(a)　O から $\bar{O}$ への，$\bar{O}$ から $\bar{\bar{O}}$ への変換は，

$$A^{\bar{\gamma}} = \Lambda^{\bar{\gamma}}{}_{\mu}(v)A^{\mu},\quad A^{\bar{\bar{\alpha}}} = \Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\bar{\gamma}}(v')A^{\bar{\gamma}}$$

$$A^{\bar{\bar{\alpha}}} = \Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\bar{\gamma}}(v')\Lambda^{\bar{\gamma}}{}_{\mu}(v)A^{\mu}$$

ゆえに，与式

$$\Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\mu} = \Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\bar{\gamma}}(v')\Lambda^{\bar{\gamma}}{}_{\mu}(v) \qquad (2.41)$$

が証明された．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　書き下すと，

$$\Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\bar{\gamma}}(v')\Lambda^{\bar{\gamma}}{}_{\mu}(v)$$

$$= \begin{pmatrix} \Lambda^{\bar{\bar{0}}}{}_{\bar{0}} & \Lambda^{\bar{\bar{0}}}{}_{\bar{1}} & \Lambda^{\bar{\bar{0}}}{}_{\bar{2}} & \Lambda^{\bar{\bar{0}}}{}_{\bar{3}} \\ \Lambda^{\bar{\bar{1}}}{}_{\bar{0}} & \Lambda^{\bar{\bar{1}}}{}_{\bar{1}} & \Lambda^{\bar{\bar{1}}}{}_{\bar{2}} & \Lambda^{\bar{\bar{1}}}{}_{\bar{3}} \\ \Lambda^{\bar{\bar{2}}}{}_{\bar{0}} & \Lambda^{\bar{\bar{2}}}{}_{\bar{1}} & \Lambda^{\bar{\bar{2}}}{}_{\bar{2}} & \Lambda^{\bar{\bar{2}}}{}_{\bar{3}} \\ \Lambda^{\bar{\bar{3}}}{}_{\bar{0}} & \Lambda^{\bar{\bar{3}}}{}_{\bar{1}} & \Lambda^{\bar{\bar{3}}}{}_{\bar{2}} & \Lambda^{\bar{\bar{3}}}{}_{\bar{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^{\bar{0}}{}_{0} & \Lambda^{\bar{0}}{}_{1} & \Lambda^{\bar{0}}{}_{2} & \Lambda^{\bar{0}}{}_{3} \\ \Lambda^{\bar{1}}{}_{0} & \Lambda^{\bar{1}}{}_{1} & \Lambda^{\bar{1}}{}_{2} & \Lambda^{\bar{1}}{}_{3} \\ \Lambda^{\bar{2}}{}_{0} & \Lambda^{\bar{2}}{}_{1} & \Lambda^{\bar{2}}{}_{2} & \Lambda^{\bar{2}}{}_{3} \\ \Lambda^{\bar{3}}{}_{0} & \Lambda^{\bar{3}}{}_{1} & \Lambda^{\bar{3}}{}_{2} & \Lambda^{\bar{3}}{}_{3} \end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　書き下すと，

$$\Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\mu} = \Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\bar{\gamma}}(v')\Lambda^{\bar{\gamma}}{}_{\mu}(v)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\gamma'\beta' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma'\beta' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & -\gamma\gamma'\beta & -\gamma'\beta' & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ -\gamma\gamma'\beta' & \gamma\gamma'\beta\beta' & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　速度の合成後の変換式は，

$$\begin{pmatrix} \Delta c\bar{\bar{t}} \\ \Delta\bar{\bar{x}} \\ \Delta\bar{\bar{y}} \\ \Delta\bar{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & -\gamma\gamma'\beta & -\gamma'\beta' & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ -\gamma\gamma'\beta' & \gamma\gamma'\beta\beta' & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta ct \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

書き下してから，二乗する．

$$-\Delta c\bar{\bar{t}}^2 = -\gamma^2\gamma'^2\Delta ct^2 - \gamma^2\gamma'^2\beta^2\Delta x^2 - \gamma'^2\beta'^2\Delta y^2$$
$$+ 2\gamma^2\gamma'^2\beta\Delta ct\Delta x + 2\gamma\gamma'^2\beta'\Delta ct\Delta y - 2\gamma\gamma'^2\beta\beta'\Delta x\Delta y$$

$$\Delta\bar{\bar{x}}^2 = \gamma^2\beta^2\Delta ct^2 + \gamma^2\Delta x^2 - 2\gamma^2\beta\Delta ct\Delta x$$

$$\Delta\bar{\bar{y}}^2 = \gamma^2\gamma'^2\beta'^2\Delta ct^2 + \gamma^2\gamma'^2\beta^2\beta'^2\Delta x^2 + \gamma'^2\Delta y^2$$
$$- 2\gamma^2\gamma'^2\beta\beta'^2\Delta ct\Delta x - 2\gamma\gamma'^2\beta'\Delta ct\Delta y + 2\gamma\gamma'^2\beta\beta'\Delta x\Delta y$$

$$\Delta\bar{\bar{z}}^2 = \Delta z^2$$

Δct^2 の係数 $= -\gamma^2\gamma'^2 + \gamma^2\beta^2 + \gamma^2\gamma'^2\beta'^2$

$$=-\gamma^2\gamma'^2(1-\beta'^2)+\gamma^2\beta^2$$

$$=-\gamma^2+\gamma^2\beta^2=-\gamma^2(1-\beta^2)=1$$

Δx^2 の係数 $=-\gamma^2\gamma'^2\beta^2+\gamma^2+\gamma^2\gamma'^2\beta^2\beta'^2$

$$=\gamma^2-\gamma^2\gamma'^2\beta^2(1-\beta'^2)$$

$$=\gamma^2-\gamma^2\beta^2=\gamma^2(1-\beta^2)=1$$

Δy^2 の係数 $=-\gamma'^2\beta'^2+\gamma'^2=\gamma'^2(1-\beta'^2)=1$

$\Delta ct\Delta x$ の係数 $=2\gamma^2\gamma'^2\beta-2\gamma^2\beta-2\gamma^2\gamma'^2\beta\beta'^2$

$$=2\gamma^2\gamma'^2\beta(1-\beta'^2)-2\gamma^2\beta=0$$

$$-\Delta c\bar{\bar{t}}^2+\Delta\bar{\bar{x}}^2+\Delta\bar{\bar{y}}^2+\Delta\bar{\bar{z}}^2=\Delta ct^2+\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2$$

したがって，与式

$$\Delta\bar{\bar{s}}^2=\Delta s^2$$

が証明された．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(e)　書き下すと，

$$\Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\bar{\gamma}}(v)\Lambda^{\bar{\gamma}}{}_{\mu}(v')$$

$$=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma' & 0 & -\gamma'\beta' & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\gamma'\beta' & 0 & \gamma' & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\text{省略}$$

結果は明らかに(c)と異なる．

(c)と(e)では，x 軸方向と y 軸方向の合成されたローレンツ収縮が異なる．つまり，x 軸にブーストしてから y 軸にブーストして合成するものと，その逆の手順で合成するものとは結果が異なる．

()

14　次の行列は O から $\bar{O}$ へのローレンツ変換である．

$$\begin{pmatrix}1.25 & 0 & 0 & .75\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ .75 & 0 & 0 & 1.25\end{pmatrix}$$

(a)　O に対する $\bar{O}$ の速度を求めよ．

(b)　逆変換を求めよ．

(c)　ベクトル $\vec{A}\underset{\bar{O}}{\longrightarrow}(1, 2, 0, 0)$ の系 O での成分を求めよ．

(a)　$v\,//\,z$ 軸であり，

$$\gamma=1.25,\quad -\gamma\beta=0.75$$

であるから，

$$\beta=\frac{-0.75}{1.25}=-0.6$$

系 $\bar{O}$ は系 O の z 軸の負の方向に $0.6c$ の速度で動いている．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　$-\gamma\beta$ を $\gamma\beta$ に置き換える．

$$\begin{pmatrix}1.25 & 0 & 0 & -0.75\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -0.75 & 0 & 0 & 1.25\end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　逆変換式を使う．

$$\begin{pmatrix}\Delta ct\\ \Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.25 & 0 & 0 & -0.75\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -0.75 & 0 & 0 & 1.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.25\\ 2\\ 0\\ -0.75\end{pmatrix}$$

（2.21）

15　(a)　　系 O での速度が x 軸の正の方向に v である粒子の系 O での４元速度を粒子の静止系からのローレンツ変換を使って計算せよ.
　(b)　この結果を一般化して，粒子が任意の速度 $\boldsymbol{v}$ をもつとき，その４元速度を求めよ．ただし，$|\boldsymbol{v}/c|<1$ とする.
　(c)　(b)での結果を用いて，$\boldsymbol{v}$ を成分 $\{U^{\alpha}\}$ を使って表せ.
　(d)　４元速度の成分が $(2,1,1,1)$ である３元速度 $\boldsymbol{v}$ を求めよ.

　(a)　MCR 系（系 $\bar{O}$ ）での４元速度は,

$$\vec{U}=c\vec{e}_{\bar{0}},\quad U^{\bar{\beta}}=c(\vec{e}_{\bar{0}})^{\bar{\beta}}$$

となる．ここで $(\vec{e}_{\bar{0}})^{\bar{\beta}}$ は系 $\bar{O}$ での $\vec{e}_{\bar{0}}$ の $\bar{\beta}$ 成分である．すなわち,

◇　$$\vec{U}\underset{MCR}{\longrightarrow}(c,0,0,0)$$

観測系（系 O）での４元速度を算出するテンソル形式の逆変換式は,

$$U^{\alpha}=\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}U^{\bar{\beta}}=\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}c(\vec{e}_{\bar{0}})^{\bar{\beta}}=c\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{0}} \qquad (2.21)$$

　　where　$\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{0}}$ はローレンツ変換の行列の１列目のこと.

上式を書き下すと，観測系（系 O）での４元速度を算出できる.

◇　$$\begin{pmatrix}U^0\\U^1\\U^2\\U^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&\gamma\beta&0&0\\\gamma\beta&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\gamma\\c\gamma\beta\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\gamma\\\gamma v\\0\\0\end{pmatrix}$$

　　where　$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}>1\quad \beta=\dfrac{v}{c}<1$

$$\vec{U}\underset{O}{\longrightarrow}(c\gamma,c\gamma\beta,0,0)=c(\gamma,\gamma\beta,0,0)$$

上の式は，ローレンツ逆変換式である（問題 11 を参照）。

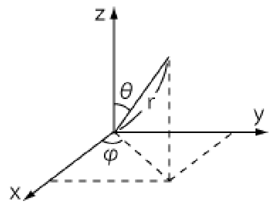
＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

問題(b)の前に

【ローレンツ変換の一般式】

x 軸方向のブーストのローレンツ変換行列の座標軸を回転させて，任意の方向のローレンツ変換行列を導出する。

３次元での観測系から観測した粒子系の速度の方向を極座標の定義と同じにする。これとは別に，座標軸の回転方向の正を反時計回りとする。



極座標（球面座標）

一般的な座標軸回転の変換行列（回転行列と略す）

x 軸の回転行列　　y 軸の回転行列　　z 軸の回転行列

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ブースト方向を極座標の定義の方向に回転するには，y 軸を正方向に $\dfrac{\pi}{2}-\theta$，z 軸を負方向に φ だけ回転させる。ベクトルを回転させるのではなく座標軸を回転させることに注意する（回転行列に影響する）。回転後の座標軸を，$\bar{x}$ 軸，$\bar{y}$ 軸，$\bar{z}$ 軸とする。

y 軸の回転行列は,

$$R_y=\begin{pmatrix}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)&0&\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\\0&1&0\\-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)&0&\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta&0&\cos\theta\\0&1&0\\-\cos\theta&0&\sin\theta\end{pmatrix}$$

z 軸の回転行列は,

$$R_z=\begin{pmatrix}\cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) & 0\\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

回転行列の合成は,

$$R=\begin{pmatrix}\sin\theta & 0 & \cos\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\cos\theta & 0 & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ -\cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta_x}{\beta} & \dfrac{\beta_y}{\beta} & \dfrac{\beta_z}{\beta}\\ -\dfrac{\beta_y}{\beta_{xy}} & \dfrac{\beta_x}{\beta_{xy}} & 0\\ -\dfrac{\beta_x\beta_z}{\beta\beta_{xy}} & -\dfrac{\beta_y\beta_z}{\beta\beta_{xy}} & \dfrac{\beta_{xy}}{\beta}\end{pmatrix}$$

where　$\cos\theta=\dfrac{\beta_z}{\beta}$, $\sin\theta=\dfrac{\beta_{xy}}{\beta}$, $\cos\varphi=\dfrac{\beta_x}{\beta_{xy}}$, $\cos\varphi=\dfrac{\beta_y}{\beta_{xy}}$

$$\beta=\sqrt{{\beta_x}^2+{\beta_y}^2+{\beta_z}^2},\quad \beta_{xy}=\sqrt{{\beta_x}^2+{\beta_y}^2}$$

速度の回転後の座標を求めておく。

$$\begin{pmatrix}\beta_x\\ \beta_y\\ \beta_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ -\cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\sin\theta\cos\varphi\\ \beta\sin\theta\sin\varphi\\ \beta\cos\theta\end{pmatrix}$$

ローレンツ変換行列を座標軸回転すれば,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R_z\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R_y\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}x\text{軸ブーストの}\\ \text{ローレンツ変換行列}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R_z\end{pmatrix}$$

ここでは，回転行列の合成を先に計算してからいちどに回転させる。

任意の方向のローレンツ変換行列は,

$$\mathrm{L}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\text{x軸ブーストの}\\ \text{ローレンツ変換行列}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\beta_x}{\beta} & \dfrac{\beta_y}{\beta} & \dfrac{\beta_z}{\beta}\\ 0 & -\dfrac{\beta_y}{\beta_{xy}} & \dfrac{\beta_x}{\beta_{xy}} & 0\\ 0 & -\dfrac{\beta_x\beta_z}{\beta\beta_{xy}} & -\dfrac{\beta_y\beta_z}{\beta\beta_{xy}} & \dfrac{\beta_{xy}}{\beta}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\beta_x}{\beta} & \dfrac{\beta_y}{\beta} & \dfrac{\beta_z}{\beta}\\ 0 & -\dfrac{\beta_y}{\beta_{xy}} & \dfrac{\beta_x}{\beta_{xy}} & 0\\ 0 & -\dfrac{\beta_x\beta_z}{\beta\beta_{xy}} & -\dfrac{\beta_y\beta_z}{\beta\beta_{xy}} & \dfrac{\beta_{xy}}{\beta}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z\\ -\gamma\beta_x & 1+A\beta_x\beta_x & A\beta_x\beta_y & A\beta_x\beta_z\\ -\gamma\beta_y & A\beta_y\beta_x & 1+A\beta_y\beta_y & A\beta_y\beta_z\\ -\gamma\beta_z & A\beta_z\beta_x & A\beta_z\beta_y & 1+A\beta_z\beta_z\end{pmatrix}$$

where　$v_x=c\beta_x$, $v_y=c\beta_y$, $v_z=c\beta_z$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}}=\frac{1}{\sqrt{1-({\beta_x}^2+{\beta_y}^2+{\beta_z}^2)}}$$

$$A=\frac{\gamma-1}{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}$$

ローレンツ変換の一般式は,

$$\begin{pmatrix}c\bar{t}\\ \bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z\\ -\gamma\beta_x & 1+A\beta_x\beta_x & A\beta_x\beta_y & A\beta_x\beta_z\\ -\gamma\beta_y & A\beta_y\beta_x & 1+A\beta_y\beta_y & A\beta_y\beta_z\\ -\gamma\beta_z & A\beta_z\beta_x & A\beta_z\beta_y & 1+A\beta_z\beta_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ct\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

書き下すと,

$$c\bar{t}=\gamma ct-\gamma(\beta_x x+\beta_y y+\beta_z z)$$

$$\bar{x}=x+(-\gamma ct+A(\beta_x x+\beta_y y+\beta_z z))\beta_x$$

$$\bar{y}=y+(-\gamma ct+A(\beta_x x+\beta_y y+\beta_z z))\beta_y$$

$$\bar{z}=z+(-\gamma ct+A(\beta_x x+\beta_y y+\beta_z z))\beta_z$$

位置座標をベクトルにする。

$$\bar{\mathbf{x}}\to(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}),\quad \mathbf{x}\to(x,\ y,\ z)$$

$$c\bar{t}=\gamma ct-\gamma\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}$$

$$\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}-\gamma ct\boldsymbol{\beta}+A(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　$\boldsymbol{v}$ は３次元空間ベクトルである（シュッツ著では，太文字で書き，$\vec{v}$ とは書かない）．３元速度を，

$$\boldsymbol{v} \to (v_x, v_y, v_z)$$

として，ローレンツ逆変換の一般式は，

$$\begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \gamma\beta_z \\ \gamma\beta_x & 1+A\beta_x\beta_x & A\beta_x\beta_y & A\beta_x\beta_z \\ \gamma\beta_y & A\beta_y\beta_x & 1+A\beta_y\beta_y & A\beta_y\beta_z \\ \gamma\beta_z & A\beta_z\beta_x & A\beta_z\beta_y & 1+A\beta_z\beta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ c\gamma\beta_x \\ c\gamma\beta_y \\ c\gamma\beta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \\ c\gamma\,\boldsymbol{\beta} \\ \\ \end{pmatrix}$$

where　$v_x = c\beta_x$，$v_y = c\beta_y$，$v_z = c\beta_z$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}} = \frac{1}{\sqrt{1-({\beta_x}^2+{\beta_y}^2+{\beta_z}^2)}}$$

$$A = \frac{\gamma-1}{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　$\beta_x = \dfrac{U^1}{U^0}$，$\beta_y = \dfrac{U^2}{U^0}$，$\beta_z = \dfrac{U^3}{U^0}$

$v_x = c\beta_x$，$v_y = c\beta_y$，$v_z = c\beta_z$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　$\beta_x = \dfrac{1}{2}$，$\beta_y = \dfrac{1}{2}$，$\beta_z = \dfrac{1}{2}$

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta} = 0.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2 = 0.75$$

$$|\boldsymbol{\beta}| = \sqrt{0.75} = 0.866$$

$$v_x = \frac{1}{2}c，\ v_y = \frac{1}{2}c，\ v_z = \frac{1}{2}c$$

()

16　もとの系に対する速度が W である粒子の４元速度に速度 v のローレンツ変換を施して，アインシュタインの速度の合成則を導け．

観測系を O，もとの系を $\overline{O}$，粒子系を $\overline{\overline{O}}$ とする．観測系 O に対するもとの系 $\overline{O}$ の速度が v とする．もとの系 $\overline{O}$ に対する粒子 $\overline{\overline{O}}$ の速度が W とする．

$$\beta = \frac{v}{c} < 1，\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$$

$$\beta' = \frac{W}{c} < 1，\ \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}} > 1$$

系 $\overline{O}$ における粒子 $\overline{\overline{O}}$ の４元速度は，逆変換して，

$$(c\gamma', \gamma' W, 0, 0) = (c\gamma', c\gamma'\beta', 0, 0)$$

であるから，系 O における粒子の４元速度は，もう一度逆変換して，

$$\begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma' \\ c\gamma'\beta' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c\gamma\gamma' + c\gamma\gamma'\beta\beta' \\ c\gamma\gamma'\beta + c\gamma\gamma'\beta' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c\gamma\gamma' \begin{pmatrix} 1+\beta\beta' \\ \beta+\beta' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

系 O における粒子 $\overline{\overline{O}}$ の速度 W' は，

$$\frac{W'}{c} = \frac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'} \tag{1.13}$$

$$W' = \frac{v+W}{1+\beta\beta'}$$

where　$\beta = \dfrac{v}{c} < 1$，$\beta' = \dfrac{W}{c} < 1$

v，W，W' は光速との比ではなく，m/s の単位をもつ．

()

17　(a)　$U^0>0$ で $\vec{U}\cdot\vec{U}=-c^2$ である時間的なベクトルはすべて，ある世界線の４元速度になっていることを示せ.

(b)　このことを使って，いかなる時間的なベクトル $\vec{V}$ に対しても，$\vec{V}$ の空間成分がゼロとなるローレンツ系が存在することを示せ.

(a)　MCR 系（系 $\overline{O}$ ）の基底ベクトル $\vec{e}_{\overline{\alpha}}$ は,

◆ $$\vec{e}_{\overline{\alpha}}\cdot\vec{e}_{\overline{\beta}}=\eta_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}=diag(-1,1,1,1) \tag{2.27}$$

$\eta_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}$ はメトリックテンソルである.

$$\vec{U}=c\vec{e}_{\overline{0}} \tag{2.21}$$

$$\vec{U}\cdot\vec{U}=(c\vec{e}_{\overline{0}})\cdot(c\vec{e}_{\overline{0}})=c^2\vec{e}_{\overline{0}}\cdot\vec{e}_{\overline{0}}=-c^2<0 \tag{2.28}$$

観測系（系 O）でも,

$$\vec{U}\cdot\vec{U}=\gamma^2(-c^2+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})=\gamma^2(-c^2+v^2)=-c^2\gamma^2(1-\beta^2)=-c^2<0$$

は変わらず，時間的なベクトルであり,

$$U^0=c\gamma>c>0$$

である．したがって,

$$\beta_x=\frac{U^1}{U^0},\quad \beta_y=\frac{U^2}{U^0},\quad \beta_z=\frac{U^3}{U^0}$$

$$\text{where}\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}}=\frac{1}{\sqrt{1-(\beta_x{}^2+\beta_y{}^2+\beta_z{}^2)}}$$

となる３元速度が常に存在する.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　$\vec{V}$ に平行な $\vec{U}$ を仮定し，$\vec{U}=c\vec{e}_{\overline{0}}$ となる系 $\overline{O}$ を見つければ，$\vec{V}$，$\vec{U}$ の空間成分は０になる.

2015.06.25
2　特殊相対論におけるベクトル解析　2.9　練習問題

()

18　(a)　二つの直交した空間的ベクトルの和は空間的であることを示せ.

(b)　時間的ベクトルとヌルベクトルは直交できないことを示せ.

(a)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は空間的であるから,

$$\vec{a}\cdot\vec{a}>0,\quad \vec{b}\cdot\vec{b}>0,$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交しているから,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}>0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　時間的ベクトルの座標系を選んで，$\vec{a}\to(a,0,0,0)$ とする．典型的なヌルベクトルを選んで，$\vec{b}\to(b,b,0,0)$ とする.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-ab\neq 0$（直交できない）

【解説】４元ベクトルの整理

系$\overline{O}$は系Oのx軸の正の方向に動いているものとする．

MCR 系（系$\overline{O}$）での４元速度，４元加速度は，

◇　$\vec{U} \xrightarrow[O]{} (c,0,0,0)$

◇　$\vec{A} \xrightarrow[O]{} (0,a,0,0)$

where　$\vec{A}\cdot\vec{A} = a^2 = \text{Const.}$（一様加速度運動）

観測系（系O）での４元速度は，練習問題 15 から，ローレンツの逆変換から求められる．

◇　$\vec{U} \xrightarrow[O]{} (c\gamma, c\gamma\beta, 0, 0) = (c\gamma, \gamma v, 0, 0)$

４元速度の定義からも上式が導出できる．（τ：固有時間）

$$U^0 = \frac{cdt}{d\tau} = c\gamma\,,\ \text{where}\quad \frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

$$U^1 = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx}{dt} = \gamma v = c\gamma\beta\,,$$

【ポイント】テンソル表記では，$ct \to x^0$，$x \to x^1$，$y \to x^2$，$z \to x^3$であるが，ここでは，適宜使い分ける．

観測系（系O）での４元加速度は，定義から，

$$A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c\gamma \\ \gamma v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{where}\quad \frac{d}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt}$$

４元加速度は，

$$\vec{A} \xrightarrow[O]{} \left(c\gamma\frac{d\gamma}{dt}, \gamma\frac{d}{dt}(\gamma v), 0, 0\right)$$

一方，ローレンツの逆変換から，

$$A^\mu = \Lambda^\mu{}_{\bar{\nu}} A^{\bar{\nu}} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\beta a \\ \gamma a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これから，x軸では，

$$\gamma\frac{d}{dt}(\gamma v) = \gamma a\,,$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma v) = a$$

また，力学的には，相対論的な運動方程式を次のように書く．

$$ma^\mu = m\frac{dU^\mu}{d\tau} = m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu$$

m：静止質量，U^μ：４元速度，a^μ：４元加速度，

F^μ：４元力（Minkowski 力），f^μ：Newton 力

$$d\tau = \sqrt{1-\beta^2}\,dt = \frac{dt}{\gamma},\quad \frac{d}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt},\quad F^\mu = \gamma f^\mu$$

であるから，

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(m\gamma\frac{dx^\mu}{dt}\right) = F^\mu = \gamma f^\mu$$

または

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(\gamma\frac{dx^\mu}{dt}\right) = \frac{F^\mu}{m} = \gamma\frac{f^\mu}{m},\quad \frac{d}{d\tau}\left(\gamma\frac{dx^\mu}{dt}\right) = \gamma\frac{f^\mu}{m}$$

これから，x軸では，

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(\gamma\frac{dx^1}{dt}\right) = \gamma\frac{f^1}{m} = \gamma a$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma v) = a$$

異なる方法で，同じ結果が得られた．問題から，$a = Const.$なので，

$$\gamma v = c\gamma\beta = at\,,\quad \gamma\beta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{at}{c}$$

これから，一様加速度運動において，時間t後の速度βは，

◇　$$\beta=\frac{\frac{at}{c}}{\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}}=\left(1+\left(\frac{c}{at}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cong 1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{at}\right)^2=1-\varepsilon$$

where　$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{at}\right)^2\cong 0$，$1-\varepsilon\cong 1$

$\beta\to 1$で誤差が大きくなり，近似式の方が誤差が小さくなる．

一様加速度運動において，時間t後の距離xは，

$$x=\int_0^t vdt=\int_0^t \beta cdt=\int_0^t \frac{\frac{at}{c}}{\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}}cdt=c\left[\frac{\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}}{\frac{at}{c}}\right]_0^t$$

$$x=\frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}-1\right),\quad ct=\sqrt{x^2+\frac{2c^2x}{a}}$$

もとに戻って，相対論的な運動方程式から，

$$\frac{d}{d\tau}(\gamma v)=\frac{d}{d\tau}(c\gamma\beta)=\gamma a$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{a}{c}$$

$$\text{左辺}=\frac{d\beta}{d\tau}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$=\frac{d\beta}{d\tau}((1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}+\beta(-\frac{1}{2})(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}}(-2\beta))$$

$$=\frac{d\beta}{d\tau}((1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}+\beta^2(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}})=\frac{d\beta}{d\tau}\gamma^3$$

$$\frac{d\beta}{d\tau}\gamma^2=\frac{a}{c}$$

これから，一様加速度運動において，固有時間τ後の速度βは，

$$\tau=\int_0^\tau d\tau=\frac{c}{a}\int_0^\beta \gamma^2 d\beta=\frac{c}{a}\int_0^\beta \frac{1}{1-\beta^2}d\beta=\frac{c}{a}\tanh^{-1}\beta$$

$$\tau=\frac{c}{a}\tanh^{-1}\beta$$

$$\tau\cong\frac{c}{a}\tanh^{-1}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{at}\right)^2\right)=\frac{c}{a}\tanh^{-1}(1-\varepsilon)=\frac{c}{2a}\ln\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\cong\frac{c}{2a}\ln\frac{2}{\varepsilon}$$

$$\tau\cong\frac{c}{2a}\ln\frac{2}{\varepsilon}=\frac{c}{2a}\ln 4\left(\frac{at}{c}\right)^2,$$

where　$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{at}\right)^2\cong 0$，$1-\varepsilon\cong 1$

$$\beta=\tanh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

【参考】

$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1-\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\equiv 1-\varepsilon$$

$$\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\equiv\varepsilon$$

$$e^{2x}=\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$2x=\ln\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$x=\tanh^{-1}(1-\varepsilon)=\frac{1}{2}\ln\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$$

()

19　加速度４元ベクトル$\vec{a}$が一定の空間的方向と大きさ（たとえば，$\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2\geq 0$）をもつとき，物体は一様に加速されているという．

(a)　このことは，物体の MCR 系では$\vec{a}$が常に同じ成分をもつことを意味しており，またその成分はガリレイ的な意味での“加速度”であることを示せ．（これは，ロケットのエンジンが一定加速度を与えるというような物理的な状況に対応している．）

(b)　物体が地球重力の加速度$a=1\mathrm{g}=10\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$で一様に加速されているとしよう．物体は最初静止していたとすると，時間t後の速度を求めよ．（正しい単位を使うこと．）この時間の間にどれだけ動いたか？$v=0.999c$となるまでにはどれだけ時間がかかるか？

(c)　(b)で経過した固有時間をtの関数として求めよ．（$d\tau$を世界線に沿って積分せよ．）$v=0.999c$となるまでに経過した固有時間はいくらか？(b)のように加速された人は地球から銀河中心まで運動したときどれだけ年をとるか？地球から銀河中心までの距離は$2\times10^{20}\mathrm{m}$である．

【ポイント】一様加速度運動の公式の導出は，問題 19 の前に解説した「４元ベクトルの整理」を参照のこと．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(a)　MCR 系では，Newton の運動方程式が成り立っている．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　一様加速度運動において，時間t後の速度βと距離xは，

◇ $$\beta=\frac{\frac{at}{c}}{\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}}=\left(1+\left(\frac{c}{at}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}},\quad x=\frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}-1\right)$$

$v=0.999c$となる時間tを逆算して，それから距離xを求める．

◇ $$t=\frac{c}{a}\gamma\beta$$

$$=\frac{3\times10^8}{10}\frac{0.999}{\sqrt{1-0.999^2}}=6.7\times10^8\mathrm{s}=21.2\ \mathrm{year}$$

$$x=\frac{(3\times10^8)^2}{10}\left(\sqrt{1+\left(\frac{10\times6.7\times10^8}{3\times10^8}\right)^2}-1\right)$$

$$=1.92\times10^{17}\mathrm{m}=20.3\ \mathrm{lightyear}$$

where　$1\ \mathrm{year}=365.24\times24\times3600\mathrm{s}=3.16\times10^7\mathrm{s}$

$1\ \mathrm{lightyear}=3\times10^8\mathrm{ms}^{-1}\times3.16\times10^7\mathrm{s}=9.46\times10^{15}\mathrm{m}$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　一様加速度運動において，時間t後の固有時間τは，（先に，問題(b)で，時間t後の速度βを算出しておく．）

$$\tau=\frac{c}{a}\tanh^{-1}\beta,\quad \beta=\left(1+\left(\frac{c}{at}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$v=0.999c$となるまでに経過した固有時間は，

$$\tau=\frac{3\times10^8}{10}\tanh^{-1}0.999=1.14\times10^8\mathrm{s}=3.6\ \mathrm{year}$$

(c)の２つめの問題は，地球から銀河系中心までかかる時間tを距離xから逆算する．

$$ct=\sqrt{x^2+\frac{2c^2x}{a}}$$

$$=\sqrt{(2\times10^{20})^2+\frac{2(3\times10^8)^2 2\times10^{20}}{10}}=2\times10^{20}\mathrm{m(time)}$$

$$t=\frac{2\times10^{20}\mathrm{m}}{3\times10^8\mathrm{ms}^{-1}}=6.67\times10^{11}\mathrm{s}=2.1\times10^4\ \mathrm{year}$$

地球から銀河系中心までの距離$2\times10^{20}\mathrm{m}$は約２万光年であり，光速で移動しても２万年かかる距離であるが，固有時間つまりロケットの時計は驚くほど短いことが判る．

時間tで到達する速度βを求める．（$\beta\to1$で誤差が大きい）

◇　$$\beta = \left(1 + \left(\frac{c}{at}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 + \left(\frac{3\times 10^8}{10\times 6.67\times 10^{11}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1 + 2\times 10^{-9})^{-\frac{1}{2}} \cong 1 - 10^{-9} = 0.999999999$$ （9 の数が 9 個）

速度 β に達する固有時間 τ を求める．

◇　$$\tau = \frac{c}{a}\tanh^{-1}\beta$$

$$= \frac{3\times 10^8}{10}\tanh^{-1} 0.999999999 = 3.21\times 10^8\,\mathrm{s} = 10\ \mathrm{year}$$

この式では，$\beta \to 1$ で有効数字が足りなくなるおそれがある．

近似式では，

◇　$$\tau \cong \frac{c}{2a}\ln 4\left(\frac{at}{c}\right)^2$$

$$= \frac{3\times 10^8}{2\times 10}\ln\frac{4}{2\times 10^{-9}} = 3.21\times 10^8\,\mathrm{s} = 10\ \mathrm{year}$$

()

20　粒子の世界線がある系で，次の式で与えられる．

$$x(t) = at + b\sin\omega t\,,\quad y(t) = b\cos\omega t\,,\quad z(t) = 0\,,\quad |b\omega| < c$$

粒子の運動をしらべ，４元速度と４元加速度を計算せよ．

半径 b で回転しながら x 軸の正の方向へ速度 a でスライドしている．

最初にスライドを考慮しない等速円運動の問題として解く．円の中心を系 O の原点とする．

$$x(t) = b\sin\omega t\,,\quad y(t) = b\cos\omega t\,,\quad z(t) = 0\,,\quad |b\omega| < c$$

３元速度，３元加速度の定義から，

$$\frac{dx}{dt} = b\omega\cos\omega t\,,\quad \frac{dy}{dt} = -b\omega\sin\omega t\,,\quad \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -b\omega^2\sin\omega t\,,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -b\omega^2\cos\omega t\,,\quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

３元速度は，（$\boldsymbol{v}$ は３元ベクトル）

$$\boldsymbol{v} \to (b\omega\cos\omega t, -b\omega\sin\omega t, 0)$$

$|b\omega| = \mathrm{Const.} < c$ （接線速度を表している）

３元加速度は，（$\boldsymbol{\alpha}$ は３元ベクトル）

$$\boldsymbol{\alpha} \to (-b\omega^2\sin\omega t, -b\omega^2\cos\omega t, 0)$$

$|\boldsymbol{\alpha}| = |b\omega^2| = \mathrm{Const.}$（向心加速度を表している）

４元速度の定義から，

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{dt} = \gamma\frac{dx^\alpha}{dt}\,,$$

where　$$\beta^i = \frac{v^i}{c}\,,\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}} = \frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{\beta}|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{b\omega}{c}\right)^2}}$$

４元速度は，練習問題 15 から，（$\boldsymbol{v}$ は３元ベクトル）

$$\vec{U} \xrightarrow[O]{} (c\gamma, \gamma\boldsymbol{v}) = (c\gamma, \gamma b\omega\cos\omega t, -\gamma b\omega\sin\omega t, 0)$$

４元加速度は,

$$\vec{A} \xrightarrow[O]{} \gamma\left(c\frac{d\gamma}{dt},\ \frac{d}{dt}(\gamma\,\boldsymbol{v})\right)$$

であるが，一方，４元加速度の定義から,

$$A^{\alpha} = \frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\right) = \gamma\frac{d}{dt}\left(\gamma\frac{dx^{\alpha}}{dt}\right)$$

$$= \gamma\left(\frac{d\gamma}{dt}\frac{dx^{\alpha}}{dt} + \gamma\frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2}\right) \quad \text{where} \quad \frac{dx^0}{dt} = c, \quad \frac{d^2x^0}{dt^2} = 0$$

等速円運動では，$|\boldsymbol{\beta}|$とγは定数であるから,

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad \frac{dU^0}{dt} = 0$$

となり,

$$A^i = \gamma^2\frac{d^2x^i}{dt^2} = \gamma^2\frac{dU^i}{dt} = \gamma^2\alpha^i, \quad i = 1, 2, 3$$

４元加速度は，（$\boldsymbol{\alpha}$は３元ベクトル）

$$\vec{A} \xrightarrow[O]{} \gamma^2(0, \boldsymbol{\alpha}) = \gamma^2(0, -b\omega^2\sin\omega t, -b\omega^2\cos\omega t, 0)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

元の問題に戻る.

$$x(t) = at + b\sin\omega t, \quad y(t) = b\cos\omega t, \quad z(t) = 0, \quad |b\omega| < c$$

半径bで回転しながらx軸の正の方向へ速度aでスライドしている.

３元速度は，（$\boldsymbol{v}$は３元ベクトル）

$$\boldsymbol{v} \to (a + b\omega\cos\omega t, -b\omega\sin\omega t, 0)$$

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{a^2 + b^2\omega^2 + 2ab\omega\cos\omega t}$$

３元加速度は，（$\boldsymbol{\alpha}$は３元ベクトル）

$$\boldsymbol{\alpha} \to (-b\omega^2\sin\omega t, -b\omega^2\cos\omega t, 0)$$

４元速度は,

$$\vec{U} \to (c\gamma, \gamma\,\boldsymbol{v}) = (c\gamma, \gamma a + \gamma b\omega\cos\omega t, -\gamma b\omega\sin\omega t, 0)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}$$

４元加速度は，（$\boldsymbol{\alpha}$は３元ベクトル）

$$\vec{A} = \gamma\left(c\frac{d\gamma}{dt},\ \frac{d}{dt}(\gamma\,\boldsymbol{v})\right) = \left(c\frac{d\gamma}{dt},\ \frac{d\gamma}{dt}\boldsymbol{v} + \gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)$$

$$= \gamma\left(c\frac{d\gamma}{dt},\ \frac{d\gamma}{dt}\boldsymbol{v} + \gamma\,\boldsymbol{\alpha}\right)$$

$|\boldsymbol{\beta}|$とγは定数でないので，$\beta = |\boldsymbol{\beta}|, v = |\boldsymbol{v}|$として,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = (-\frac{1}{2})(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}}(-2\beta)\frac{d\beta}{dt} = \gamma^3\beta\frac{d\beta}{dt} = \gamma^3\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}$$

$$\vec{A} = \gamma\left(c\gamma^3\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}, \gamma^3\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}\boldsymbol{v} + \gamma\,\boldsymbol{\alpha}\right)$$

$$\text{where} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{-ab\omega^2\sin\omega t}{v}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

合成により解く.

観測系を系O'とする．系Oは系O'のx軸の正の方向に速度aで運動している.

$$\frac{a}{c} = \sigma, \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} > 1$$

として，観測系での４元速度は,

$$\begin{pmatrix} U^{0'} \\ U^{1'} \\ U^{2'} \\ U^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & \gamma'\sigma & 0 & 0 \\ \gamma'\sigma & \gamma' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\gamma \\ c\gamma\beta_x \\ c\gamma\beta_y \\ c\gamma\beta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma\gamma' + c\gamma\gamma'\sigma\beta_x \\ c\gamma\gamma'\sigma + c\gamma\gamma'\beta_x \\ c\gamma\beta_y \\ c\gamma\beta_z \end{pmatrix}$$

x軸の３元速度は,

$$v'_x = \frac{\sigma + \beta_x}{1 + \sigma\beta_x}$$

観測系での４元加速度は，（書き下すと式が簡単になるかもしれないが略）

$$\begin{pmatrix} A^{0'} \\ A^{1'} \\ A^{2'} \\ A^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & \gamma'\sigma & 0 & 0 \\ \gamma'\sigma & \gamma' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma^2\alpha_x \\ \gamma^2\alpha_y \\ \gamma^2\alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2\gamma'\sigma\alpha_x \\ \gamma^2\gamma'\alpha_x \\ \gamma^2\alpha_y \\ \gamma^2\alpha_z \end{pmatrix}$$

()

21　粒子の世界線があるローレンツ系で，次のようにパラメーター表示されている．

$$ct(\tau)=\frac{c^2}{a}\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right),\quad x(\tau)=\frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

ここでτはパラメーターでaは定数である．粒子の運動をしらべ，４元速度と４元加速度を計算せよ．τは世界線に沿った固有時間であり，加速度は一様であることを示せ．aの意味を説明せよ．

【ポイント】この問題は，練習問題 19 の一般化になっている．

一様加速度の運動の条件は，

・４元加速度の空間成分の方向が一定．

・４元加速度の大きさが一定．すなわち，$\vec{A}\cdot\vec{A}=a^2=\text{Const.}$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

$$x^0=ct(\tau)=\frac{c^2}{a}\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

$$x^1=x(\tau)=\frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

４元速度は，

$$U^0=\frac{dx^0}{d\tau}=\frac{cdt}{d\tau}=c\cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

$$U^1=\frac{dx^1}{d\tau}=\frac{dx}{d\tau}=c\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

４元加速度は，

$$A^0=\frac{dU^0}{d\tau}=\frac{cd^2t}{d\tau^2}=a\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

$$A^1=\frac{dU^1}{d\tau}=\frac{d^2x}{d\tau^2}=a\cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

４元速度，４元加速度の大きさが，条件どおりか確かめる．

$$\vec{U}\cdot\vec{U}=-(U^0)^2+(U^1)^2=-c^2\cosh^2(\ )+c^2\sinh^2(\ )=-c^2$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=-(A^0)^2+(A^1)^2=-a^2\sinh^2(\ )+a^2\cosh^2(\ )=a^2$$

４元速度と４元加速度は直交するから，

$$\vec{A}\cdot\vec{U}=-A^0U^0+A^1U^1=0$$

$$\frac{U^1}{U^0}=\frac{A^0}{A^1}=\tanh\left(\frac{a\tau}{c}\right)=\beta\neq\text{Const.}$$

この３元速度はcとの比になっている．

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\left(\frac{a\tau}{c}\right)}}=\cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

$$\gamma\beta=\cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right)\cdot\tanh\left(\frac{a\tau}{c}\right)=\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

MCR 系（系$\bar{O}$）での４元速度は，

$$U^{\bar{\mu}}=\begin{pmatrix}U^{\bar{0}}\\U^{\bar{1}}\\U^{\bar{2}}\\U^{\bar{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma\beta&0&0\\-\gamma\beta&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\cosh(\ )\\c\sinh(\ )\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$U^{\bar{0}}=\left(\gamma c\cosh(\ )-c\gamma\beta\sinh(\ )\right)=c\left(\cosh^2(\ )-\sinh^2(\ )\right)=c$$

$$U^{\bar{1}}=\left(-c\gamma\beta\cosh(\ )+c\gamma\sinh(\ )\right)$$

$$=c\left(-\sinh(\ )\cdot\cosh(\ )+\cosh(\ )\cdot\sinh(\ )\right)=0$$

MCR 系（系$\bar{O}$）での４元加速度は，

$$A^{\bar{\mu}}=\begin{pmatrix}A^{\bar{0}}\\A^{\bar{1}}\\A^{\bar{2}}\\A^{\bar{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma\beta&0&0\\-\gamma\beta&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\sinh(\ )\\a\cosh(\ )\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$A^{\bar{0}}=\gamma a\sinh(\ )-\gamma\beta a\cosh(\ )=0$$

$$A^{\bar{1}}=-\gamma\beta a\sinh(\ )+\gamma a\cosh(\ )=a$$

()

22　(a)　４元運動量の成分が $(4, 1, 1, 0)\mathrm{kg}\times c$ である粒子のエネルギー，静止質量，３元速度を求めよう．

(b)　４元運動量が

$$p_1 \xrightarrow[O]{} (3, -1, 0, 0)\mathrm{kg}\times c\,,\quad p_2 \xrightarrow[O]{} (2, 1, 1, 0)\mathrm{kg}\times c$$

である二つの粒子が衝突して，その二つの粒子が壊れて，新たに三つの粒子が生成された．そのうちの二つの粒子の４元運動量は，

$$p_3 \xrightarrow[O]{} (1, 1, 0, 0)\mathrm{kg}\times c\,,\quad p_4 \xrightarrow[O]{} (1, -\frac{1}{2}, 0, 0)\mathrm{kg}\times c$$

であった．第三番目の粒子の４元運動量，エネルギー，静止質量，３元速度を求めよ．CM 系での３元速度も求めよ．

【ポイント】自然単位では，４元運動量のすべての成分の単位が kg である．静止系での４元運動量の第１成分が静止質量である．
SI 単位では，自然単位でのすべての成分に光速 c を乗する．さらに，全エネルギーは第１成分に光速 c を乗する．つまり， $E = cp^0$ である．これは，静止系では，静止質量をエネルギーの単位に換算した $E = mc^2$ となる．
＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋
(a)　$\beta^1 = \beta_x$， $\beta^2 = \beta_y$， $\beta^3 = \beta_z$ を適当に使い分ける．

４元運動量は，練習問題 15(b)から，

◇
$$\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \gamma\beta_z \\ \gamma\beta_x & & & \\ \gamma\beta_y & & & \\ \gamma\beta_z & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\beta_x \\ \gamma\beta_y \\ \gamma\beta_z \end{pmatrix}$$

$$\text{where}\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}} = \frac{1}{\sqrt{1-({\beta_x}^2+{\beta_y}^2+{\beta_z}^2)}}$$

３元速度は，（$\boldsymbol{\beta}$ は３元ベクトル）

$$\beta^1 = \frac{p^1}{p^0} = \frac{1}{4}\,,\quad \beta^2 = \frac{p^2}{p^0} = \frac{1}{4}\,,\quad \beta^3 = \frac{p^3}{p^0} = 0$$

$$\boldsymbol{\beta} \to (0.25, 0.25, 0)$$

$$|\boldsymbol{\beta}| = \sqrt{{\beta_x}^2+{\beta_y}^2+{\beta_z}^2} = \sqrt{0.25^2+0.25^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.35$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = 1.069$$

静止質量は，

$$m = \frac{p^0}{c\gamma} = \frac{4\mathrm{kg}}{\gamma} = 3.74\mathrm{kg}$$

全エネルギーは，

$$E = cp^0 = 4\mathrm{kg}\times c^2 = 3.6\times10^{17}\,\mathrm{J}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　粒子の衝突の前後で，

$$\sum_a (p_a)^\mu = \mathrm{Const.}$$

だから，

$$p_5 \xrightarrow[O]{} (3, -\frac{1}{2}, 1, 0)\mathrm{kg}\times c$$

３元速度は，

$$\beta^1 = \frac{p^1}{p^0} = -\frac{1}{6}\,,\quad \beta^2 = \frac{p^2}{p^0} = \frac{1}{3}\,,\quad \beta^3 = \frac{p^3}{p^0} = 0$$

$$\beta \to (-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0)$$

$$|\boldsymbol{\beta}| = \sqrt{{\beta_x}^2+{\beta_y}^2+{\beta_z}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{6} = 0.37$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2}} = \frac{6}{\sqrt{31}} = 1.078$$

静止質量は,

$$m = \frac{p^0}{c\gamma} = \frac{3\text{kg}}{\gamma} = 2.78\text{kg}$$

全エネルギーは,

$$E = cp^0 = 3\text{kg} \times c^2 = 2.7 \times 10^{17}\ \text{J}$$

衝突前の 4 元運動量のトータルは,

$$\sum_{1,2} p^0 = 5 \times c\,,\quad \sum_{1,2} p^1 = 0\,,\quad \sum_{1,2} p^2 = 1 \times c\,,\quad \sum_{1,2} p^3 = 0$$

CM 系自身の 3 元速度は,

$$\beta_{CM} \to (0, \frac{1}{5}, 0)$$

()

23　静止質量 m の粒子が 3 元速度 v をもっている．速度の 4 次のオーダーまで正しくエネルギーを求めよ．速度がいくらになったとき，4 次の項の絶対値 $\mathrm{O}(|\boldsymbol{v}|^4)$ が運動エネルギー $m|\boldsymbol{v}|^2/2$ の半分に等しくなるか？

エネルギーは，テイラー展開を使って，

◇

$$\begin{aligned} E &= cp^0 = mc^2\gamma = mc^2(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \cdots\right) \\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \cdots \end{aligned}$$

$$\text{where}\quad \beta = \frac{v}{c} < 1$$

問題から,

$$0(|\boldsymbol{v}|^4) = \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}mv^2$$

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{2}{3}$$

この速度で 4 次の項を無視すると，運動エネルギーの誤差が半分になるということである．ニュートンの運動方程式が成り立つのは，速度 β がもっとずっと小さいときである．

（）

24　電子と陽電子が消滅して，１個の光子（γ 線）をつくることは禁止されることを４元運動量の保存則から示せ．２個の光子を生成することは禁止されないことも示せ．

【ポイント】SI 単位での第１成分は，全エネルギーを光速 c で除したものである．つまり，$p^0 = E/c$ である．

光子の世界線はヌルであるから，$(\Delta s)^2 = 0$ である．もし，第３成分，第４成分がゼロならば，｜第１成分｜=｜第２成分｜でなければならない．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

例えば，

$$e^- \text{の } p \xrightarrow[CM]{} (E/c,\ p,\ 0,\ 0)$$

$$e^+ \text{の } p \xrightarrow[CM]{} (E/c,\ -p,\ 0,\ 0)$$

とすると，

$$\gamma \text{線の } p \xrightarrow[CM]{} (E/c + E/c,\ 0,\ 0,\ 0)$$

となるのでこれはつくれない．２つの γ 線の

$$p \xrightarrow[CM]{} (E/c,\ p,\ 0,\ 0),\quad p \xrightarrow[CM]{} (E/c,\ -p,\ 0,\ 0)$$

ならつくれる．

（2.35）～（2.42）

25　(a)　系 $\bar{O}$ が系 O に対して x 軸方向に速度 v で動いているとしよう．系 O での光子は，振動数が ν で系 O の x 軸に対して角度 θ で運動しているとする．系 $\bar{O}$ ではその振動数は，

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu} = \frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (2.42)$$

となることを示せ．

(b)　光子の運動が x 軸に垂直であっても（$\theta = \pi/2$）振動数の変化がある．これを横ドップラー偏移といい，時間ののびのために起こる．系 O と系 $\bar{O}$ の間にドップラー偏移がないためには，光子はいかなる角度 θ で運動すればよいか？

(c)　式（2.35）と式（2.38）を使って，式（2.42）を計算せよ．

$$-\vec{p}\cdot\vec{U}_{\text{obs}} = \bar{E} \qquad (2.35)$$

$$E = h\nu \qquad (2.38)$$

(a)　光源系を系 O とし，観測系を系 $\bar{O}$ とする．

$$E = h\nu$$

$$\vec{p} \xrightarrow[O]{} (h\nu,\ h\nu\cos\theta,\ h\nu\sin\theta,\ 0)$$

光子の４元運動量の大きさはどの系でも０になる．光子の静止系はない．

系 O から系 $\bar{O}$ へ変換する．

$$\begin{pmatrix} p^{\bar{0}} \\ p^{\bar{1}} \\ p^{\bar{2}} \\ p^{\bar{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{c} \begin{pmatrix} h\nu \\ h\nu\cos\theta \\ h\nu\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{c} \begin{pmatrix} h\nu\gamma - h\nu\gamma\beta\cos\theta \\ h\nu\gamma - h\nu\gamma\beta\cos\theta \\ h\nu\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{E} = cp^{\bar{0}} = h\nu\gamma - h\nu\gamma\beta\cos\theta = h\nu\gamma(1-\beta\cos\theta) = h\bar{\nu}$$

ドップラー偏移の式は,

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu} = \gamma(1-\beta\cos\theta) = \frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.42)$$

$\theta = 0$ のとき，光源から遠ざかり，赤方偏移という．（周波数は短くなり，波長は長くなる．）

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (2.39)$$

$\theta = \pi$ のとき，光源に近づき，青方偏移という．（周波数は長くなり，波長は短くなる．）

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$\theta = \pi/2$ のときでも，横ドップラー偏移は現れる．

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu} = \gamma$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　横ドップラー偏移が現れないようにするためには,

$\bar{\nu}$ と ν を等しくする．

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu} = \gamma(1-\beta\cos\theta) = 1$$

$$\cos\theta = \frac{\gamma-1}{\gamma\beta}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　光源系を系 O とし，観測系を系 $\bar{O}$ とする．

$$\vec{p} \xrightarrow[O]{} \frac{1}{c}(h\nu, h\nu\cos\theta, h\nu\sin\theta, 0)$$

$$\vec{U}_{obs} \xrightarrow[O]{} c(\gamma, \gamma\beta, 0, 0)$$

$$-\vec{p}\cdot\vec{U}_{obs} = \bar{E} \quad (2.35)$$

これから,

$$\gamma h\nu - \gamma\beta h\nu\cos\theta = \bar{E} = h\bar{\nu}$$

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu} = \frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.42)$$

()

26　静止質量mの粒子を速度vから$v+\delta v(\delta v << v)$へ加速するのに必要なエネルギーを$\delta v$の1次まで計算せよ．粒子を光速まで加速するには無限のエネルギーが必要であることを示せ.

運動エネルギーの増加分は,

$$\frac{1}{2}m(v+\delta v)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mv\delta v + \frac{1}{2}m\delta v^2$$

$$\frac{1}{2}m(v+\delta v)^2 - \frac{1}{2}mv^2 \cong mv\delta v$$

変換式のパラメーターは,

$$\beta = \frac{v}{c} < 1,\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$$

$\beta \to 1$で$\gamma \to \infty$となってしまう.

()

27　質量10kgの二つの同一の物体が同じ温度に保たれて静止している．その一方に100Jの熱量を加える．両方の物体に同じ力を加えたとき，どちらが加速されやすいか？また加速度の違いはいくらか？

熱量を静止質量に換算する.

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{100\mathrm{J}}{(3\times10^8\,\mathrm{m/s})^2} = 1.1\times10^{-15}\,\mathrm{kg}$$

わずかに影響する.

（2.26）

28　$\vec{A}\xrightarrow[O]{}(5, 1, -1, 0)$，$\vec{B}\xrightarrow[O]{}(-2, 3, 1, 6)$，$\vec{C}\xrightarrow[O]{}(2, -2, 0, 0)$ とする．系 $\bar{O}$ が系 O に対して空間軸は系 O に平行に保って，x 軸の正の方向に速度 $v = 0.6c$ で運動しているとする．

(a)　系 $\bar{O}$ での $\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$ の成分を求めよ．

(b)　系 $\bar{O}$ での成分を使って，スカラー積 $\vec{A}\cdot\vec{B}$，$\vec{B}\cdot\vec{C}$，$\vec{A}\cdot\vec{C}$，$\vec{C}\cdot\vec{C}$ を求めよ．また，その値が系によらないことを示せ．

(c)　$\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$ が空間的か，時間的か，ヌル的かを述べよ．

(a)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}} = 1.26 \qquad \gamma\beta = 1.25\times 0.6 = 0.75$$

$$\vec{A}\xrightarrow[\bar{O}]{}\begin{pmatrix} 1.25 & -.75 & 0 & 0 \\ -.75 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5 \\ -2.5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}\xrightarrow[\bar{O}]{}\begin{pmatrix} 1.25 & -.75 & 0 & 0 \\ -.75 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.75 \\ 5.25 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C}\xrightarrow[\bar{O}]{}\begin{pmatrix} 1.25 & -.75 & 0 & 0 \\ -.75 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　スカラー積

◆　$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \eta_{\alpha\beta}A^{\alpha}B^{\beta} = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3 \qquad (2.26)$$

where　$\eta_{\alpha\beta} = diag(-1, 1, 1, 1)$

を便宜上次のように表記する．

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}(\eta)\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 12$$

$$\vec{B}\cdot\vec{C} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}(\eta)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}(\eta)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -12$$

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}(\eta)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \begin{pmatrix} 5.5 & -2.5 & -1 & 0 \end{pmatrix}(\eta)\begin{pmatrix} -4.75 \\ 5.25 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 12$$

$$\vec{B}\cdot\vec{C} = \begin{pmatrix} -4.75 & 5.25 & 1 & 6 \end{pmatrix}(\eta)\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = \begin{pmatrix} 5.5 & -2.5 & -1 & 0 \end{pmatrix}(\eta)\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -12$$

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}(\eta)\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}(\eta)\begin{pmatrix}5\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=-23 \quad \text{時間的}$$

$$\vec{B}\cdot\vec{B}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1 & 6\end{pmatrix}(\eta)\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\6\end{pmatrix}=42 \quad \text{空間的}$$

$$\vec{C}\cdot\vec{C}=0 \qquad \text{ヌル的}$$

()

29　成分表示を使用して，

◇ $$\frac{d}{d\tau}(\vec{U}\cdot\vec{U})=2\vec{U}\cdot\frac{d}{d\tau}(\vec{U})$$

を証明せよ．

スカラー積の定義から，

$$\text{左辺}=\frac{d}{d\tau}(-(U^0)^2+(U^1)^2+(U^2)^2+(U^3)^2)$$

$$=-2U^0\frac{dU^0}{d\tau}+2U^1\frac{dU^1}{d\tau}+2U^2\frac{dU^2}{d\tau}+2U^3\frac{dU^3}{d\tau}$$

＝右辺

（2.35）

30　ロケットの 4 元速度が $\vec{U} \underset{O}{\longrightarrow} (2,1,1,1)$ であるとする．このロケットと運動量が $\vec{p} \underset{O}{\longrightarrow} (300, 299, 0, 0) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \times c$ の高速宇宙線とが衝突した．次の二つの方法を使って，ロケットの乗員が観測する宇宙線のエネルギーを求めよ．

(a)　系 O からロケットの MCR 系へのローレンツ変換を求め，$\vec{p}$ の成分を変換する．

(b)　式（2.35）を使う．

(c)　どちらが便利か？それはなぜか？

$$\vec{E} = -\vec{p} \cdot \vec{U} \qquad (2.35)$$

(a)　ローレンツ変換の一般式を問題 15(b)から引用する。

３元速度を求めてから，ローレンツ変換をする．

$$\beta_x = \frac{U^1}{U^0} = 0.5,\quad \beta_y = \frac{U^2}{U^0} = 0.5,\quad \beta_z = \frac{U^3}{U^0} = 0.5$$

$$|\boldsymbol{\beta}| = \sqrt{\beta_x{}^2 + \beta_y{}^2 + \beta_z{}^2} = \sqrt{0.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2} = \sqrt{0.75}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.75}} = 2,\qquad \gamma\beta_x = \gamma\beta_y = \gamma\beta_z = 1$$

$$A = \frac{\gamma - 1}{\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}} = \frac{2 - 1}{0.75} = \frac{4}{3}$$

問題 15(b)では，粒子静止系で観測されるものを観測系で観測されるものに変換するが，ここでは，観測系で観測されるものからロケット系で観測されるものに変換するので，速度の符号が逆になる。

$$\vec{p} \underset{O}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + A\beta_x\beta_x & A\beta_x\beta_y & A\beta_x\beta_z \\ -\gamma\beta_y & A\beta_y\beta_x & 1 + A\beta_y\beta_y & A\beta_y\beta_z \\ -\gamma\beta_z & A\beta_z\beta_x & A\beta_z\beta_y & 1 + A\beta_z\beta_z \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} 300 \\ 299 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} 300 \\ 299 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

$$= c \begin{pmatrix} 301 \\ \frac{296}{3} \\ -\frac{601}{3} \\ -\frac{601}{3} \end{pmatrix} \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

エネルギーは，

$$E = cp^0 = 301 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot c^2$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　エネルギーだけを求める．

$$\vec{E} = -\vec{p} \cdot \vec{U}$$

$$= c(2 \quad 1 \quad 1 \quad 1)(-\eta)c \begin{pmatrix} 300 \\ 299 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times 10^{-27} = 301 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot c^2$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　エネルギーだけを求めるなら，(b)で十分．

【参考】

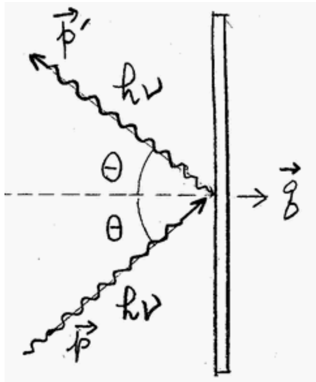
$$301 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot c^2 = 301 \times 10^{-27} \times (2.998 \times 10^8)^2 / 1.602 \times 10^{-19}$$

$$= 301 \times 10^{-27} \times 5.61 \times 10^{35} = 1.7 \times 10^{11}\,\mathrm{eV}$$

()

31　振動数νの光子が入射角θで鏡に入射し，振動数を変えることなく反射された．鏡に与えた運動量を計算せよ．もし光子が反射ではなく吸収されたとしたら，運動量の変化はいくらか？

入射角を図のようにする．



入射前の運動量は，

$$\vec{p} \to \frac{1}{c}(h\nu, h\nu\cos\theta, h\nu\sin\theta, 0)$$

反射後の運動量は，

$$\vec{p}' \to \frac{1}{c}(h\nu, -h\nu\cos\theta, h\nu\sin\theta, 0)$$

反射されたときの保存則は，

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{q}$$

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}' \to \frac{1}{c}(0, 2h\nu\cos\theta, 0, 0)$$

反射されたときの鏡の運動量は，

$$2\frac{h\nu}{c}\sin\theta$$

吸収されたときの保存則は，

$$\vec{p} = \vec{q}$$

$$\vec{q} = \vec{p} \to \frac{1}{c}(h\nu, h\nu\cos\theta, h\nu\sin\theta, 0)$$

吸収されたときの鏡の運動量は，

$$\frac{h\nu}{c}$$

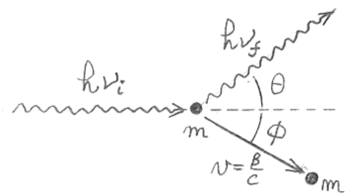
（）

32　実験室に静止している電荷e，静止質量mの粒子が振動数ν_iの光子を散乱する．これをコンプトン散乱という．散乱された光子は入射の方向とθの角をなして出て行く．４元運動量の保存則を使って，散乱された光子の運動量が

$$\frac{1}{\nu_f}=\frac{1}{\nu_i}+\frac{h}{mc^2}(1-\cos\theta) \tag{2.43}$$

で与えられることを示せ．

コンプトン散乱を図のようにする．



保存則は，

$$\vec{p}+\vec{q}=\vec{p}'+\vec{q}'$$

保存則を成分で書き下すと，

$$p^\mu+q^\mu=p'^\mu+q'^\mu$$

$$\vec{p}\to\frac{1}{c}(h\nu_i,\,h\nu_i,\,0,\,0)=\frac{1}{c}(E,\,E,\,0,\,0)$$

$$\vec{q}\to(mc,\,0,\,0,\,0)$$

$$\vec{p}'\to\frac{1}{c}(h\nu_f,\,h\nu_f\cos\theta,\,h\nu_f\sin\theta,\,0)=\frac{1}{c}(E',\,E'\cos\theta,\,E'\sin\theta,\,0)$$

$$\vec{q}'\to mc(\gamma,\,\gamma\beta\cos\phi,\,\gamma\beta\sin\phi,\,0)$$

光子の静止質量は０であるから４元運動量の大きさは０になる．

$$\vec{p}\cdot\vec{p}=\vec{p}'\cdot\vec{p}'=0$$

電子は衝突前後で４元運動量の大きさは変わらない．

$$\vec{q}\cdot\vec{q}=\vec{q}'\cdot\vec{q}'=-m^2c^2$$

保存則を書き換える．

$$(\vec{p}-\vec{p}'+\vec{q})^2=(\vec{q}')^2$$

$$(\vec{p})^2-2\vec{p}\cdot\vec{p}'+(\vec{p}')^2+2(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{q}+(\vec{q})^2=(\vec{q}')^2$$

$$-\vec{p}\cdot\vec{p}'+(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{q}=0$$

$$(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{p}'$$

内積の定義から，

$$\frac{E-E'}{c}mc=\frac{EE'}{c^2}(1-\cos\theta)$$

コンプトン散乱の式は，

$$\frac{1}{E'}-\frac{1}{E}=\frac{1}{mc^2}(1-\cos\theta)$$

$$\frac{1}{\nu_f}-\frac{1}{\nu_i}=\frac{h}{mc^2}(1-\cos\theta)$$

$$\lambda_f-\lambda_i=\frac{h}{mc}(1-\cos\theta)=\lambda_0(1-\cos\theta)$$

λ_0 ；コンプトン波長

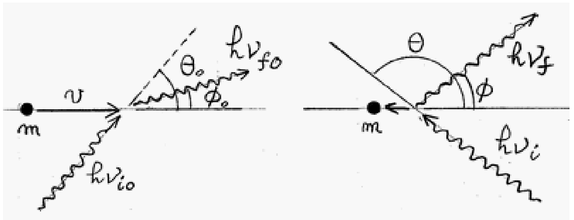
where　$\lambda\nu=c$

()

33　宇宙空間は高エネルギーの陽子からなる宇宙線とマイクロ波の背景輻射で満たされている．これらの粒子と光子はコンプトン散乱しうる．太陽の静止系で測定してエネルギーが $h\nu = 2\times 10^{-4}$eV の光子がエネルギー $10^9 m_p = 10^{18}$eV の陽子を散乱したとする．陽子の静止系で式(2.43)を使って，散乱の結果太陽の静止系で光子のもつ最大エネルギーを計算せよ．このエネルギーどの波長領域にあるか？（X線か，可視光か，などで答えよ．）

$$\frac{1}{\nu_f} = \frac{1}{\nu_i} + \frac{h}{mc^2}(1-\cos\theta) \qquad (2.43)$$

逆コンプトン散乱を図のようにする．



Observer's Frame　　　　　Electron Rest Frame

陽子の静止系で考える．練習問題 32 とほぼ同じ考えで進める．

保存則は，

$$\vec{p}+\vec{q} = \vec{p}'+\vec{q}'$$

保存則を成分で書き下すと，

$$p^\mu + q^\mu = p'^\mu + q'^\mu$$

$$\vec{p} \to \frac{1}{c}(h\nu_i, h\nu_i\cos\theta, h\nu_i\sin\theta, 0) = \frac{1}{c}(E, E\cos\theta, E\sin\theta, 0)$$

$$\vec{q} \to (mc, 0, 0, 0)$$

$$\vec{p}' \to \frac{1}{c}(h\nu_f, h\nu_f\cos\phi, h\nu_f\sin\phi, 0) = \frac{1}{c}(E', E'\cos\phi, E'\sin\phi, 0)$$

$$\vec{q}' \to mc(\gamma, \gamma\beta, 0, 0)$$

光子の静止質量は 0 であるから 4 元運動量の大きさは 0 になる．

$$\vec{p}\cdot\vec{p} = \vec{p}'\cdot\vec{p}' = 0$$

電子は衝突前後で 4 元運動量の大きさは変わらない．

$$\vec{q}\cdot\vec{q} = \vec{q}'\cdot\vec{q}' = -m^2c^2$$

保存則を書き換える．

$$(\vec{p}-\vec{p}'+\vec{q})^2 = (\vec{q}')^2$$

$$(\vec{p})^2 - 2\vec{p}\cdot\vec{p}' + (\vec{p}')^2 + 2(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{q} + (\vec{q})^2 = (\vec{q}')^2$$

$$-\vec{p}\cdot\vec{p}' + (\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{q} = 0$$

$$(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{q} = \vec{p}\cdot\vec{p}'$$

内積の定義から，

$$\frac{E-E'}{c}mc = \frac{EE'}{c^2}(1-\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)$$

$$\frac{E-E'}{c}mc = \frac{EE'}{c^2}(1-\cos\Theta)$$

逆コンプトン散乱の式は，

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{mc^2}(1-\cos\Theta)$$

$$\frac{1}{\nu_f} - \frac{1}{\nu_i} = \frac{h}{mc^2}(1-\cos\Theta)$$

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{mc}(1-\cos\Theta) = \lambda_0(1-\cos\Theta)$$

λ_0 ；コンプトン波長

where　$\lambda\nu = c$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

問題の最大エネルギーは陽子と γ 線が直線上にあるときである．

$$\theta_o = \theta = \pi, \quad \phi_o = \phi = 0, \quad \cos\Theta = \cos\pi = -1$$

陽子と入射光は対向し，陽子と反射光は並行するので，観測系から静止系へ移ると，入射光は青方偏移（波長は短く）し，反射光は赤方偏移（波長は長く）する．

$$\lambda_i = \lambda_{io}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad \lambda_f = \lambda_{fo}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

逆コンプトン散乱の式から，

$$\lambda_{fo}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}-\lambda_{io}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}=\frac{2h}{mc}=2\lambda_0$$

直線上の逆コンプトン散乱の式は，

◇　$$\lambda_{fo}=\lambda_{io}\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{2h}{mc}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}=\lambda_{io}\frac{1-\beta}{1+\beta}+2\lambda_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

◇　$$\frac{1}{h\nu_{fo}}=\frac{1}{h\nu_{io}}\cdot\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{2}{mc^2}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

where　$$\frac{1-\beta}{1+\beta}\cong\frac{(1+\beta)(1-\beta)}{4}=\frac{1-\beta^2}{4}=\frac{1}{4\gamma^2}$$

◇　$$\frac{1}{h\nu_{fo}}\cong\frac{1}{h\nu_{io}}\cdot\frac{1}{4\gamma^2}+\frac{1}{\gamma mc^2}$$

陽子の静止エネルギーは，$m_pc^2=1\mathrm{GeV}$ であり，陽子の全エネルギーは，

$E_p=10^{18}\mathrm{eV}$ である．また，入射光子は，$h\nu_{fo}=2\times10^{-4}\mathrm{eV}$ であるから，

$$\gamma=\frac{E_p}{m_pc^2}=\frac{10^{18}eV}{10^9eV}=10^9$$

$$\frac{1-\beta}{1+\beta}\cong\frac{1}{4\gamma^2}=\frac{1}{4\times10^{18}}$$

$$\frac{1}{h\nu_{fo}}=\frac{1}{2\times10^{-4}}\cdot\frac{1}{4\times10^{18}}+\frac{1}{10^9}\cdot\frac{1}{10^9}=\frac{1}{8\times10^{14}}+\frac{1}{10^{18}}$$

$$h\nu_{fo}\cong8\times10^{14}\mathrm{eV}=8\times10^5m_pc^2$$

これは，γ 線より高エネルギーである．

【参考】

波長，振動数（周波数），エネルギーの関係

	λ(m)	$\nu(\mathrm{s}^{-1})$(Hz)	E(eV)
Radio	10^{-3}～10^{3}	3×10^5～3×10^{11}	
Infrared	10^{-6}～10^{-3}	3×10^{11}～3×10^{14}	
Optical	400～750×10^{-9}	4×10^{14}～7.5×10^{14}	1.7eV～3.1eV
UV	1～400×10^{-9}	10^{15}～3×10^{17}	4eV～1keV
X-rays	10^{-12}～10^{-9}	3×10^{17}～3×10^{20}	1keV～1MeV
γ -rays	～10^{-12}	3×10^{20}～	1MeV～

where　$1\mathrm{eV}=1.602\times10^{-19}\mathrm{J}$

$$h=6.626\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s}=4.136\times10^{-15}\mathrm{eV\cdot s}$$

（）

34　$\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$ が任意のベクトルで α と β が任意の数であるとき次のことを証明せよ．

$$(\alpha\vec{A})\cdot\vec{B}=\alpha(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\vec{A}\cdot(\beta\vec{B})=\beta(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

線形性の証明であり，ベクトルの定義そのものである．

数学書を参照してほしい．

（2.15）

35　式（2.15）で $\{\vec{e}_\alpha\}$ から得られるベクトル $\{\vec{e}_{\bar\beta}\}$ はすべての $\bar\alpha$，$\bar\beta$ に対して

$$\vec{e}_{\bar\alpha}\cdot\vec{e}_{\bar\beta}=\eta_{\bar\alpha\bar\beta}$$

を満たすことを証明せよ．

$$\vec{e}_{\bar\mu}=\Lambda^{\nu}{}_{\bar\mu}(-v)\vec{e}_\nu \qquad (2.15)$$

基底ベクトルの系 O から系 $\overline{O}$ への変換は，ローレンツの逆変換の行列を使って，

$$\vec{e}_{\bar\mu}=\Lambda^{\nu}{}_{\bar\mu}(-v)\vec{e}_\nu \qquad (2.15)$$

系 O では，メトリックテンソルを使って，次が成り立っている．

$$\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta=\eta_{\alpha\beta}$$

系 $\overline{O}$ では，

$$\vec{e}_{\bar\alpha}\cdot\vec{e}_{\bar\beta}=(\Lambda^{\mu}{}_{\bar\alpha}(-v)\vec{e}_\mu)\cdot(\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(-v)\vec{e}_\nu)$$

$$=\Lambda^{\mu}{}_{\bar\alpha}(-v)\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(-v)\eta_{\mu\nu}=\eta_{\bar\alpha\bar\beta}$$

上式の最右辺は，練習問題 11 のローレンツの逆変換の行列を書き下して算出できる．または，同じことであるが，次を使う．

$$(\Lambda(-v))^T(\eta)(\Lambda(-v))=(\eta)=diag(-1,1,1,1)$$

$$(\Lambda(v))^T(\eta)(\Lambda(v))=(\eta)=diag(-1,1,1,1)$$

$$(\Lambda(-v))=(\Lambda(v))^{-1}$$

where　$(\ )$ は行列を表し，

$(\Lambda(v))$ はローレンツ変換の変換行列，$(\Lambda(-v))$ は逆変換行列を表す．

これは，座標変換でメトリックテンソルの成分が変わらないことを意味する．

3　特殊相対論におけるテンソル解析

テンソル解析，メトリック（計量），共変ベクトル，反変ベクトル，１形式，縮約，写像，勾配，共変微分

3.1　メトリックテンソル

$$\vec{A} = A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} = A^{0}\vec{e}_{0} + A^{1}\vec{e}_{1} + A^{2}\vec{e}_{2} + A^{3}\vec{e}_{3}$$

$$\vec{B} = B^{\beta}\vec{e}_{\beta} = B^{0}\vec{e}_{0} + B^{1}\vec{e}_{1} + B^{2}\vec{e}_{2} + B^{3}\vec{e}_{3}$$

【表記法】４元ベクトル（基底ベクトルも）は，→付で表す．３元ベクトル（基底ベクトルも）は，太文字で表す．

これらのスカラー積（ドット積）は，

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\right)\cdot\left(B^{\beta}\vec{e}_{\beta}\right) = A^{\alpha}B^{\beta}\left(\vec{e}_{\alpha}\cdot\vec{e}_{\beta}\right) = A^{\alpha}B^{\beta}\eta_{\alpha\beta}$$

◆ $$\vec{A}\cdot\vec{B} = A^{\alpha}B^{\beta}\eta_{\alpha\beta} \qquad (3.1)$$

$$A^{\alpha}B^{\alpha}\eta_{\alpha\beta} = -A^{0}B^{0} + A^{1}B^{1} + A^{2}B^{2} + A^{3}B^{3}$$

$$\vec{e}_{\alpha}\cdot\vec{e}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} = diag(-1,1,1,1)$$

3.2　テンソルの定義

◆　（0,N）テンソルとは N 個のベクトルから実数への関数で，その N 変数のおのおのについて線形なものをいう．

第１の変数についての線形性は次式を意味する．

$$\left(\alpha\vec{A}\right)\cdot\vec{B} = \alpha\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$$

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{C} \qquad (3.2)$$

第２の変数についての線形性は次式を意味する．

$$\vec{A}\cdot\left(\beta\vec{B}\right) = \beta\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$$

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C} \qquad (3.2b)$$

$\boldsymbol{g}$ をメトリックテンソルとすると，定義から，

$$\boldsymbol{g}\left(\vec{A},\vec{B}\right) \equiv \vec{A}\cdot\vec{B} \qquad (3.3)$$

$\boldsymbol{g}(\;\;,\;\;)$は二つの変数をとり，それらについて線形な関数である．

$$\boldsymbol{g}\left(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B},\vec{C}\right) = \alpha\,\boldsymbol{g}\left(\vec{A},\vec{C}\right) + \beta\,\boldsymbol{g}\left(\vec{B},\vec{C}\right) \qquad (3.4)$$

第２の変数についても同様．

メトリックテンソルの成分は，

◆ $$\boldsymbol{g}\left(\vec{e}_{\alpha},\vec{e}_{\beta}\right) = \vec{e}_{\alpha}\cdot\vec{e}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \qquad (3.5)$$

3.3　（0, 1）テンソル：１形式

（0, 1）テンソルは，コベクトル，共変ベクトル，１形式とよばれる．

１形式の線形性

$$\tilde{s} = \tilde{p} + \tilde{q}$$

$$\tilde{r} = \alpha\,\tilde{p} \qquad (3.6a)$$

次の式は実数を与える．

$$\tilde{s}\left(\vec{A}\right) = \tilde{p}\left(\vec{A}\right) + \tilde{q}\left(\vec{A}\right)$$

$$\tilde{r}\left(\vec{A}\right) = \alpha\,\tilde{p}\left(\vec{A}\right) \qquad (3.6b)$$

１形式の成分

$$p_{\alpha} \equiv \tilde{p}\left(\vec{e}_{\alpha}\right) \qquad (3.7)$$

次の操作を $\vec{A}$ と $\tilde{p}$ との縮約とよぶ．

$\tilde{p}$ は関数，$\vec{A}$ は変数ともいわれる．$\vec{A}$ から $\tilde{p}$ への写像ともいわれる．

$$\tilde{p}\left(\vec{A}\right) = \tilde{p}\left(A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\right) = A^{\alpha}\,\tilde{p}\left(\vec{e}_{\alpha}\right)$$

$$\tilde{p}\left(\vec{A}\right) = A^{\alpha}p_{\alpha} \qquad (3.8)$$

$\tilde{p}$ の基底$\{\vec{e}_{\bar{\beta}}\}$上の成分は，

$$p_{\bar{\beta}} \equiv \tilde{p}\left(\vec{e}_{\bar{\beta}}\right) = \tilde{p}\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}\vec{e}_{\alpha}\right) = \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}\,\tilde{p}\left(\vec{e}_{\alpha}\right) = \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}\,p_{\alpha}$$

$$p_{\bar{\beta}} = \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}\,p_{\alpha} \qquad (3.9)$$

１形式の変換行列は基底ベクトルのそれと同じ．つまりベクトルの逆変換行列である．

縮約は座標に依存しない.

$$A^{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} = \left(\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta}\right)\left(\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} p_{\mu}\right) \tag{3.10a}$$

$$= \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta} p_{\mu} \tag{3.10b}$$

$$= \delta^{\mu}{}_{\beta} A^{\beta} p_{\mu} \tag{3.10c}$$

$$= A^{\beta} p_{\beta} \tag{3.10d}$$

１形式の表記法（双対な基底を使って）

$$\tilde{p} = p_{\alpha} \tilde{\omega}^{\alpha} \tag{3.11}$$

１形式をこれで定義してもかまわないのだが，ここでは，双対性から定義している.

基底１形式の定義（基底ベクトルにより表現する）

◆ $$\tilde{\omega}^{\alpha}(\vec{e}_{\beta}) = \delta^{\alpha}{}_{\beta} \tag{3.12}$$

基底１形式の成分

$$\tilde{\omega}^{0} \xrightarrow[O]{} (1, 0, 0, 0)$$

$$\tilde{\omega}^{1} \xrightarrow[O]{} (0, 1, 0, 0)$$

$$\tilde{\omega}^{2} \xrightarrow[O]{} (0, 0, 1, 0)$$

$$\tilde{\omega}^{3} \xrightarrow[O]{} (0, 0, 0, 1)$$

基底１形式の座標変換

$$\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} \tilde{\omega}^{\beta} \tag{3.13}$$

変換行列はベクトルのそれと同じである.

１形式の描像

１形式は表面の列として表される.

１形式をベクトルに作用させたとき得られる数はベクトルの矢が貫く表面の数である.

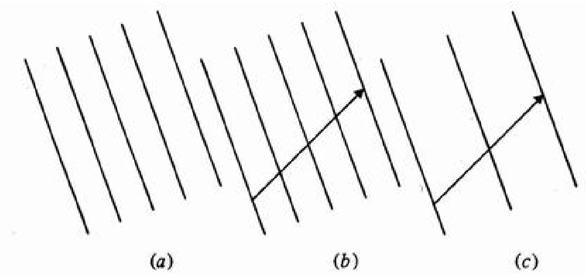


図 3.1　(*a*) 矢としてのベクトルの描像と相補的な一形式の描像. (*b*) ある与えられたベクトル上での一形式の値は，ベクトルの矢が貫く表面の数である. (*c*) 同じベクトル上でのより小さな一形式の値は，貫く表面の数が少ない. より大きな一形式ほど，空間をより細かくスライスする.

関数の微分は１形式である

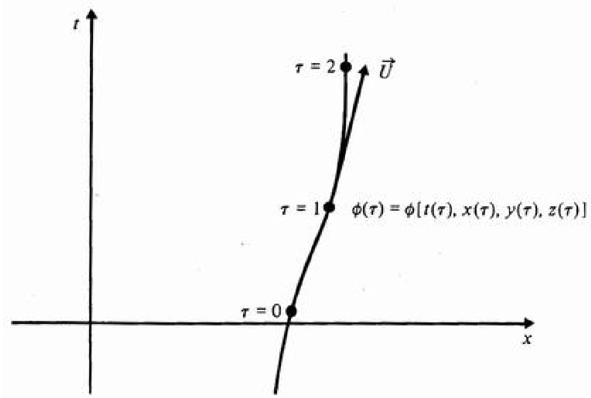


図 3.2　固有時間 τ でパラメーターづけられた世界線とそれに沿ってのスカラー場 ϕ（t, x, y, z）の値 ϕ（τ）

世界線の座標

$$\left[ct = ct(\tau),\, x = x(\tau),\, y = y(\tau),\, z = z(\tau)\right]$$

４元速度（接ベクトル）

$$\vec{U} \to \left(\frac{cdt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$$

スカラー場 ϕ

$$\phi(\tau) = \phi\left[ct(\tau),\, x(\tau),\, y(\tau),\, z(\tau)\right]$$

その曲線上での変化率（微分）

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\partial\phi}{c\partial t}\frac{cdt}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{d\tau}$$

$$= \frac{\partial\phi}{c\partial t}U^0 + \frac{\partial\phi}{\partial x}U^1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}U^2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}U^3 = \phi_{,\alpha}U^\alpha \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \phi_{,\alpha}U^\alpha$$

スカラー場の微分は接ベクトルと接１形式の縮約だから，

次式は接１形式（勾配）の定義

$$\tilde{d}\phi \xrightarrow[O]{} \left(\frac{\partial\phi}{c\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{3.15}$$

$$\tilde{d}\phi \xrightarrow[O]{} \left(\phi_{,0}, \phi_{,1}, \phi_{,2}, \phi_{,3}\right)$$

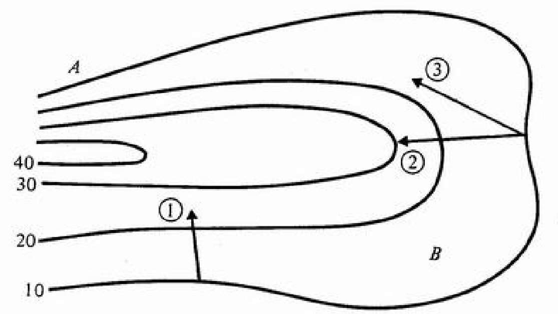


図 3.3　地形図は勾配一形式（局所的な等高線）を例示している．任意の経路（矢）に沿っての高さの変化は，その矢が交差する線の数である．

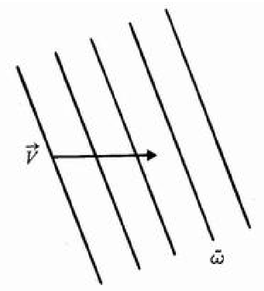


図 3.4　値 $\tilde{\omega}$ （$\vec{V}$）は 2.5 である．

$$\left(\tilde{d}\phi\right)_{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\beta}{}_{\overline{\alpha}}\left(\tilde{d}\phi\right)_{\beta} \tag{3.16}$$

$$\left(\tilde{d}\phi\right)_{\overline{\alpha}} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\overline{\alpha}}}\left(\tilde{d}\phi\right)_{\beta} \tag{3.17}$$

◆

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\overline{\alpha}}} = \Lambda^{\beta}{}_{\overline{\alpha}}, \quad x^{\beta}{}_{,\overline{\alpha}} = \Lambda^{\beta}{}_{\overline{\alpha}} \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}, \quad x^{\alpha}{}_{,\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$$

から，基底１形式は，

$$\tilde{d}x^\alpha \equiv \tilde{\omega}^\alpha \tag{3.20}$$

【表記法】

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \equiv \phi_{,\alpha} \tag{3.19}$$

【ポイント】接ベクトルと接１形式の厳密な定義は，次を参照のこと．

5.9 練習問題４　$\{x = f(\lambda),\, y = g(\lambda),\, 0 \le \lambda \le 1\}$ によって定義される曲線がある．接ベクトル $(dx/d\lambda,\, dy/d\lambda)$ が実際にこの曲線に接することを示せ．

解）

ここでは，２次元 (x, y) 座標空間を考える． x, y はパラメーター λ の関数とすると，x, y がつくる曲線は，λ がつくる一次元実数軸から２次元曲線経路への写像である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

スカラー場ϕを次式とする．

$$\phi = \phi(x(\lambda),\ y(\lambda))$$

接ベクトルは次式である．

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{dx}{d\lambda}\vec{e}_x + \frac{dy}{d\lambda}\vec{e}_y$$

where　$dx/d\lambda$，$dy/d\lambda$ は接ベクトルの成分

$\partial/\partial x = \vec{e}_x$，$\partial/\partial y = \vec{e}_y$ は基底ベクトル

接１形式（勾配）は次式である．

$$\tilde{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\tilde{d}x^i = \frac{\partial\phi}{\partial x}\tilde{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\tilde{d}y = \frac{\partial\phi}{\partial x}\tilde{\omega}^x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\tilde{\omega}^y$$

where　$\partial\phi/\partial x$，$\partial\phi/\partial y$ は接１形式の成分

$\tilde{d}x = \tilde{\omega}^x$，$\tilde{d}y = \tilde{\omega}^y$ は基底１形式

スカラー場ϕの曲線に沿っての微分（スカラー場ϕのλ方向の微分）は，接ベクトルと接１形式の縮約である．

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{dy}{d\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial y} = \left\langle \tilde{d}\phi,\ \frac{d}{d\lambda}\right\rangle \qquad (5.19)$$

接ベクトル$d/d\lambda$と接１形式$\tilde{d}\phi$はスカラー場ϕをつくるお互いに関数の関係にある．

3.4　(0, 2) テンソル

問題 15　　（3.21）～（3.26）

$$f_{\alpha\beta} = \boldsymbol{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) \qquad (3.21)$$

$$\boldsymbol{f}(\vec{A}, \vec{B}) = \boldsymbol{f}(A^\alpha \vec{e}_\alpha, B^\beta \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta \boldsymbol{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$$

$$= A^\alpha B^\beta f_{\alpha\beta} \qquad (3.22)$$

（0,2）テンソルを基底で定義すると，

$$\boldsymbol{f} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha\beta} \qquad (3.23)$$

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \delta^\alpha{}_\mu \delta^\beta{}_\nu \qquad (3.24)$$

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta} = \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta \qquad (3.25)$$

◆ $$\boldsymbol{f} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta \qquad (3.26)$$

対称性　　（3.27）～（3.36）

テンソルが対称であるとき

$$\boldsymbol{f}(\vec{A}, \vec{B}) = \boldsymbol{f}(\vec{B}, \vec{A}) \quad \forall\ \vec{A}, \vec{B} \qquad (3.27)$$

$\vec{A} = \vec{e}_\alpha$，$\vec{B} = \vec{e}_\beta$ とおくと，

$$f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha} \qquad (3.28)$$

$$\boldsymbol{h}_{(S)}(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A}, \vec{B}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B}, \vec{A}) \qquad (3.29)$$

その成分は，

$$h_{(S)\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}\right) \qquad (3.30)$$

上式を次式で定義する．

◆ $$h_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}\right) \qquad (3.31)$$

テンソルが反対称であるとき

$$\boldsymbol{f}(\vec{A}, \vec{B}) = -\boldsymbol{f}(\vec{B}, \vec{A}) \quad \forall\ \vec{A}, \vec{B} \qquad (3.32)$$

$$f_{\alpha\beta} = -f_{\beta\alpha} \qquad (3.33)$$

$$\boldsymbol{h}_{(A)}(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A}, \vec{B}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B}, \vec{A})$$

$$h_{(S)\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}\right)$$

上式を次式で定義する．

◆ $$h_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\beta} - h_{\beta\alpha}\right) \qquad (3.34)$$

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\beta} - h_{\beta\alpha}\right)$$

$$h_{\alpha\beta} = h_{(\alpha\beta)} + h_{[\alpha\beta]} \qquad (3.35)$$

任意の（0,2）テンソルは，その対称部分と反対称部分に一意的に分けることができる．

メトリックテンソルは，対称である．

$$\boldsymbol{g}(\vec{A}, \vec{B}) = \boldsymbol{g}(\vec{B}, \vec{A}) \qquad (3.36)$$

3.5　ベクトルから１形式への写像としてのメトリック

$$\boldsymbol{g}(\vec{V},\quad) \equiv \tilde{V}(\quad) \qquad (3.37)$$

メトリックテンソル $\boldsymbol{g}(\vec{V},\quad)$ の空スロットにベクトルを入れると実数になるので，これは，実数をつくり出すベクトル変数の線形関数つまり１形式である．

$\tilde{V}$ は，そのベクトル $\vec{A}$ 上での値が，$\vec{A}\cdot\vec{V}$ となる１形式である．

$$\tilde{V}(\vec{A}) \equiv \boldsymbol{g}(\vec{V}, \vec{A}) = \vec{V}\cdot\vec{A} \qquad (3.38)$$

メトリックテンソルは対称だから，

$$\boldsymbol{g}(\quad,\vec{V}) \equiv \tilde{V}(\quad) \qquad (3.37b)$$

$\tilde{V}$ の成分は，

$$V_\alpha = \tilde{V}(\vec{e}_\alpha) = \vec{V}\cdot\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha\cdot\vec{V} = \vec{e}_\alpha\cdot(V^\beta\vec{e}_\beta) = (\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta)V^\beta$$

◆ $$V_\alpha = \eta_{\alpha\beta}V^\beta \qquad (3.39)$$

$$V_0 = -V^0 \qquad (3.40)$$

$V_1 = +V^1$ など　(3.40)

もし，$\vec{V} \to (a, b, c, d)$，ならば，

$$\tilde{V} \to (-a, b, c, d) \qquad (3.42)$$

◆ $$A^\alpha = \eta^{\alpha\beta}V_\beta \qquad (3.43)$$

$$\eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \qquad (3.44)$$

$\tilde{d}\phi$ に附随するベクトル $\vec{d}\phi$ は，$\phi = \mathrm{Const.}$ の表面に直交する．

$\vec{d}\phi$ と $\phi = \mathrm{Const.}$ の面内のベクトル $\vec{V}$ の内積は，写像の定義から，$\tilde{d}\phi$ がそのベクトル $\vec{V}$ 上でとる値 $\tilde{d}\phi(\vec{V})$ に等しい．

ところが，$\tilde{d}\phi(\vec{V})$ は ϕ の $\vec{V}$ に沿っての変化率で，$\vec{V}$ は $\phi = \mathrm{Const.}$ の面内にあるから，ゼロでである．

$$\vec{d}\phi\cdot\vec{V} = \tilde{d}\phi(\vec{V}) = 0$$

なぜ１形式とベクトルを区別するのか？

勾配

$$\tilde{d}\phi \to \left(\frac{\partial\phi}{c\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \qquad (3.15)$$

$\tilde{d}\phi$ に附随するベクトル $\vec{d}\phi$ は，$\phi = \mathrm{Const.}$ の表面に直交する．

$$\vec{d}\phi \to \left(-\frac{\partial\phi}{c\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \qquad (3.45)$$

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ \vdots \end{pmatrix} = ap + bq + \cdots \qquad (3.46)$$

１形式の大きさとスカラー積

１形式 $\tilde{p}$ は，それに附随するベクトル $\vec{p}$ と同じ大きさをもつ．

$$\tilde{p}^2 = \vec{p}^2 = \eta_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta \qquad (3.47)$$

式（3.43）を使うと，

$$\tilde{p}^2 = \eta_{\alpha\beta}(\eta^{\alpha\mu}p_\mu)(\eta^{\beta\nu}p_\nu) \qquad (3.48)$$

$$\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\nu} = \eta^\nu{}_\alpha = \delta^\nu{}_\alpha \qquad (3.49)$$

◆ $$\tilde{p}^2 = \eta^{\alpha\mu}p_\mu p_\alpha \eta_{\alpha\beta} \qquad (3.50)$$

$$\tilde{p}^2 = -(p_0)^2 + (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 \qquad (3.51)$$

１形式どうしの内積の定義

$$\tilde{p}\cdot\tilde{q} \equiv \frac{1}{2}\left[(\tilde{p}+\tilde{q})^2 - \tilde{p}^2 - \tilde{q}^2\right] \tag{3.52}$$

その成分は,

$$\tilde{p}\cdot\tilde{q} = -p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \tag{3.53}$$

3.6　(M,N) テンソル

ベクトルは 1 形式を実数に写像にする線形関数である.

$$\vec{V}(\tilde{p}) \equiv \tilde{p}(\vec{V}) \equiv p_\alpha V^\alpha \equiv \langle \tilde{p}, \vec{V} \rangle \tag{3.54}$$

(M,0) テンソルの定義

(M,0) テンソルとは M 個の 1 形式から実数への関数である.

(2,0) テンソルは, $\vec{V}\otimes\vec{W}$ で, それは二つの変数 $\tilde{p}$ と $\tilde{q}$ が与えられると実数 $\vec{V}(\tilde{p})\vec{W}(\tilde{q}) \equiv \tilde{p}(\vec{V})\tilde{q}(\vec{W}) \equiv V^\alpha p_\alpha W^\beta q_\beta$ を与える. したがって $\vec{V}\otimes\vec{W}$ は成分 $V^\alpha W^\beta$ をもつ. (2,0) テンソルに対する基底は, $\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta$ である.

(M,0) テンソルの成分は基底 1 形式 $\tilde{\omega}^\alpha$ を変数としたときの値である.

◆　(M,N) テンソルとは M 個の 1 形式と N 個のベクトルから実数への関数である.

(1,1) テンソル $\boldsymbol{R}$ を考える. 実数 $\boldsymbol{R}(\tilde{p}\,;\vec{A})$ を与えるために 1 つの 1 形式 $\tilde{p}$ と 1 つのベクトル $\vec{A}$ を必要とする. それは成分 $\boldsymbol{R}(\tilde{\omega}^\alpha\,;\vec{e}_\beta) \equiv R^\alpha{}_\beta$ をもつ.

新しい系では,

$$R^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\beta}} = \boldsymbol{R}(\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}}\,;\vec{e}_{\bar{\beta}}) = \boldsymbol{R}(\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_\mu \tilde{\omega}^\mu\,;\Lambda^\nu{}_{\bar{\beta}}\vec{e}_\nu)$$

$$R^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\beta}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_\mu \Lambda^\nu{}_{\bar{\beta}} R^\mu{}_\nu \tag{3.55}$$

3.7　添字の“上げ”と“下げ”

$$T^\alpha{}_{\beta\gamma} \equiv \eta_{\beta\mu} T^{\alpha\mu}{}_\gamma \tag{3.56}$$

$$T_\alpha{}^\beta{}_\gamma \equiv \eta_{\alpha\mu} T^{\mu\beta}{}_\gamma \tag{3.57}$$

$$T^{\alpha\beta\gamma} \equiv \eta^{\gamma\mu} T^{\alpha\beta}{}_\mu \tag{3.58}$$

$$\eta^\alpha{}_\beta \equiv \eta^{\alpha\mu}\eta_{\mu\beta} \tag{3.59}$$

◆
$$\eta^\alpha{}_\beta \equiv \delta^\alpha{}_\beta \tag{3.60}$$

3.8　テンソルの微分

関数 f は, (0,0) テンソルであり, その勾配 $\tilde{d}f$ は, (0,1) テンソルである. 微分は共変階数が 1 だけ高いテンソルをつくりだす.

固有時間 τ をパラメーターとして世界線に沿って動く次の (1,1) テンソルを考える.

$$\boldsymbol{T} = T^\alpha{}_\beta \tilde{\omega}^\beta \otimes \vec{e}^\alpha \tag{3.61}$$

T の変化率

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\boldsymbol{T}(\tau+\Delta\tau) - \boldsymbol{T}(\Delta\tau)}{\Delta\tau} \tag{3.62}$$

$\tilde{\omega}^\alpha(\tau+\Delta\tau) = \tilde{\omega}^\alpha(\Delta\tau)$ だから,

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{d\tau} = \left(\frac{dT^\alpha{}_\beta}{d\tau}\right)\tilde{\omega}^\beta \otimes \vec{e}_\alpha \tag{3.63}$$

$$\frac{dT^\alpha{}_\beta}{d\tau} = \frac{dT^\alpha{}_\beta}{dx^\gamma}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = T^\alpha{}_{\beta,\gamma} U^\gamma \tag{3.64}$$

$$\nabla_{\vec{U}}\boldsymbol{T} \equiv \frac{d\boldsymbol{T}}{d\tau} \equiv \left(T^\alpha{}_{\beta,\gamma}\tilde{\omega}^\beta \otimes \vec{e}_\alpha\right)U^\gamma \qquad (3.65)\quad(3.67)$$

ここで,

$$\vec{U} = \frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

は, 世界線の接ベクトルである. (3.65) を成分表示すると,

$$\nabla_{\vec{U}} \boldsymbol{T} \xrightarrow[O]{} \{T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma} U^{\gamma}\} \tag{3.68}$$

式（3.65）は（1,1）テンソルの微分で（1,1）テンソルである．

$$\nabla \boldsymbol{T} \equiv T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma} \tilde{\omega}^{\beta} \otimes \tilde{\omega}^{\gamma} \otimes \vec{e}_{\alpha} \tag{3.66}$$

式（3.66）は $\boldsymbol{T}$ の勾配で（1,2）テンソルである．これは，共変微分である．

【表記法】∇はナブラと呼称する．または delta の逆で atled と呼ぶ．

∇はハミルトンの微分演算子であり，ここでは３次元空間のものと同じ定義である．

節の中で使われている公式と問題

3.1　メトリックテンソル　（3.1）

問題 1

3.2　テンソルの定義　（3.2）～（3.5）

3.3　（0,1）テンソル：１形式　（3.6）～（3.20）

問題 2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13，22

3.4　（0,2）テンソル　（3.21）～（3.36）

問題 14，15，16

3.5　ベクトルから１形式への写像としてのメトリック（3.37）～（3.53）

問題 17，18，19，20，21

3.6　（M,N）テンソル　（3.54）～（3.55）

問題 23

3.7　添字の“上げ”と“下げ”　（3.56）～（3.60）

問題 24，25，26，27

3.8　テンソルの微分　（3.61）～（3.68）

問題 28，29，30

問題 31，32，33，34

（3.1）

1　(a)　任意の数の集合 $\{M_{\alpha\beta}, \alpha = 0,\cdots,3; \beta = 0,\cdots,3\}$ と二つの任意のベクトル成分の集合 $\{A^{\mu}, \mu = 0,\cdots,3\}$ と $\{B^{\nu}, \nu = 0,\cdots,3\}$ が与えられている．このとき次の二つの表現が同等でないことを示せ．

$$M_{\alpha\beta}A^{\alpha}B^{\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\alpha=0}^{3} M_{\alpha\beta}A^{\alpha}B^{\beta}$$

および

$$\sum_{\alpha=0}^{3} M_{\alpha\alpha}A^{\alpha}B^{\alpha}$$

(b)　次式を示せ．

$$A^{\alpha}B^{\alpha}\eta_{\alpha\beta} = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3 \qquad (3.1)$$

(a)　1 式は 16 個の項の和，2 式は 4 個の項の和．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　これはベクトルのスカラー積の公式であり，

$$\eta_{\alpha\beta} = diag(-1, 0, 0, 0)$$

は，メトリックテンソルである．書き下して，

$$\eta_{00} = -1,\quad \eta_{0i} = 0,\quad \eta_{ij} = \delta_{ij}$$

を適用すれば与式が導出できる．

【解説】ベクトルとは（1,0）テンソルのことをいう．旧くは，反変ベクトルといった．

（3.6a）

2　すべての 1 形式のつくる空間がベクトル空間であることを示せ．

ベクトル空間の定理は，

・ 1 形式と 1 形式の和は 1 形式になる．

・ 1 形式の実数倍は 1 形式になる．

この定理は，次式で示される．

$$\tilde{s} = \tilde{p} + \tilde{q}$$

$$\tilde{r} = \alpha\,\tilde{p} \qquad (3.6a)$$

【解説】 1 形式とは（0,1）テンソルのことをいう．旧くは，共変ベクトルまたはコベクトルといった．

（3.8）

3　(a)　すべての項を書き下すことによって，次式が正しいことを証明せよ．

$\tilde{p}(A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}) = A^{\alpha}\tilde{p}(\vec{e}_{\alpha})$　　（3.8）の前の式

(b)　$\tilde{p}$ の成分を $(-1, 1, 2, 0)$，$\vec{A}$ と $\vec{B}$ の成分を，それぞれ $(2, 1, 0, -1)$，$(0, 2, 0, 0)$ とする．(i) $\tilde{p}(\vec{A})$ (ii) $\tilde{p}(\vec{B})$ (iii) $\tilde{p}(\vec{A}-3\vec{B})$ (iv) $\tilde{p}(\vec{A})-3\tilde{p}(\vec{B})$ を求めよ．

【表記法】４元ベクトルは→付きで表す．３元ベクトルは太文字で表し，これは断りのないかぎり３次元空間ベクトルである．１形式は～（チルド）付きで表し，断りのないかぎり４元１形式である．
１形式を次式で表す．

$$\tilde{p} = p_{\beta}\tilde{\omega}^{\beta} = p_0\tilde{\omega}^0 + p_1\tilde{\omega}^1 + p_2\tilde{\omega}^2 + p_3\tilde{\omega}^3$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(a)

$$\tilde{p}(A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}) = A^{\alpha}\tilde{p}(\vec{e}_{\alpha})$$

$$\text{左辺} = (p_{\beta}\tilde{\omega}^{\beta})\cdot(A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha})$$

$$\begin{aligned}
&= A^0 p_0\vec{e}_0\cdot\tilde{\omega}^0 + A^0 p_1\vec{e}_0\cdot\tilde{\omega}^1 + A^0 p_2\vec{e}_0\cdot\tilde{\omega}^2 + A^0 p_3\vec{e}_0\cdot\tilde{\omega}^3 \\
&\quad + A^1 p_0\vec{e}_1\cdot\tilde{\omega}^0 + A^1 p_1\vec{e}_1\cdot\tilde{\omega}^1 + A^1 p_2\vec{e}_1\cdot\tilde{\omega}^2 + A^1 p_3\vec{e}_1\cdot\tilde{\omega}^3 \\
&\quad + A^2 p_0\vec{e}_2\cdot\tilde{\omega}^0 + A^2 p_1\vec{e}_2\cdot\tilde{\omega}^1 + A^2 p_2\vec{e}_2\cdot\tilde{\omega}^2 + A^2 p_3\vec{e}_2\cdot\tilde{\omega}^3 \\
&\quad + A^3 p_0\vec{e}_3\cdot\tilde{\omega}^0 + A^3 p_1\vec{e}_3\cdot\tilde{\omega}^1 + A^3 p_2\vec{e}_3\cdot\tilde{\omega}^2 + A^3 p_3\vec{e}_3\cdot\tilde{\omega}^3
\end{aligned}$$

双対基底は,

$$\vec{e}_{\alpha}\cdot\tilde{\omega}^{\beta} = \delta_{\alpha}{}^{\beta}$$

なので,

$$\text{左辺} = A^0 p_0 + A^1 p_1 + A^2 p_2 + A^3 p_3$$

この操作は縮約とよばれる．（メトリックテンソルなしで定義できる．）

$$\text{右辺} = A^{\alpha}(p_{\beta}\tilde{\omega}^{\beta})(\vec{e}_{\alpha}) = \text{上式と同じ.}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

(i)

$$\tilde{p}(\vec{A}) = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = -1$$

(ii)

$$\tilde{p}(\vec{B}) = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix} = 2$$

(iii)

$$\tilde{p}(\vec{A}-3\vec{B}) = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-5\\0\\-1\end{pmatrix} = -7$$

(iv)

$$\tilde{p}(\vec{A})-3\tilde{p}(\vec{B}) = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= -1-6 = -7$$

（3.8）

4　O で次のベクトルが与えられているとする．

$$\vec{A} \xrightarrow[O]{} (2,1,1,0)\,,\quad \vec{B} \xrightarrow[O]{} (1,2,0,0)\,,$$

$$\vec{C} \xrightarrow[O]{} (0,0,1,1)\,,\quad \vec{D} \xrightarrow[O]{} (-3,2,0,0)$$

(a)　これらが線形独立であることを示せ．

(b)　$\tilde{p}$ が次式を満たすとき，その成分を求めよ．

$$\tilde{p}(\vec{A}) = 1\,,\quad \tilde{p}(\vec{B}) = -1\,,\quad \tilde{p}(\vec{C}) = -1\,,\quad \tilde{p}(\vec{D}) = 0$$

(c)　次のベクトル $\vec{E}$ に対して，$\tilde{p}(\vec{E})$ の値を求めよ．

$$\vec{E} \xrightarrow[O]{} (1,1,0,0)$$

(d)　１形式 $\tilde{p}$，$\tilde{q}$，$\tilde{r}$，$\tilde{s}$ が，次式を満たすとき，それらが線形独立であるかどうかを示せ．

$$\tilde{q}(\vec{A}) = \tilde{q}(\vec{B}) = 0\,,\quad \tilde{q}(\vec{C}) = 1\,,\quad \tilde{q}(\vec{D}) = -1\,,$$

$$\tilde{r}(\vec{A}) = 2\,,\quad \tilde{r}(\vec{B}) = \tilde{r}(\vec{C}) = \tilde{r}(\vec{D}) = 0\,,$$

$$\tilde{s}(\vec{A}) = -1\,,\quad \tilde{s}(\vec{B}) = -1\,,\quad \tilde{s}(\vec{C}) = \tilde{s}(\vec{D}) = 0$$

(a)　成分で行列式をつくり，その値が０でなければ線形独立である．

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　次の４連立１次方程式を解く．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

クラーメルの公式を使って，

$$p_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{1}{4}\,,\quad p_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{3}{8}$$

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{15}{8}\,,\quad p_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{23}{8}$$

$$\tilde{p} \xrightarrow[O]{} \left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{15}{8}, -\frac{23}{8}\right)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)

$$\tilde{p}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{15}{8} & -\frac{23}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8} = -\frac{5}{8}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　次の４つの４連立１次方程式を解く．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 & q_0 & r_0 & s_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左辺の１つめの行列と右辺の行列が線形独立であれば，左辺の２つめの行列が線形独立であることが証明できる．

（3.10）

5　式（3.10a）から式（3.10d）に至るステップを確認せよ．

$$A^{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} = (\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta})(\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} p_{\mu}) \quad (3.10a)$$

$$= \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta} p_{\mu} \quad (3.10b)$$

$$= \delta^{\mu}{}_{\beta} A^{\beta} p_{\mu} \quad (3.10c)$$

$$= A^{\beta} p_{\beta} \quad (3.10d)$$

ベクトルから 1 形式への写像（操作は縮約）が系のとり方に依存しないこと，つまり

$$\tilde{p}(\vec{A}) = A^{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} = A^{\beta} p_{\beta}$$

を証明する．

A^{β} と p_{μ} の変換式は，

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta}, \quad p_{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} p_{\mu}$$

1 形式に対しては逆変換行列を使っていることに注意．

変換後の $\tilde{p}(\vec{A})$ は，

$$A^{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} = (\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta})(\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} p_{\mu}) \quad (3.10a)$$

順序は入れ換えられるので，

$$= \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta} p_{\mu} \quad (3.10b)$$

逆変換行列は変換行列の逆行列であるから，

$$= \delta^{\mu}{}_{\beta} A^{\beta} p_{\mu} \quad (3.10c)$$

$\delta^{\mu}{}_{\beta} p_{\mu} = p_{\beta}$ であるから，

$$= A^{\beta} p_{\beta} \quad (3.10d)$$

（）

6　系 O の基底 $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ と，次の 1 形式の空間の基底 $(\tilde{\lambda}^0, \tilde{\lambda}^1, \tilde{\lambda}^3, \tilde{\lambda}^4)$ を考える．

$$\tilde{\lambda}^0 \xrightarrow[O]{} (1, 1, 0, 0)$$

$$\tilde{\lambda}^1 \xrightarrow[O]{} (1, -1, 0, 0)$$

$$\tilde{\lambda}^2 \xrightarrow[O]{} (0, 0, 1, -1)$$

$$\tilde{\lambda}^3 \xrightarrow[O]{} (0, 0, 1, 1)$$

$\{\tilde{\lambda}^{\beta}\}$ は $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ の双対基底ではないことに注意せよ．

(a)　任意の $\tilde{p}$ に対して，$\tilde{p} \neq \tilde{p}(\vec{e}_{\alpha})\tilde{\lambda}^{\alpha}$ であることを示せ．

(b)　$\tilde{p} \xrightarrow[O]{} (1, 1, 1, 1)$ とするとき，次のようになる数 l_{α} を見つけよ．

$$\tilde{p} = l_{\alpha}\tilde{\lambda}^{\alpha}$$

これらの数は，$\tilde{p}$ の $\{\tilde{\lambda}^{\alpha}\}$ 上の成分である．

【表記法】{ }はセットを表す．書き下すとき( )を使う．

基底 1 形式（双対基底）を $\{\tilde{\omega}^{\alpha}\}$ とする．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(a)

$\{\vec{e}_{\alpha}\}$ の双対基底を $\{\tilde{\omega}^{\alpha}\}$ とする．$\tilde{p}$ の成分は，

$$p_{\alpha} = \tilde{p}(\vec{e}_{\alpha}) \quad (3.7)$$

であるから，$\tilde{p}$ の双対基底 $\{\tilde{\omega}^{\alpha}\}$ 上の成分表示は，

$$\tilde{p} = p_{\alpha}\tilde{\omega}^{\alpha} = \tilde{p}(\vec{e}_{\alpha})\tilde{\omega}^{\alpha}$$

となる．一方，$\tilde{p}$ の基底 $\{\tilde{\lambda}^{\alpha}\}$ 上の成分表示

$$\tilde{p} = l_{\alpha}\tilde{\lambda}^{\alpha}$$

とすると，基底が明らかに異なるから，

$$l_{\alpha} \neq p_{\alpha} = \tilde{p}(\vec{e}_{\alpha}), \quad \tilde{p} \neq \tilde{p}(\vec{e}_{\alpha})\tilde{\lambda}^{\alpha}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　これは，問題(a)の例証である．

次の４連立１次方程式をクラーメルの公式で解く．

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_0\\l_1\\l_2\\l_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-4$$

$$l_0=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\1&0&1&-1\\1&0&1&1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-4}{-4}=1$$

$$l_1=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&-1\\0&1&1&1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}}{\Delta}=0$$

$$l_2=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&-1&1&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}}{\Delta}=1$$

$$l_3=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0&1\\1&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}}{\Delta}=0$$

$$\tilde{l}\xrightarrow[O]{}(-4,1,0,1)$$

（3.13）

7　式（3.13）を証明せよ．

$$\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}}=\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\tilde{\omega}^{\beta} \qquad (3.13)$$

基底１形式の変換式は，

$$\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}}=\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\tilde{\omega}^{\beta} \qquad (3.13)$$

この式の意味するところは，

O 系（観測系）から $\bar{O}$ 系への座標変換では，

・基底１形式はベクトルの成分と同じ変換行列を使い，

・１形式の成分は基底ベクトルと同じ逆変換行列を使う．

$\bar{O}$ 系から O 系（観測系）への座標変換では，

・基底１形式はベクトルの成分と同じ逆変換行列を使い，

・１形式の成分は基底ベクトルと同じ変換行列を使う．

基底ベクトルの変換式は，逆変換行列を使って，

$$\vec{e}_{\bar{\mu}}=\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\mu}}\vec{e}_{\nu}$$

変換先での基底ベクトルを基底１形式へ写像する．

$$\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}}(\vec{e}_{\bar{\mu}})=\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\mu}}\tilde{\omega}^{\beta}(\vec{e}_{\nu})$$

$$=diag(1,1,1,1)diag(1,1,1,1)=diag(1,1,1,1)=\delta^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\mu}}$$

双対基底であることが確認できたので，与式が正しいことが証明された．

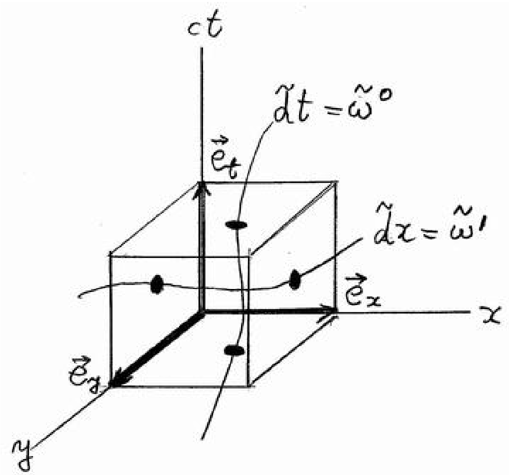
()

8　系Oの基底1形式$\tilde{d}t$と$\tilde{d}x$を描け.

【表記法】ミンコフスキー時空は，他書では，x^0, x^1, x^2, x^3軸で描くが，シュッツ著では，ct, x, y, z軸で描くことが多い．適宜使い分ける．自然単位では，$x^0 = t$，SI単位では，$x^0 = ct$であることに注意.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

１形式は表面の列のイメージであり，ベクトルとの縮約は矢が貫く表面の数である．１形式が大きいほど貫く表面の数は多い.



()

9　図3.5は，ある金属板上の温度Tの等しい（等温）曲線を示している．図の点PとQで，勾配$\tilde{d}T$の成分を評価せよ．（ヒント：その成分は基底ベクトルとの縮約であり，基底ベクトルが交差する等温曲線の数で評価される．）

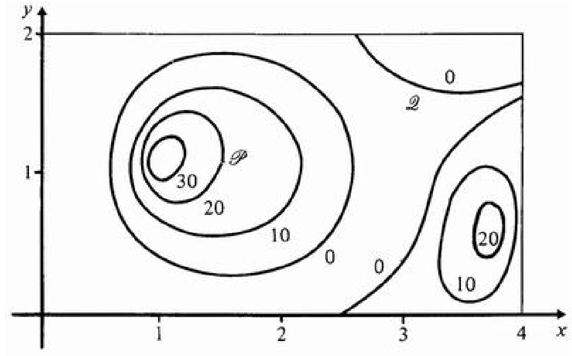


図3.5　非一様に熱せられた金属板の等温曲線

$\tilde{d}T(P) \to (-15,-15)$

$\tilde{d}T(Q) \to (0,0)$

（3.18）

10　(a)　座標$\{x^\alpha\}$をもつ系Oが与えられたとき，次式を示せ．

$$\partial x^\alpha / \partial x^\beta = \delta^\alpha{}_\beta$$

(b)　任意の二つの系の間には，次の式が成り立つ．

$$\partial x^\beta / \partial x^{\bar\alpha} = \Lambda^\beta{}_{\bar\alpha} \qquad (3.18)$$

(a)と合成関数の微分の規則から次式を示せ．

$$\Lambda^\beta{}_{\bar\alpha}\Lambda^{\bar\alpha}{}_\mu = \delta^\beta{}_\mu$$

(a)　偏微分の定義から，

when　$\alpha \neq \beta$，$\partial x^\alpha / \partial x^\beta = 0$

when　$\alpha = \beta$，$\partial x^\alpha / \partial x^\beta = 1$

したがって，与式が証明できた．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　これは，逆変換行列は変換行列の逆行列であることを意味する．

$$\Lambda^\beta{}_{\bar\alpha}\Lambda^{\bar\alpha}{}_\mu = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\bar\alpha}}\frac{\partial x^{\bar\alpha}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta^\beta{}_\mu$$

（3.14）（3.15）（3.18）

11　記法$\partial\phi / \partial x^\alpha = \phi_{,\alpha}$を使って，式（3.14），（3.15），（3.18）を書き直せ．

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \frac{\partial\phi}{c\partial t}\frac{c\partial t}{\partial\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\tau}$$

$$= \frac{\partial\phi}{c\partial t}U^0 + \frac{\partial\phi}{\partial x}U^1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}U^2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}U^3 \qquad (3.14)$$

$$\tilde{d}\phi \underset{O}{\longrightarrow} \left(\frac{\partial\phi}{c\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \qquad (3.15)$$

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\bar\alpha}} = \Lambda^\beta{}_{\bar\alpha} \qquad (3.18)$$

【表記法】ミンコフスキー時空は，他書では，x^0, x^1, x^2, x^3軸で描くが，シュッツ著では，ct, x, y, z軸で描くことが多い．適宜使い分ける．自然単位では，$x^0 = t$，SI 単位では，$x^0 = ct$であることに注意．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \frac{\partial\phi}{c\partial t}\frac{c\partial t}{\partial\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\tau}$$

$$= \frac{\partial\phi}{c\partial t}U^0 + \frac{\partial\phi}{\partial x}U^1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}U^2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}U^3 \qquad (3.14)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \phi_{,\alpha}U^\alpha$$

$$\tilde{d}\phi \underset{O}{\longrightarrow} \left(\frac{\partial\phi}{c\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \qquad (3.15)$$

$$\tilde{d}\phi \underset{O}{\longrightarrow} (\phi_{,0}, \phi_{,1}, \phi_{,2}, \phi_{,3})$$

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\bar\alpha}} = \Lambda^\beta{}_{\bar\alpha} \qquad (3.18)$$

$$x^\beta{}_{,\bar\alpha} = \Lambda^\beta{}_{\bar\alpha}$$

（）

12　S を３次元空間における２次元面 $x=0$ とし，$\tilde{n}\neq 0$ を，S の垂直１形式とする．

(a)　$\vec{V}$ を S に接しないベクトルとすると，$\tilde{n}(\vec{V})\neq 0$ であることを示せ．

(b)　$\tilde{n}(\vec{V})>0$ とすると，$\vec{V}$ と同じ S の側を指している任意の $\vec{W}$ に対して（すなわち，その x 成分が V^x と同じ符号をもつ任意の $\vec{W}$），$\tilde{n}(\vec{W})>0$ であることを示せ．

(c)　S の任意の垂直１形式は，$\tilde{n}$ の定数倍であることを示せ．

(d)　以上のことを４次元時空の任意の３次元表面に対して一般化せよ．

(a)　$\vec{V}$ を S の接ベクトルとすると，$\tilde{n}(\vec{V})=0$ である．接ベクトルでないと，$\tilde{n}(\vec{V})\neq 0$ である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　$\vec{T}$ を S の接ベクトルとすると，

$$\vec{W}=\alpha\vec{V}+\vec{T}\,,\quad(\alpha>0)$$

と表せる．よって，

$$\tilde{n}(\vec{W})=\alpha\tilde{n}(\alpha\vec{V}+\vec{T})=\alpha\tilde{n}(\vec{V})$$

であり，同符号となる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　S は $x=0$ であるので $y-z$ 平面である．その接ベクトルを

$$\vec{T}\to(0,b,c)$$

とする．$\tilde{n}$ と任意の垂直１形式 $\tilde{m}$ について，

$$\tilde{n}(\vec{T})=0\,,\quad\tilde{m}(\vec{T})=0$$

であるから，

$$\tilde{n}\to(a,0,0)\,,\quad\tilde{m}\to(d,0,0)$$

したがって，S の任意の垂直１形式は，$\tilde{n}$ の定数倍である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　局所的に，デカルト座標とデカルト基底を導入する．

()

13　幾何学的あるいは代数的議論によって，$\tilde{d}f$ が $f=\mathrm{Const.}$ の面に対して垂直であることを示せ．

勾配を等高線のイメージで考える．

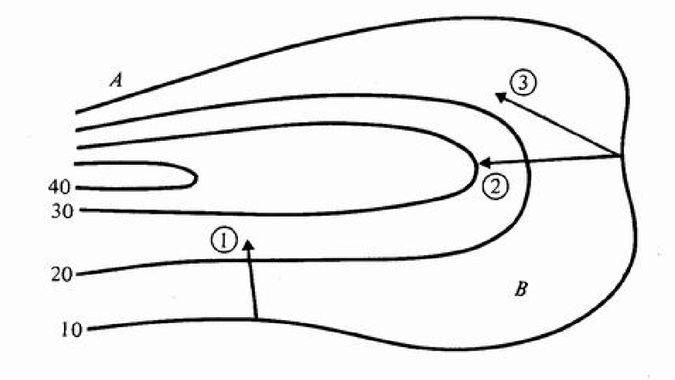


図 3.3　地形図は勾配一形式（局所的な等高線）を例示している．任意の経路（矢）に沿っての高さの変化は，その矢が交差する線の数である．

f を高度として，勾配の成分は，

$$\tilde{d}f \xrightarrow[O]{} \left(\frac{\partial f}{\partial x^0},\frac{\partial f}{\partial x^1},\frac{\partial f}{\partial x^2},\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)=\left(\phi_{,0},\phi_{,1},\phi_{,2},\phi_{,3}\right)$$

任意の経路 $\Delta\vec{x}$ に沿っての高さの変化 Δf は，$\Delta\vec{x}$ 上での $\tilde{d}f$ の値，すなわち，$\Delta\vec{x}$ と $\tilde{d}f$ との縮約である．

$$\Delta f=\tilde{d}f(\Delta\vec{x})=\frac{\partial f}{\partial x^i}\Delta x^i$$

$f=\mathrm{Const.}$ ならば，$\Delta f=0$ なので，$\Delta\vec{x}$ 上での $\tilde{d}f$ の値がゼロになり，垂直といえる．

()

14　$\tilde{p}\xrightarrow[O]{}(1,1,0,0)$ と $\tilde{q}\xrightarrow[O]{}(-1,0,1,0)$ を二つの 1 形式とする．二つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ を変数として使って，$\tilde{p}\otimes\tilde{q}\neq\tilde{q}\otimes\tilde{p}$ を示せ．次に $\tilde{p}\otimes\tilde{q}$ の成分を見つけよ．

直接書き下すと，

$$\tilde{p}\otimes\tilde{q}=p_\alpha q_\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}\otimes\tilde{p}=q_\alpha p_\beta=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

（3.21）～（3.26）

15　式（3.23）から式（3.24）に至る理由づけをせよ．

$$\boldsymbol{f} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha\beta} \qquad (3.23)$$

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \delta^\alpha{}_\mu \delta^\beta{}_\nu \qquad (3.24)$$

４次元で考える．

（0,2）テンソルは，２個のベクトルから実数への関数であり，その成分は，4×4＝16 個ある．

$$f_{\alpha\beta} = \boldsymbol{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) \qquad (3.21)$$

任意のベクトル上の f の値は，

$$\boldsymbol{f}(\vec{A}, \vec{B}) = \boldsymbol{f}(A^\alpha \vec{e}_\alpha, B^\beta \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta \boldsymbol{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$$

$$= A^\alpha B^\beta f_{\alpha\beta} \qquad (3.22)$$

（0,2）テンソルを基底で定義すると，

$$\boldsymbol{f} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha\beta} \qquad (3.23)$$

【ポイント】成分×基底が 16 項あると言っているに過ぎない． $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ は 16 個の基底を表している．

この基底を定義できるならば，（3.21）から，

$$f_{\mu\nu} = \boldsymbol{f}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu)$$

（3.22）が成り立つためには，

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \delta^\alpha{}_\mu \delta^\beta{}_\nu \qquad (3.24)$$

でなければならない． $\delta^\alpha{}_\mu$ は $\tilde{\omega}^\alpha$ の $\vec{e}_\mu$ での値であり， $\delta^\beta{}_\nu$ は $\tilde{\omega}^\beta$ の $\vec{e}_\nu$ での値であるので，

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta} = \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta \qquad (3.25)$$

となり， $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ は（0,2）テンソルの基底となりうる．

任意の（0,2）テンソルは次のように書くことができる．

◆ $$\boldsymbol{f} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta \qquad (3.26)$$

【ポイント】⊗記号は外積である．４項×４項が 16 項になる．メトリックテンソルは関与しない．問題 14 を参照のこと．

（3.29）～（3.34）

16　(a)　次式で定義されるテンソルが，対称テンソルであることを示せ．

◇　$$\boldsymbol{h}_{(S)}(\vec{A},\vec{B})=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{B})+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B},\vec{A}) \qquad (3.69)$$

(b)　次式で定義されるテンソルが，反対称テンソルであることを示せ．

◇　$$\boldsymbol{h}_{(A)}(\vec{A},\vec{B})=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{B})-\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B},\vec{A}) \qquad (3.70)$$

(c)　練習問題 14 で定義された $\tilde{p}\otimes\tilde{q}$ の対称部分と反対称部分の成分を見つけよ．

(d)　h が反対称テンソルなら，任意のベクトル $\vec{A}$ に対して

$$\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{A})=0$$

であることを証明せよ．

(e)　$\boldsymbol{h}_{(S)}$ と $\boldsymbol{h}_{(A)}$ の独立な成分の数を求めよ．

(a)

$$\boldsymbol{h}_{(S)}(\vec{B},\vec{A})=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B},\vec{A})+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{B})=\boldsymbol{h}_{(S)}(\vec{A},\vec{B})$$

ゆえに，対称テンソルである．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

$$\boldsymbol{h}_{(A)}(\vec{B},\vec{A})=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B},\vec{A})-\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{B})=-\boldsymbol{h}_{(A)}(\vec{A},\vec{B})$$

ゆえに,反対称テンソルである．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　式（3.31）を使って，

$$\tilde{p}\otimes\tilde{q}_{(\alpha\beta)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

式（3.34）を使って，

$$\tilde{p}\otimes\tilde{q}_{[\alpha\beta]}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　問題(b)の結果を使って，

$$\boldsymbol{h}_{(A)}(\vec{A},\vec{A})=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{A})-\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{A})=0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(e)　対称テンソルは，独立な成分は，10 個．

$$\boldsymbol{h}_{(S)}=\begin{pmatrix}h_{11}&a&b&c\\a&h_{22}&d&e\\b&d&h_{33}&f\\c&e&f&h_{44}\end{pmatrix}$$

反対称テンソルは，独立な成分は，6 個．

$$\boldsymbol{h}_{(A)}=\begin{pmatrix}0&a&b&c\\-a&0&d&e\\-b&-d&0&f\\-c&-e&-f&0\end{pmatrix}$$

()

17　(a)　h を任意の二つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ に対して，次の性質をもつ（0,2）テンソルとする．

$$\boldsymbol{h}(\quad,\vec{A})=\alpha\boldsymbol{h}(\quad,\vec{B})$$

ここで α は，$\vec{A}$ と $\vec{B}$ に依存する数である．このとき，次のような 1 形式 $\tilde{p}$ と $\tilde{q}$ が存在することを示せ．

$$\boldsymbol{h}=\tilde{p}\otimes\tilde{q}$$

(b)　$\boldsymbol{T}$ を（1,1）テンソル，$\tilde{\omega}$ を 1 形式，$\vec{v}$ をベクトル，$\boldsymbol{T}(\tilde{\omega};\vec{v})$ を $\boldsymbol{T}$ の $\tilde{\omega}$ と $\vec{v}$ 上での値とする．このとき，$\boldsymbol{T}(\quad;\vec{v})$ はベクトル，$\boldsymbol{T}(\tilde{\omega};\quad)$ は 1 形式である．すなわち，（1,1）テンソルは，ベクトルからベクトルへの，1 形式から 1 形式への写像を与えることを示せ．

(a)　与式は両辺とも 1 形式であり，

$$\boldsymbol{h}(\quad,\vec{B})=b\tilde{p}$$

とすると，

$$\boldsymbol{h}(\quad,\vec{A})=a\tilde{p}\quad \text{where}\quad a=\alpha b$$

となる．両辺とも実数との掛算になっているので，

$$\boldsymbol{h}(\quad,\vec{B})=(\tilde{q}(\vec{B}))\tilde{p}=b\tilde{p}$$

$$\boldsymbol{h}(\quad,\vec{A})=(\tilde{q}(\vec{A}))\tilde{p}=a\tilde{p}$$

となる $\tilde{q}$ が存在するので，与式は次のような形に書ける．

$$\boldsymbol{h}=\tilde{p}\otimes\tilde{q}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

$\boldsymbol{T}(\quad;\vec{v})$ は，空スロットに 1 形式の変数を入れると実数になるので，ベクトルである．

$\boldsymbol{T}(\quad;\quad)$ は，右スロットにベクトル変数を入れると，$\boldsymbol{T}(\quad;\vec{v})$ というベクトルになるので，ベクトルからベクトルへの写像を与えるといえる．

$\boldsymbol{T}(\tilde{\omega};\quad)$ は，空スロットにベクトルの変数を入れると実数になるので，1 形式

である．

$\boldsymbol{T}(\quad;\quad)$ は，左スロットに 1 形式の変数を入れると，$\boldsymbol{T}(\tilde{\omega};\quad)$ という 1 形式になるので，1 形式から 1 形式への写像を与えるといえる．

（3.39）（3.43）

18　(a)　メトリックテンソルによって次のベクトルから写像された 1 形式を見つけよ．

$$\vec{A} \xrightarrow[O]{} (1, 0, -1, 0)\,,\quad \vec{B} \xrightarrow[O]{} (0, 1, 1, 0)\,,$$

$$\vec{C} \xrightarrow[O]{} (-1, 0, -1, 0)\,,\quad \vec{D} \xrightarrow[O]{} (0, 0, 1, 1)$$

(b)　次の 1 形式からメトリックテンソルの逆によって写像されたベクトルを見つけよ．

$$\tilde{p} \xrightarrow[O]{} (3, 0, -1, -1)\,,\quad \tilde{q} \xrightarrow[O]{} (1, -1, 1, 1)\,,$$

$$\tilde{r} \xrightarrow[O]{} (0, -5, -1, 0)\,,\quad \tilde{s} \xrightarrow[O]{} (-2, 1, 0, 0)$$

(a)　式（3.39）（3.42）を使って，時間成分 A^0 等のみ符号を反転する．

$$\tilde{A} \xrightarrow[O]{} (-1, 0, -1, 0)\,,\quad \tilde{B} \xrightarrow[O]{} (0, 1, 1, 0)\,,$$

$$\tilde{C} \xrightarrow[O]{} (1, 0, -1, 0)\,,\quad \tilde{D} \xrightarrow[O]{} (0, 0, 1, 1)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　式（3.43）を使って，時間成分 p_0 等のみ符号を反転する．

$$\vec{p} \xrightarrow[O]{} (-3, 0, -1, -1)\,,\quad \vec{q} \xrightarrow[O]{} (-1, -1, 1, 1)\,,$$

$$\vec{r} \xrightarrow[O]{} (0, -5, -1, 0)\,,\quad \vec{s} \xrightarrow[O]{} (2, 1, 0, 0)$$

（3.52）（3.53）

19　(a)　行列の掛算をすることにより，$\{\eta^{\alpha\beta}\}$ が $\{\eta_{\alpha\beta}\}$ の逆であることを示せ．

(b)　式（3.53）を示せ．

$$\tilde{p}\cdot\tilde{q} = -p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 \qquad (3.53)$$

(a)

$$\left(\eta^{\alpha\beta}\right)\left(\eta_{\alpha\beta}\right) = diag(1, 1, 1, 1)$$

を書き下して，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　1 形式のスカラー積

$$\tilde{p}\cdot\tilde{q} = \frac{1}{2}[(\tilde{p}+\tilde{q})^2 - \tilde{p}^2 - \tilde{q}^2] \qquad (3.52)$$

$$= \frac{1}{2}[-(p_0+q_0)^2 + (p_1+q_1)^2 + (p_2+q_2)^2 + (p_3+q_3)^2$$

$$-(-p_0{}^2 + p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2) - (-q_0{}^2 + q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2)]$$

$$\tilde{p}\cdot\tilde{q} = -p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 \qquad (3.53)$$

()

20　３次元ユークリッド空間のデカルト座標では，ベクトルと１形式の成分は等しいので，ふつうそれらを区別しない．このことを二段階にわたって示せ．

(a)　もし，行列$\{\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\}$がその逆の転置行列に等しい（このような行列を直交行列という）なら，次の二つの変換は同じものであることを示せ．

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta}$$

および

$$P_{\bar{\beta}} = \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}} P_{\alpha} \qquad （P_{\bar{\mu}} = \Lambda^{\nu}{}_{\bar{\mu}} P_{\nu}）$$

(b)　このような空間のメトリックは，成分$\{\delta_{ij}, i, j = 1,\cdots,3\}$成分をもつ．一つのデカルト座標から，別のデカルト座標への変換が次式に従い，その式は$\{\Lambda^{k}{}_{\bar{i}}\}$が直交行列であることを意味することを示せ．

$$\delta_{\bar{i}\bar{j}} = \Lambda^{k}{}_{\bar{i}} \Lambda^{l}{}_{\bar{j}} \delta_{kl}$$

特殊相対論で，これに対応することについては，練習問題 32 を見よ．

(a)

問題の２式の$\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}$（逆変換行列）は１式の$\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}$（変換行列）の転置行列を意味していないので，混乱のないように，２式を（　）内のように書き換えておく．

直交行列は次を意味する．

$$\left(\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\right)^{-1} = \left(\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\right)^{T}$$

逆変換行列は変換行列の逆行列であるから，

$$\left(\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\nu}}\right) = \left(\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\right)^{-1} = \left(\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\right)^{T}$$

結果的に，与式の２式の逆変換行列は，１式の変換行列の転置行列となり，１式ではフリーは行の$\bar{\alpha}$，ダミーは列のβであり，２式ではフリーは列の$\bar{\mu}$，ダミーは行のνであるので，変換は同じものとなる．

2015.06.12
3　特殊相対論におけるテンソル解析　3.10　練習問題

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

問題とは別に，系Oから系$\overline{O}$へのローレンツ変換をミンコフスキー時空で考える．与式の１式は，ベクトルの成分または基底１形式の変換式であり，変換行列は$\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} = \Lambda(v)$であり，

$$\begin{pmatrix} A^{\bar{0}} \\ A^{\bar{1}} \\ A^{\bar{2}} \\ A^{\bar{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}(v) & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{0} \\ A^{1} \\ A^{2} \\ A^{3} \end{pmatrix}$$

を表し，フリーは行の$\bar{\alpha}$，ダミーは列のβである．

与式の２式は，１形式の成分またはベクトル基底の変換式であり，逆変換行列は$\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\mu}} = \Lambda(-v)$であり，

$$\begin{pmatrix} P_{\bar{0}} & P_{\bar{1}} & P_{\bar{2}} & P_{\bar{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{0} & P_{1} & P_{2} & P_{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \Lambda^{\nu}{}_{\bar{\mu}}(-v) & \\ & & \end{pmatrix}$$

を表し，フリーは列の$\bar{\mu}$，ダミーは行のνである．

このように，ミンコフスキー時空では与式の１式の変換行列と２式の逆変換行列は異なるものである．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

（0,2）テンソルの変換式を求める．

$$\delta_{\bar{i}\bar{j}} = \delta(\vec{e}_{\bar{i}}\,;\vec{e}_{\bar{j}}) = \delta(\Lambda^{k}{}_{\bar{i}}\vec{e}_{k}\,;\Lambda^{l}{}_{\bar{j}}\vec{e}_{l}) = \Lambda^{k}{}_{\bar{i}}\Lambda^{l}{}_{\bar{j}}\delta_{kl}$$

ここで，$\Lambda^{k}{}_{\bar{i}} = \Lambda^{l}{}_{\bar{j}}$であり，$\bar{i}$，$\bar{j}$がフリー，$k$，$l$がダミーであるから，

$$[\Lambda^{k}{}_{\bar{i}}]^{T}[\Lambda^{k}{}_{\bar{i}}] = diag(1,1,1)$$

したがって，$\{\Lambda^{k}{}_{\bar{i}}\}$は直交行列である．

()

21　(a)　$ct-x$ 平面の直線 $ct=0$，$ct=1$，$x=0$，$x=1$ で囲まれる領域を考える．おのおのの境界について，単位垂直 1 形式とそれに付随するベクトルを見つけよ．

(b)　座標値 $(1,0)$，$(1,1)$，$(2,1)$ をもつ事象を結ぶ直線で囲まれた領域を考える．この領域のヌル境界の外向きの垂直 1 形式と，それに付随するベクトルを見つけよ．

(a)

$ct=0$ 平面の接ベクトルを

$$\vec{V}\to(0,a,b,c)$$

とすると，単位垂直 1 形式と付随するベクトルは，

$$\tilde{n}\to(1,0,0,0)$$

$$\vec{N}\to(-1,0,0,0)\quad（内向き）$$

$ct=1$ 平面の接ベクトルを

$$\vec{V}\to(0,a,b,c)$$

とすると，単位垂直 1 形式と付随するベクトルは，

$$\tilde{n}\to(1,0,0,0)$$

$$\vec{N}\to(-1,0,0,0)\quad（内向き）$$

$x=0$ 平面の接ベクトルを

$$\vec{V}\to(a,0,b,c)$$

とすると，単位垂直 1 形式と付随するベクトルは，

$$\tilde{n}\to(0,1,0,0)$$

$$\vec{N}\to(0,1,0,0)\quad（外向き）$$

$x=1$ 平面の接ベクトルを

$$\vec{V}\to(a,0,b,c)$$

とすると，単位垂直 1 形式と付随するベクトルは，

$$\tilde{n}\to(0,1,0,0)$$

$$\vec{N}\to(0,1,0,0)\quad（外向き）$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

ヌル境界面は，光円錐のことであり，

$$(ct)^2=x^2+y^2+z^2$$

となる．この面に垂直ベクトルの例として，

$$\vec{N}\to(1,-1,0,0)\quad（外向き）$$

$$\vec{N}\to(-1,1,0,0)\quad（内向き）$$

外向きの垂直ベクトルに付随する垂直 1 形式は，

$$\tilde{n}\to(-1,-1,0,0)$$

接ベクトルの例として

$$\vec{V}\to(0,0,a,b)$$

（3.6）

22　ベクトルを一番最初に定義するかわりに，図 3.4 のような描像でもって 1 形式を定義することから始めたとする．そうするとベクトルは， 1 形式の線形実数値関数として導入され，ベクトル代数は（3.6a）と（3.6b）に類似な関係（すなわち，矢印と波線を入れ替えた関係）によって定義されるだろう．このように定義されたベクトルの全体が，ベクトル空間をつくることを示せ．これは，ベクトルと 1 形式の間の双対性の別の例である．

$$\tilde{s} = \tilde{p} + \tilde{q}$$

$$\tilde{r} = \alpha\tilde{p} \qquad (3.6a)$$

$$\tilde{s}(\vec{A}) = \tilde{p}(\vec{A}) + \tilde{q}(\vec{A})$$

$$\tilde{r}(\vec{A}) = \alpha\tilde{p}(\vec{A}) \qquad (3.6b)$$

（3.6a）を入れ換えると，

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{D} = \alpha\vec{A}$$

（3.6b）を入れ換えると，

$$\vec{C}(\tilde{p}) = \vec{A}(\tilde{p}) + \vec{B}(\tilde{p})$$

$$\vec{D}(\tilde{p}) = \alpha\vec{A}(\tilde{p})$$

ベクトルの和がベクトルになり，ベクトルの実数倍がベクトルになる．これはベクトル空間の定義そのものである．

（）

23　(a)　ある固定された M，N に対し，すべての（M,N）テンソルの集合はベクトル空間を作ることを示せ．（それらのテンソルの加法と定数による乗法を定義する．）

(b)　この空間の一つの基底が次の集合で与えられることを示せ．

$$\{\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta \otimes \cdots \otimes \vec{e}_\gamma \otimes \tilde{\omega}^\mu \otimes \tilde{\omega}^\nu \otimes \cdots \otimes \tilde{\omega}^\lambda\}$$

←M ベクトル→　　←　N 1 形式　→

（二つ以上の 1 形式の外積を定義しなければならない．）

(a)

ベクトルと 1 形式のテンソル積の和を定義する．

$$\vec{U} \otimes \vec{V} + \vec{U} \otimes \vec{W} = \vec{U} \otimes (\vec{V} + \vec{W})$$

$$\tilde{p} \otimes \tilde{q} + \tilde{p} \otimes \tilde{r} = \tilde{p} \otimes (\tilde{q} + \tilde{r})$$

ベクトルと 1 形式のテンソル積の実数倍を定義する．

$$\alpha(\vec{U} \otimes \vec{V}) = (\alpha\vec{U}) \otimes \vec{V}$$

$$\alpha(\tilde{p} \otimes \tilde{q}) = (\alpha\tilde{p}) \otimes \tilde{q}$$

（M,N）テンソルは，

$$\vec{U} \otimes \cdots \otimes \vec{V} \otimes \tilde{p} \otimes \cdots \otimes \tilde{q}$$

←　M　→　←　N　→

となる．テンソル積の和がテンソル積になり，テンソル積の実数倍がテンソル積になることは，テンソルの和がテンソルになり，テンソルの実数倍がテンソルになることを意味する．ゆえに，（M,N）テンソルの集合はベクトル空間をつくる．

＋＋

(b)　（0,2）テンソルの基底は，

$$\tilde{\omega}^\mu \otimes \tilde{\omega}^\nu$$

（2,0）テンソルの基底は，

$$\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta$$

自然な拡張から与式が得られる．

（3.60）

24　(a)　ある（2,0）テンソル $M^{\alpha\beta}$ の成分が行列で次のように与えられているとき，以下の量を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(i)　対称テンソル $M^{(\alpha\beta)}$ と反対称テンソル $M^{[\alpha\beta]}$ の成分

(ii)　$M^{\alpha}{}_{\beta}$ の成分

(iii)　$M_{\alpha}{}^{\beta}$ の成分

(iv)　$M_{\alpha\beta}$ の成分

(b)　その成分が $M^{\alpha}{}_{\beta}$ であるような(1,1)テンソルについて, その対称部分, 反対称部分を考えることに意味があるか？もし，あるならそれらを定義し，そうでないなら，その理由を述べよ．

(c)　メトリックテンソルの添字を上げて，次式を示せ．

◆　$$\eta^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} \tag{3.60}$$

(a)

(i)

$$M^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$M^{\alpha}{}_{\beta} = \eta_{\beta\mu} M^{\alpha\mu}$$

$M^{\alpha\beta}$ の行がフリー，列がダミーであることに注意して，

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$M_{\alpha}{}^{\beta} = \eta_{\alpha\mu} M^{\mu\beta}$$

$M^{\alpha\beta}$ の列がフリー，行がダミーであることに注意して，

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$M_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\nu\beta} M^{\mu\nu} = \eta_{\alpha\mu} M^{\mu}{}_{\beta}$$

(ii)を使って，$M^{\alpha}{}_{\beta}$ の列がフリー，行がダミーであることに注意して，

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

$$M^{\alpha}{}_{\beta} = \vec{A} \otimes \tilde{p}$$

を仮定して，

$$\vec{A}(\tilde{q}) \otimes \tilde{p}(\vec{B})$$

の変数を交換すると，

$$\vec{A}(\vec{B}) \otimes \tilde{p}(\tilde{q})$$

これは無意味である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)

$$\eta^{\alpha}{}_{\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta_{\mu\beta} = diag(1,1,1,1) = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$$

()

25　$\boldsymbol{A}$ が（2,0）テンソル，$\boldsymbol{B}$ が（0,2）テンソルなら，

$$A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}$$

が系に依存しない，すなわちスカラーになることを示せ.

座標変換すると，

$$A^{\bar{\mu}\bar{\nu}}B_{\bar{\mu}\bar{\nu}}=\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\alpha}\Lambda^{\bar{\nu}}{}_{\beta}A^{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\mu}}\Lambda^{\beta}{}_{\bar{\nu}}B_{\alpha\beta}=A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}$$

$$\text{where}\quad \Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\mu}}=\Lambda^{\bar{\nu}}{}_{\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\bar{\nu}}=diag(1,1,1,1)$$

座標変換しても，その値は変わらないことが示された.

2015.06.12
3　特殊相対論におけるテンソル解析　3.10　練習問題

()

26　$\boldsymbol{A}$ を反対称（2,0）テンソル，$\boldsymbol{B}$ を対称（0,2）テンソル，$\boldsymbol{C}$ を任意の（0,2）テンソル，$\boldsymbol{D}$ を任意の（2,0）テンソルとするとき，以下を証明せよ；

(a)　$A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}=0$

(b)　$A^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}=A^{\alpha\beta}C_{[\alpha\beta]}$

(c)　$B_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta}=B_{\alpha\beta}D^{(\alpha\beta)}$

(a)　$A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}=-A^{\beta\alpha}B_{\alpha\beta}=-A^{\beta\alpha}B_{\beta\alpha}=-A^{\mu\nu}B_{\mu\nu}=-A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}$

$2A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}=0$

(b)　$A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}=A^{\alpha\beta}C_{(\alpha\beta)}+A^{\alpha\beta}C_{[\alpha\beta]}=A^{\alpha\beta}C_{[\alpha\beta]}$

(c)　$B_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta}=B_{\alpha\beta}D^{(\alpha\beta)}+B_{\alpha\beta}D^{[\alpha\beta]}=B_{\alpha\beta}D^{(\alpha\beta)}$

（）

27　(a)　$\boldsymbol{A}$ が反対称な（2,0）テンソルとする．メトリックテンソルを使って添字を下げた $\{A_{\alpha\beta}\}$ は，反対称な（0,2）テンソルの成分であることを示せ．

(b)　$V^{\alpha}=W^{\alpha}$ としたとき，$V_{\alpha}=W_{\alpha}$ となることを示せ．

(a)

$$A_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}A^{\alpha\beta}$$

$\eta_{\beta\nu}$ で β を下げるとき，

$$A^{\alpha}{}_{0}=-A^{\alpha 0},\ A^{\alpha}{}_{\beta}=A^{\alpha\beta}\quad(\beta=1,2,3)$$

$\eta_{\alpha\mu}$ で α を下げるとき，

$$A_{0\beta}=-A^{0}{}_{\beta},\ A_{\alpha\beta}=A^{\alpha}{}_{\beta}\quad(\alpha=1,2,3)$$

結果として，

$$A_{\alpha\beta}=-A^{\alpha\beta}\quad(\alpha=0,\ or\ \beta=0)$$
$$A_{\alpha\beta}=A^{\alpha\beta}\quad(\alpha,\beta=1,2,3)$$

行列の 1 行と 1 列の符号が反転している．ゆえに反対称のままである．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)

$$V^{\alpha}=\eta_{\alpha\mu}V^{\mu}=V_{\alpha},\quad W^{\alpha}=\eta_{\alpha\mu}W^{\mu}=W_{\alpha}$$

それぞれ時間成分の符号が反転しているだけなので，与式が証明された．

2015.06.12
3　特殊相対論におけるテンソル解析　3.10　練習問題

（3.65）（3.66）

28　式（3.65）から式（3.66）を導け．

$$\nabla_{\vec{U}}\boldsymbol{T}\equiv\frac{d\boldsymbol{T}}{d\tau}\equiv\left(T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}\tilde{\omega}^{\beta}\otimes\vec{e}_{\alpha}\right)U^{\gamma}\qquad(3.65)$$

$$\nabla\boldsymbol{T}\equiv T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}\tilde{\omega}^{\beta}\otimes\tilde{\omega}^{\gamma}\otimes\vec{e}_{\alpha}\qquad(3.66)$$

一方，$\boldsymbol{T}$ の勾配を定義する．

$$\nabla\boldsymbol{T}=\frac{d\boldsymbol{T}}{dx^{\gamma}}\tilde{d}x^{\gamma}\qquad（\tilde{d}x^{\gamma}\text{ は基底 1 形式}）$$
$$=\frac{d\boldsymbol{T}}{d\tau}\frac{d\tau}{dx^{\gamma}}\tilde{\omega}^{\gamma}$$

where $\vec{U}=\dfrac{dx^{\gamma}}{d\tau}$

式（3.65）を代入して，次式を得る．

$$\nabla\boldsymbol{T}\equiv T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}\tilde{\omega}^{\beta}\otimes\tilde{\omega}^{\gamma}\otimes\vec{e}_{\alpha}\qquad(3.66)$$

()

29　テンソルの微分は，ライプニッツの（積の）規則に従って，

$$\nabla(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}) = (\nabla\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\otimes(\nabla\boldsymbol{B})$$

となることを示せ.

$$\boldsymbol{A}\to\{A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\cdots}\},\quad \boldsymbol{B}\to\{B^{\mu\cdots}{}_{\nu\cdots}\}$$

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\to\{A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\cdots}B^{\mu\cdots}{}_{\nu\cdots}\}$$

とすると，与式が成り立つのは明白である.

2015.06.12
3　特殊相対論におけるテンソル解析　3.10　練習問題

()

30　ある系Oで，ベクトル場$\vec{U}$と$\vec{D}$の成分が

$$\vec{U}\to(1+t^2,\, t^2,\, \sqrt{2}t,\, 0)$$

$$\vec{D}\to(x,\, 5tx,\, \sqrt{2}t,\, 0)$$

であり，スカラー量ρが

$$\rho = x^2 + t^2 - y^2$$

であるとする．このとき，

(a)　$\vec{U}\cdot\vec{U}$，$\vec{U}\cdot\vec{D}$，$\vec{D}\cdot\vec{D}$を計算せよ．$\vec{U}$は４元ベクトル場であるとしてよいか？$\vec{D}$についてはどうか？

(b)　任意の時刻において$\vec{U}$を４元速度とする粒子の空間的速度vを求めよ．その速度は，$t\to0$，$t\to\infty$の極限でどうようにふるまうか？

(c)　αのすべてに対して，U_αを求めよ.

(d)　すべてのαとβに対して，$U^\alpha{}_{,\beta}$を求めよ.

(e)　すべてのβに対し，$U_\alpha U^\alpha{}_{,\beta}=0$であることを示せ．また，すべての$\beta$に対し，$U^\alpha U_{\alpha,\beta}=0$であることを示せ.

(f)　$D^\beta{}_{,\beta}$の値を計算せよ.

(g)　$(U^\alpha D^\beta)_{,\beta}$をすべての$\alpha$に対して計算せよ.

(h)　$U_\alpha(U^\alpha D^\beta)_{,\beta}$を計算し，設問(f)と比較せよ．答えが似ているのはなぜか？

(i)　$\rho_{,\alpha}$をすべてのαについて計算せよ．また，$\rho^{,\alpha}$も計算せよ.
（$\rho^{,\alpha}\equiv\eta^{\alpha\beta}\rho_{,\beta}$を思い出せ．）$\{\rho^{,\alpha}\}$は何の成分か？

(j)　$\nabla_{\vec{U}}\rho$，$\nabla_{\vec{U}}\vec{D}$，$\nabla_{\vec{D}}\rho$，$\nabla_{\vec{D}}\vec{U}$を計算せよ.

(a)　$\vec{U}\cdot\vec{U} = -(1+t^2)^2 + (t^2)^2 + (\sqrt{2}t)^2 = -1-2t^2-t^4+t^4+2t^2$
$= -1$　（自然単位で，４元速度場である．）

$$\vec{U}\cdot\vec{D} = -(1+t^2)x + t^2\cdot 5tx + \sqrt{2}t\cdot\sqrt{2}t = -x - t^2x + 5t^3x + 2t^2$$

$\vec{D}\cdot\vec{D} = -x^2 + 25t^2x^2 + 2t^2 \neq 1$　（自然単位で，４元速度場ではない．）

++++++++++++++++++++++++++++++++

(b)　$\beta_x = \dfrac{t^2}{1+t^2},\ \beta_y = \dfrac{\sqrt{2}t}{1+t^2},\ \beta_z = 0$

$$\beta = \sqrt{{\beta_x}^2 + {\beta_y}^2 + {\beta_z}^2} = \frac{\sqrt{(t^2)^2 + (\sqrt{2}t)^2}}{1+t^2} = \frac{\sqrt{t^4 + 2t^2}}{\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}}$$

$$\lim_{t\to 0}\beta = 0,\ \lim_{t\to\infty}\beta = 1$$

++++++++++++++++++++++++++++++++

(c)　$\tilde{U} \to (-1-t^2,\ t^2,\ \sqrt{2}t,\ 0)$

++++++++++++++++++++++++++++++++

(d)　$U^0{}_{,\beta} \to (2t,\ 0,\ 0,\ 0),\quad (\beta = 0, 1, 2, 3)$

$U^1{}_{,\beta} \to (2t,\ 0,\ 0,\ 0)$

$U^3{}_{,\beta} \to (\sqrt{2},\ 0,\ 0,\ 0)$

$U^3{}_{,\beta} \to (0,\ 0,\ 0,\ 0)$

$U^\alpha{}_{,0} \to (2t,\ 2t,\ \sqrt{2},\ 0),\quad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$

$U^\alpha{}_{,\beta} \to (0,\ 0,\ 0,\ 0),\quad (\alpha,\ \beta = 1, 2, 3)$

++++++++++++++++++++++++++++++++

(e)　$U_\alpha \to (-1-t^2,\ t^2,\ \sqrt{2}t,\ 0)$

$U^\alpha \to (1+t^2, t^2, \sqrt{2}t, 0)$

$U^\alpha{}_{,0} \to (2t,\ 2t,\ \sqrt{2},\ 0)$

$U^\alpha{}_{,1} = U^\alpha{}_{,2} = U^\alpha{}_{,3} \to (0,\ 0,\ 0,\ 0)$

$U_\alpha U^\alpha{}_{,0} = -2t - 2t^3 + 2t^3 + 2t = 0$

$U_\alpha U^\alpha{}_{,1} = 0$，　$U_\alpha U^\alpha{}_{,2} = 0$，　$U_\alpha U^\alpha{}_{,3} = 0$

++++++++++++++++++++++++++++++++

(f)　$D^0{}_{,0} = 0$，　$D^1{}_{,1} = 5t$，　$D^2{}_{,2} = 0$，　$D^3{}_{,3} = 0$，

2015.06.12
3　特殊相対論におけるテンソル解析　3.10　練習問題

$D^\beta{}_{,\beta} = 5t$

++++++++++++++++++++++++++++++++

(g)　$U^\alpha \to (1+t^2, t^2, \sqrt{2}t, 0)$

$D^\beta \to (x,\ 5tx,\ \sqrt{2}t,\ 0)$

$(U^\alpha D^0)_{,0} \to (x + t^2x,\ t^2x,\ \sqrt{2}tx,\ 0)_{,t} = (2tx,\ 2tx,\ \sqrt{2}x,\ 0)$

$(U^\alpha D^1)_{,1} \to (5tx + 5t^3x,\ 5t^3x,\ 5\sqrt{2}t^2x,\ 0)_{,x}$

$= (5t + 5t^3,\ 5t^3,\ 5\sqrt{2}t^2,\ 0)$

$(U^\alpha D^2)_{,2} \to (\sqrt{2}t + \sqrt{2}t^3x,\ \sqrt{2}t^3x,\ 2t^2,\ 0)_{,y} = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$

$(U^\alpha D^3)_{,3} \to (0,\ 0,\ 0,\ 0)$

$(U^\alpha D^\beta)_{,\beta} \to (2tx + 5t + 5t^3,\ 2tx + 5t^3,\ \sqrt{2}x + 5\sqrt{2}t^2,\ 0)$

また，次のように書ける．

$(U^\alpha D^\beta)_{,\beta} = U^\alpha{}_{,\beta}D^\beta + U^\alpha D^\beta{}_{,\beta}$

$= U^\alpha{}_{,0}D^0 + U^\alpha(5t)$

$\to (2t,\ 2t,\ \sqrt{2},\ 0)x + (1+t^2,\ t^2,\ \sqrt{2}t,\ 0)(5t)$

$= (2tx + 5t + 5t^3,\ 2tx + 5t^3,\ \sqrt{2}x + 5\sqrt{2}t^2,\ 0)$

++++++++++++++++++++++++++++++++

(h)　$U_\alpha(U^\alpha D^\beta)_{,\beta}$

$= (-1-t^2,\ t^2,\ \sqrt{2}t,\ 0)\cdot(2tx + 5t + 5t^3,\ 2tx + 5t^3,\ \sqrt{2}x + 5\sqrt{2}t^2,\ 0)$

$= -2tx - 5t - 5t^3 - 2t^3x - 5t^3 - 5t^5 + 2t^3x + 5t^5 + 2tx + 10t^3$

$= -5t$

++++++++++++++++++++++++++++++++

(i)　$\rho_{,\alpha} \to (2t,\ 2x,\ -2y,\ 0)$

$\rho^{,\alpha} \to (-2t,\ 2x,\ -2y,\ 0)$　（ベクトル勾配）

++++++++++++++++++++++++++++++++

(j)　$\nabla_{\vec{U}}\rho \to \{\rho_{,\alpha}U^\alpha\} = (2t,\ 2x,\ -2y,\ 0)\cdot(1+t^2,\ t^2,\ \sqrt{2}t,\ 0)$

$= 2t + 2t^3 + 2t^2x - 2\sqrt{2}ty$

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{D} \to \{D^{\alpha}{}_{,\beta}U^{\beta}\} = (D^{0}{}_{,1}U^{1},\ D^{1}{}_{,0}U^{0} + D^{1}{}_{,1}U^{1}, D^{2}{}_{,0}U^{0}{}_{,0})$$

$$= (t^{2}, 5x(1+t^{2}) + 5t^{3}, \sqrt{2}(1+t^{2})_{,0})$$

$$\nabla_{\vec{D}}\rho \to \{\rho_{,\alpha}D^{\alpha}\} = (2t, 2x, -2y, 0)\cdot(x, 5tx, \sqrt{2}t, 0)$$

$$= 2tx + 10tx^{2} - 2\sqrt{2}ty$$

$$\nabla_{\vec{D}}\vec{U} \to \{U^{\alpha}{}_{,\beta}D^{\beta}\} = (U^{0}{}_{,0}D^{0},\ U^{1}{}_{,0}D^{0}, U^{2}{}_{,0}D^{0}{}_{,0})$$

$$= (2tx, 2tx, \sqrt{2}x, 0)$$

()

31　時間的な単位４元ベクトル $\vec{U}$ とテンソル

$$\boldsymbol{P}_{\vec{U}} \equiv \boldsymbol{g} + \vec{U}\otimes\vec{U}$$

を考える．$P_{\vec{U}}$ が，任意のベクトル $\vec{V}$ を $\vec{U}$ に垂直な方向に射影する射影演算子であることを次のようにして示せ．成分が

$$V_{\perp}{}^{\alpha} = P^{\alpha}{}_{\beta}V^{\beta} = (\eta^{\alpha}{}_{\beta} + U^{\alpha}U_{\beta})V^{\beta}$$

であるベクトル $\vec{V}_{\perp}$ が

(a)　$\vec{U}$ に垂直であることを示せ．

(b)　また，このベクトルは，$\boldsymbol{P}$ を作用しても不変であること，つまり

$$V_{\perp\perp}{}^{\alpha} \equiv V_{\perp}{}^{\beta}P^{\alpha}{}_{\beta} = V_{\perp}{}^{\alpha}$$

となることを示せ．

(c)　任意のヌルでないベクトル $\vec{q}$ に対して, そのベクトルに垂直な方向への射影テンソルは

$$\boldsymbol{P}_{\vec{q}} = \boldsymbol{g} + \frac{\vec{q}\otimes\vec{q}}{\vec{q}\cdot\vec{q}}$$

である．ヌルベクトルの場合には，どういう形で表されるか？

(d)　$\vec{U}$ に垂直なベクトルに対しては，$P_{\vec{U}}$ がメトリックテンソルとなって，

$$\boldsymbol{P}_{\vec{U}}(\vec{V}_{\perp}, \vec{W}_{\perp}) = \boldsymbol{g}(\vec{V}_{\perp}, \vec{W}_{\perp})$$

$$= \vec{V}_{\perp}\cdot\vec{W}_{\perp}$$

であることを示せ．

(a)　$\vec{V}_{\perp}$ と $\vec{U}$ のスカラー積は,

$$\eta_{\alpha\gamma}V^{\alpha}{}_{\perp}U^{\gamma} = \eta_{\alpha\gamma}\eta^{\alpha}{}_{\beta}V^{\beta}U^{\gamma} + \eta_{\alpha\gamma}U^{\alpha}U_{\beta}V^{\beta}U^{\gamma}$$

$$= \eta_{\beta\gamma}V^{\beta}U^{\gamma} + U_{\alpha}U^{\alpha}U_{\beta}V^{\beta}$$

$$= U_{\beta}V^{\beta} + U_{\alpha}U^{\alpha}U_{\beta}V^{\beta}$$

$$= U_{\beta}V^{\beta}(1 + U_{\alpha}U^{\alpha})$$

$= 0$

where　$U_\alpha U^\alpha = -1$（自然単位で）

ゆえに，$\vec{V}_\perp$ と $\vec{U}$ とは垂直である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　$V_{\perp\perp}{}^\alpha \equiv V_\perp{}^\beta P^\alpha{}_\beta$

$= P^\beta{}_\gamma V^\gamma P^\alpha{}_\beta$

$= (\eta^\beta{}_\gamma + U^\beta U_\gamma) V^\gamma (\eta^\alpha{}_\beta + U^\alpha U_\beta)$

$= (\eta^\beta{}_\gamma \eta^\alpha{}_\beta + \eta^\beta{}_\gamma U^\alpha U_\beta + \eta^\alpha{}_\beta U^\beta U_\gamma + U^\beta U_\gamma U^\alpha U_\beta) V^\gamma$

$= (\eta^\alpha{}_\gamma + U^\alpha U_\gamma + U^\alpha U_\gamma - U^\alpha U_\gamma) V^\gamma$

$= (\eta^\alpha{}_\gamma + U^\alpha U_\gamma) V^\gamma$

$= V_\perp{}^\alpha$

ゆえに，与式が証明された．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　$\vec{q}\cdot\vec{q}$ で除するのは，単位ベクトルにするためであるが，ヌルベクトルであれば，$\vec{q}\cdot\vec{q} = 0$ であるので，与式は成り立たない．

ヌルベクトルはそれ自身で直交するので，任意のベクトル $\vec{V}$ を $\vec{q}$ に垂直にするには，$\vec{V}$ をヌルベクトルにすればよい．？

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　$\boldsymbol{P}_{\vec{U}}(\vec{V}_\perp, \vec{W}_\perp) = P_{\mu\nu} V_\perp{}^\mu W_\perp{}^\nu$

$= \eta_{\alpha\beta} P^\alpha{}_\mu P^\beta{}_\nu V_\perp{}^\mu W_\perp{}^\nu$

$= \eta_{\alpha\beta} (V_\perp{}^\mu P^\alpha{}_\mu)(W_\perp{}^\nu P^\beta{}_\nu)$

$= \eta_{\alpha\beta} V_\perp{}^\alpha W_\perp{}^\beta$

$= \vec{V}_\perp \vec{W}_\perp$

$= \boldsymbol{g}(\vec{V}_\perp, \vec{W}_\perp)$

（3.71）

32　(a)　（0,2）テンソルの成分の定義 $f_{\alpha\beta} = \boldsymbol{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$ から，変換則は

$$f_{\bar\alpha\bar\beta} = \Lambda^\mu{}_{\bar\alpha} \Lambda^\nu{}_{\bar\beta} f_{\mu\nu}$$

となることを示せ．これを行列で表現すると，成分が $\Lambda^\mu{}_{\bar\alpha}$ である行列を (Λ) として，

$$(\bar f) = (\Lambda)^T (f)(\Lambda)$$

となることも示せ．

(b)　ローレンツ系の定義からメトリックテンソルは $\eta_{\alpha\beta}$ となったので，このことはすべてのローレンツ系で成り立つ．したがって，より一般的なローレンツ変換を

$$\eta_{\bar\alpha\bar\beta} = \Lambda^\mu{}_{\bar\alpha} \Lambda^\nu{}_{\bar\beta} \eta_{\mu\nu} \tag{3.71}$$

を満たすものとして定義できる．速度 $v\vec{e}_x$ のブーストに対する行列がこの関係を満たしており，ここでの新しい定義が古い定義を含んでいることを示せ．

(c)　(Λ) と (L) が式（3.71）を満たす，すなわち $(\eta) = (\Lambda)^T(\eta)(\Lambda)$，$(\eta) = (L)^T(\eta)(L)$ である行列とする．行列 $(\Lambda)(L)$ もローレンツ変換の行列となることを示せ．

(a)　変換先もテンソル成分の定義は同じだから，

$f_{\bar\alpha\bar\beta} = \boldsymbol{f}(\vec{e}_{\bar\alpha}, \vec{e}_{\bar\beta})$

$= \boldsymbol{f}(\Lambda^\mu{}_{\bar\alpha}\vec{e}_\mu, \Lambda^\nu{}_{\bar\beta}\vec{e}_\nu)$

$= \Lambda^\mu{}_{\bar\alpha}\Lambda^\nu{}_{\bar\beta} f(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu)$

$= \Lambda^\mu{}_{\bar\alpha}\Lambda^\nu{}_{\bar\beta} f_{\mu\nu}$

与式が証明できた．

$(\bar f) = (\Lambda)^T (f)(\Lambda)$

$$=\begin{pmatrix} \quad \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} \quad \end{pmatrix}^{T}\begin{pmatrix} \quad f_{\mu\nu} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} \quad \end{pmatrix}$$

第２行列は行がフリー，第３行列は列がフリーなので行列演算ができる．

$$=\begin{pmatrix} \quad \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} \quad \end{pmatrix}^{T}\begin{pmatrix} \quad \Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} f_{\mu\nu} \quad \end{pmatrix}$$

第１行列は行がフリー，第２行列は列がフリーなので行列演算ができる．

$$=\left(\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} f_{\mu\nu}\right)$$

$$=\left(f_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\right)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　二つの４元ベクトルのブーストを考える．

$$A^{\bar{\alpha}}=\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\mu}A^{\mu}$$

$$B^{\bar{\beta}}=\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\nu}B^{\nu}$$

ブースト後のスカラー積は，

$$\eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}A^{\bar{\alpha}}B^{\bar{\beta}}=(\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}\eta_{\mu\nu})(\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\mu}A^{\mu})(\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\nu}B^{\nu})$$

$$=(\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\mu})(\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\nu})(\eta_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu})$$

$$=\eta_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu}$$

座標変換（ブースト）してもスカラー積は変わらない．スカラー積は座標に依存しないことが証明された．

$$(\bar{\eta})=(\Lambda)^{T}(\eta)(\Lambda)$$

$$=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\gamma & \gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\gamma^{2}+\gamma^{2}\beta^{2} & \gamma^{2}\beta-\gamma^{2}\beta & 0 & 0\\ \gamma^{2}\beta-\gamma^{2}\beta & \gamma^{2}-\gamma^{2}\beta^{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　行列$(\Lambda)(L)$も（3.71）を満たすことを確認する．

$$((\Lambda)(L))^{T}(\eta)((\Lambda)(L))$$

$$=(L)^{T}(\Lambda)^{T}(\eta)(\Lambda)(L)$$

$$=(L)^{T}(\eta)(L)$$

$$=(\eta)$$

()

33　練習問題 32(c)結果から，ローレンツ変換は行列の積に対して群をつくることがわかる．これをローレンツ群といい， $L(4)$ または $O(1,3)$ で表す．

(a)　ローレンツ群の単位元と式（1.12）で表される行列の逆元を求めよ．

(b)　ローレンツ変換の行列の行列式は ± 1 であることを示せ．

(c)　行列式の値が＋１となる元の集合は部分群をつくるが，行列式の値が－１となる元ではそうならないことを示せ．

(d)　３元直交群 $O(3)$ は，３次元ユークリッド空間のメトリックに対する同様な群である．練習問題 20(b)で，その群は直交行列をつかって表現されることがわかった．直交行列が群をつくること，および，$O(3)$ が $L(4)$ の部分群（に同型）であることを示せ．

(a)　ローレンツ変換の式（1.12）は，テンソルと行列を使って，次のように書ける。

$$A^{\bar\beta}=\Lambda^{\bar\beta}{}_{\alpha}A^{\alpha}$$

$$\begin{pmatrix}A^{\bar0}\\A^{\bar1}\\A^{\bar2}\\A^{\bar3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma\beta&0&0\\-\gamma\beta&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{0}\\A^{1}\\A^{2}\\A^{3}\end{pmatrix}\qquad(1.12)$$

$$\text{where}\quad\left(\Lambda^{\bar\beta}{}_{\alpha}(v)\right)=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma\beta&0&0\\-\gamma\beta&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

単位元（恒等変換）は

$$\left(\Lambda^{\bar\beta}{}_{\alpha}(0)\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(1,1,1,1)=I$$

逆元（逆変換）は，

2015.06.12
3　特殊相対論におけるテンソル解析　3.10　練習問題

$$\left(\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(-v)\right)=\begin{pmatrix}\gamma&\gamma\beta&0&0\\\gamma\beta&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

逆元は，逆行列である．

$$\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(-v)\Lambda^{\bar\beta}{}_{\alpha}(v)=\delta^{\nu}{}_{\alpha}$$

$$\left(\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(-v)\right)\left(\Lambda^{\bar\beta}{}_{\alpha}(v)\right)=\mathrm{diag}(1,1,1,1)=I$$

$$\left(\Lambda^{\nu}{}_{\bar\beta}(-v)\right)=\left(\Lambda^{\bar\beta}{}_{\alpha}(v)\right)^{-1}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　練習問題 32(c)から，

$$(\eta)=(\Lambda)^{T}(\eta)(\Lambda)$$

$$\det(\eta)=\det((\Lambda)^{T}(\eta)(\Lambda))=(\det(\Lambda))^{2}\det(\eta)$$

$$(\det(\Lambda))^{2}=1$$

$$\det(\Lambda)=\pm1$$

$$\text{where}\quad\det(\eta)=-1$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　１つ行列の行列式が－１では，２つの積の行列の行列式が＋１になるので，部分群にならない．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　ローレンツ変換が変換群をつくるとは, 概略, 系 O から系 $\bar O$ への変換, 系 $\bar O$ から系 $\bar{\bar O}$ への変換，系 O から系 $\bar{\bar O}$ への変換が同じ形になることをいう．その条件は，練習問題 32(c)とローレンツ不変から，

$$\det(\Lambda)=+1\quad\text{and}\quad\Lambda^{\bar0}{}_{0}\ge+1$$

である．これを proper ローレンツ変換という．

３次元空間回転を直交行列 (A) とすると，

$$(\Lambda)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&&&\\0&&(A)&\\0&&&\end{pmatrix},\quad\text{where}\quad\det(\Lambda)=1$$

空間回転の変換式を表し，部分群である．

x, y, z 方向のブーストは,

$\Lambda^{\bar{0}}{}_0 \ge 1$，$\det(\Lambda) = 1$ であり，部分群である．

$$\text{時間反転} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \det(\Lambda) = -1$$

$$\text{空間反転} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \det(\Lambda) = -1$$

$$\text{時間空間反転} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \det(\Lambda) = +1,\quad \Lambda^{\bar{0}}{}_0 \le +1$$

は，部分群とならない．上の３つは，擬似ローレンツ変換である．

結論として，ブースト，回転は部分群をつくり，反転は部分群をつくらない．

()

34　ミンコフスキー空間で，座標 $u = t - x$，$v = t + x$ を考える．（自然単位）

(a)　$\vec{e}_u$ を座標 $(u = 1, v = 0, y = 0, z = 0)$ と $(u = 0, v = 0, y = 0, z = 0)$ の事象をつなぐベクトル，$\vec{e}_v$ も同様なベクトルとする．$\vec{e}_u = (\vec{e}_t - \vec{e}_x)/2$，$\vec{e}_v = (\vec{e}_t + \vec{e}_x)/2$ であることを示し，$t - x$ 面の時空図中に $\vec{e}_u$，$\vec{e}_v$ を描け．

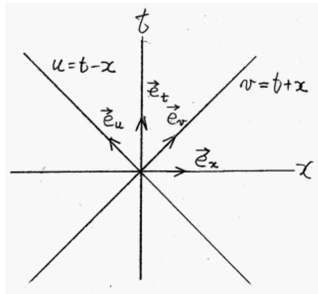
(b)　$\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ はミンコフスキー空間の基底であることを示せ．

(c)　この基底に対するメトリックの成分を求めよ．

(d)　$\vec{e}_u$，$\vec{e}_v$ はヌルであるが直交してないことを示せ．（$t - x$ 平面のヌル基底とよばれる．）

(e)　四つの１形式 $\tilde{d}u$，$\tilde{d}v$，$\boldsymbol{g}(\vec{e}_u,\ )$，$\boldsymbol{g}(\vec{e}_v,\ )$ を $\tilde{d}t$ と $\tilde{d}x$ を使って表せ．

(a)　時空図中の基底は,



基底変換式は,

$$\left(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right) = \left(\vec{e}_t, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_u = \frac{1}{2}\vec{e}_t - \frac{1}{2}\vec{e}_x$$

$$\vec{e}_v = \frac{1}{2}\vec{e}_t + \frac{1}{2}\vec{e}_x$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　最初の基底を線形変換しただけだから，基底の条件を満たす.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　練習問題 32(c)を使って，この基底のメトリックを求める.

$$
\begin{aligned}
(\overline{\eta}) &= (\Lambda)^T(\eta)(\Lambda) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　$\vec{e}_u$ と $\vec{e}_v$ は，問題から明らかにヌルである（傾き 45 度の直線だから，距離を計算するまでもない）．スカラー積は，

$$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_u = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\vec{e}_v \cdot \vec{e}_v = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$\vec{e}_u$ と $\vec{e}_v$ は，直交していない.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(e)

$$u = t - x$$

から，

$$\tilde{d}u = \tilde{d}t - \tilde{d}x$$

$$v = t + x$$

から，

$$\tilde{d}v = \tilde{d}t + \tilde{d}x$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}(\vec{e}_u\ ,\quad) = -\frac{1}{2}\tilde{d}v = -\frac{1}{2}\tilde{d}t - \frac{1}{2}\tilde{d}x$$

別解） $\eta = diag(-1, 1, 1, 1)$ から

$$\boldsymbol{g}(\vec{e}_u\ ,\quad) = \boldsymbol{g}(\frac{1}{2}\vec{e}_t - \frac{1}{2}\vec{e}_x\ ,\quad) = -\frac{1}{2}\tilde{d}t - \frac{1}{2}\tilde{d}x$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}(\vec{e}_v\ ,\quad) = -\frac{1}{2}\tilde{d}u = -\frac{1}{2}\tilde{d}t + \frac{1}{2}\tilde{d}x$$

別解） $\eta = diag(-1, 1, 1, 1)$ から

$$\boldsymbol{g}(\vec{e}_v\ ,\quad) = \boldsymbol{g}(\frac{1}{2}\vec{e}_t + \frac{1}{2}\vec{e}_x\ ,\quad) = -\frac{1}{2}\tilde{d}t + \frac{1}{2}\tilde{d}x$$

トップページ　http://www.geocities.jp/hp_yamakatsu/index_relativity.html

4　特殊相対論における完全流体

完全流体，ストレスーエネルギーテンソル，マクスウェル方程式，ファラデー・テンソル，電磁場テンソル

4.1　流体

一般相対論的天体物理学では，ほとんどの場合第一近似として，重力源を完全流体とする．
ずれに逆らうすべての力がゼロ（摩擦なし）で，近傍の流体要素間の相互作用としては圧力のみである流体を，完全流体と定義する．

4.2　ダスト：粒子数 - 流速ベクトル $\vec{N}$

粒子数密度 n

粒子数密度 n の定義

$$n \equiv \text{要素のMCR系での粒子数の密度} \tag{4.1}$$

$$\gamma n = \frac{n}{\sqrt{1-\beta^2}} = \text{粒子の速度が}v\text{の系での粒子数密度} \tag{4.2}$$

$$\text{where}\quad \beta = \frac{v}{c},\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

面を横切る粒子数流束

$$(\text{流速})^{\bar{x}} = \gamma n v^{\bar{x}} = \frac{n v^{\bar{x}}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4.3}$$

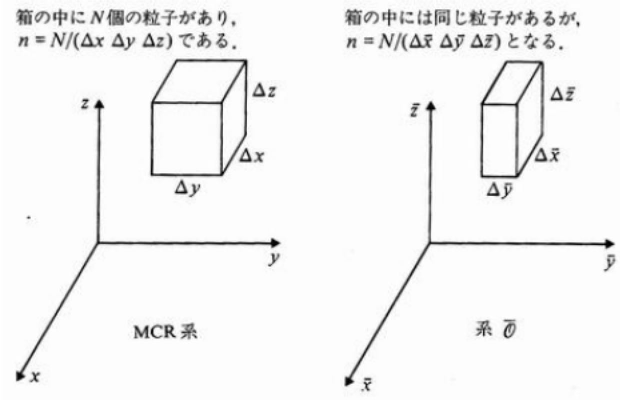


図 4.1　ローレンツ収縮によって，粒子の密度は測定する系に依存してしまう

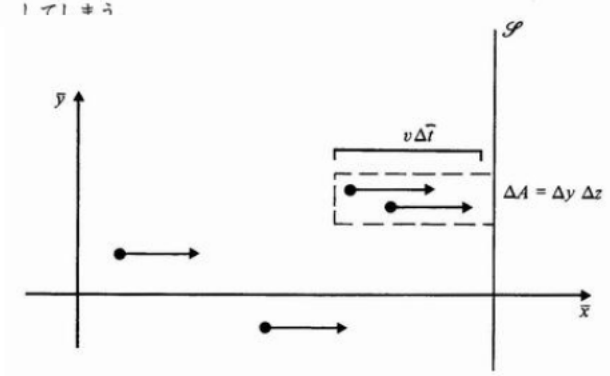


図 4.2　流束を簡単な場合について示した．粒子が $\bar{x}$ 方向のみに運動しているとすれば，面 $\mathscr{S}$ 上から $v\Delta\bar{t}$ の距離内のすべての粒子は，時間 $\Delta\bar{t}$ の間に面 $\mathscr{S}$ を横切ることになる．

粒子数 - 流速の４元ベクトル $\vec{N}$

◆

$$\vec{N} = n\vec{U} \tag{4.4}$$

$$v \to (v_x, v_y, v_z)$$

$$\vec{U} \xrightarrow[\bar{O}]{} c(\gamma, \gamma\beta_x, \gamma\beta_y, \gamma\beta_z) = (c\gamma, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$$

$$\vec{N} \xrightarrow[\bar{O}]{} c(n\gamma, n\gamma\beta_x, n\gamma\beta_y, n\gamma\beta_z) = (nc\gamma, n\gamma v_x, n\gamma v_y, n\gamma v_z) \tag{4.5}$$

where　$\beta_x = v_x / c$，$\beta_y = v_y / c$，　$\beta_z = v_z / c$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}} = \frac{1}{\sqrt{1-({\beta_x}^2+{\beta_y}^2+{\beta_z}^2)}}$$

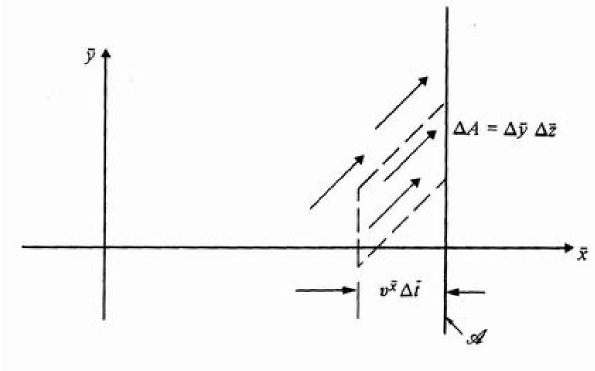


図 4.3　一般的な流束の場合．$\bar{x}$一定の面を粒子が横切るのは，速度の$\bar{x}$成分があるためである．

◆ $$\vec{N}\cdot\vec{N} = -n^2c^2 \qquad (4.6)$$

4.3　１形式と面

時間的流速としての粒子数密度

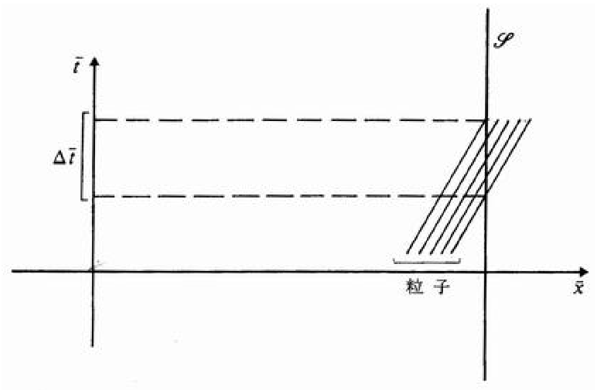


図 4.4　図 4.2 を$\bar{y}$軸を落して，時空図で描き直したもの

2015.06.10
4　特殊相対論における完全流体　4.10　練習問題

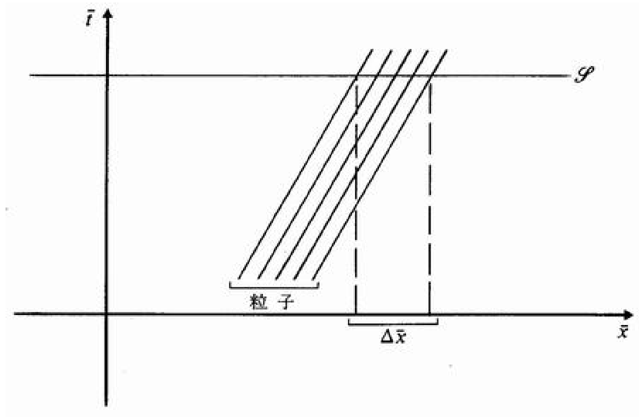


図 4.5　$\bar{t}$＝一定の面を横切る流束としての粒子数密度

流速は３次元曲面の単位“体積”を横切る世界線の数である．与えられた時刻に単位体積に“含まれる”粒子数，つまり粒子数密度にほかならない．

曲面を定義する１形式

曲面の方程式

$$\phi(ct,\ x,\ y,\ z) = \text{Const.}$$

単位垂直１形式

$$\tilde{n} = \frac{\tilde{d}\phi}{\left|\tilde{d}\phi\right|} \qquad (4.7)$$

$$\left|\tilde{d}\phi\right| = \left|\eta^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}\right|^{\frac{1}{2}} \qquad (4.8)$$

３次元の体積要素

$$\tilde{n}dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma \qquad (4.9)$$

面を横切る流速

$$\phi(ct,\ x,\ y,\ z) = \text{Const.}$$

の面を横切る（粒子）の流速は，

$$\langle \tilde{n}, \vec{N} \rangle$$

１形式による系の表現

式（3.37）から，

$$\tilde{U} = \boldsymbol{g}(\vec{U},\ \ )$$

$$\vec{U} \to (c, 0, 0, 0)$$

$$\tilde{U} \to (-c, 0, 0, 0)$$

$$\tilde{d}t \to \left(\frac{1}{c}, 0, 0, 0\right) = -\frac{1}{c^2}\tilde{U}$$

４元運動量が $\vec{p}$ の粒子のエネルギーは，

$$E = \left\langle c^2\tilde{d}t,\ \vec{p}\right\rangle = cp^0 \qquad (4.10)$$

$$E = -\vec{p}\cdot\vec{U} = cp^0$$

4.4　再びダスト：ストレス - エネルギーテンソル

エネルギー密度

MCR 系では，単位体積あたりのエネルギーは，

$$nmc^2 = \rho c^2 \equiv \text{MCR系でのエネルギー密度} \qquad (4.11)$$

$$\rho = nm\ \text{（ダスト）} \qquad (4.12)$$

$$\frac{\rho c^2}{1-\beta^2} = \text{粒子速度が}v\text{に見える系でのエネルギー密度} \qquad (4.13)$$

ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）

◆　$$\boldsymbol{T}(\tilde{d}x^\alpha, \tilde{d}x^\beta) = T^{\alpha\beta} \equiv x^\beta\text{一定の面を横切る}\alpha\text{運動流速} \qquad (4.14)$$

where　α 運動量とは４元運動量の α 成分 $p^\alpha \equiv \left\langle\tilde{d}x^\alpha,\ \vec{p}\right\rangle$

T^{00} は $t = \text{Const.}$ の面を横切る０運動量（エネルギー）の流速

$$T^{00} = \text{エネルギー密度} \qquad (4.15)$$

T^{0i} は $x^i = \text{Const.}$ の面を横切るエネルギー流速

$$T^{0i} = x^i\text{面を横切るエネルギー 流速} \qquad (4.16)$$

T^{i0} は $t = \text{Const.}$ の面を横切る i 運動量流速

$$T^{i0} = i\ \text{運動量密度} \qquad (4.17)$$

T^{ij} は i 運動量の j 流速

$$T^{00} = j\ \text{面を横切る}i\ \text{運動量流速} \qquad (4.18)$$

問題 6　　（4.19）～（4.20）

問題 7　　（4.21）

4.5　一般の流体

マクロな定義

熱力学第一法則

表 4.1　流体のマクロな量

記号	名称	定　義
$\vec{U}$	流体要素の四元速度	MCR系の四元速度
n	粒子数密度	MCR系での単位体積あたりの粒子数
$\vec{N}$	流束ベクトル	$\vec{N} \equiv n\vec{U}$
ρ	エネルギー密度	全質量エネルギー（静止質量，ランダム運動のエネルギー，化学的エネルギー，……）の密度
Π	粒子一個あたりの内部エネルギー	$\Pi \equiv (\rho/n) - m \to \rho \equiv n(m+\Pi)$ このΠは静止質量以外のすべてのエネルギーの総称である．
ρ_0	静止質量密度	$\rho_0 = mn$ mは定数なので，静止質量のみにかかわる“エネルギー”である．したがって，$\rho = \rho_0 + n\Pi$
T	温度	MCR系での普通の熱力学的な定義（本文参照）
p	圧力	MCR系での普通の流体力学的な定義（詳細は後述）
S	比エントロピー	一粒子あたりのエントロピー（本文参照）

問題 8　　（4.22）～（4.26）

一般のストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）

T **の空間成分** T^{ij}

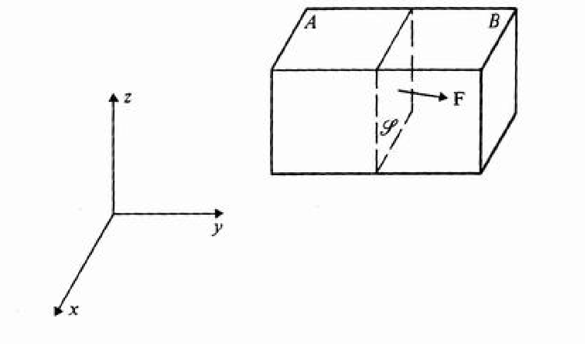
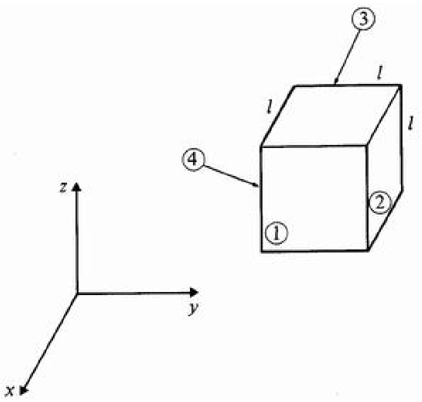


図 4.6　流体要素 A から隣接した要素 B に及ぼす力 $\mathbf{F}$ は，媒質と外力の性質によって，いろいろな方向をとりうる．

MCR 系での T^{ij} **の対称性**　　（4.27）～（4.29）

（4.27），（4.28）省略



$$T^{ij} = T^{ji} \tag{4.29}$$

図 4.7　流体要素

エネルギー - 運動量の保存　　（4.30）～（4.34）

（4.30）～（4.33）省略

◆　$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$　　（4.34）

粒子数の保存

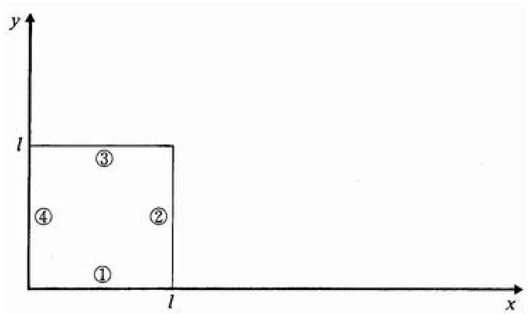


図 4.8　立方体の流体要素の z＝一定の面での切口

◆　$N^{\alpha}{}_{,\alpha} = (nU^{\alpha})_{,\alpha} = 0$　　（4.35）

4.6　完全流体　　（4.36）～（4.56）

問題 12～18　　（4.36）～（4.56）

4.8　ガウスの法則

微分形の保存則

◆　$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$　(4.34)

◆　$N^{\alpha}{}_{,\alpha} = (nU^{\alpha})_{,\alpha} = 0$　(4.35)

を積分形にする．

４次元時空間でのガウスの発散定理は，

◆　$\int V^{\alpha}{}_{,\alpha} d^4x = \oint V^{\alpha} n_{\alpha} d^3s$　(4.57)

ここで，$\tilde{n}$ は単位垂直１形式，d^3s は４次元体積を囲む３次元超曲面（３次元体積）である．

【注意】ガウスの法則はマクスウェル方程式にあるものでこれではない．

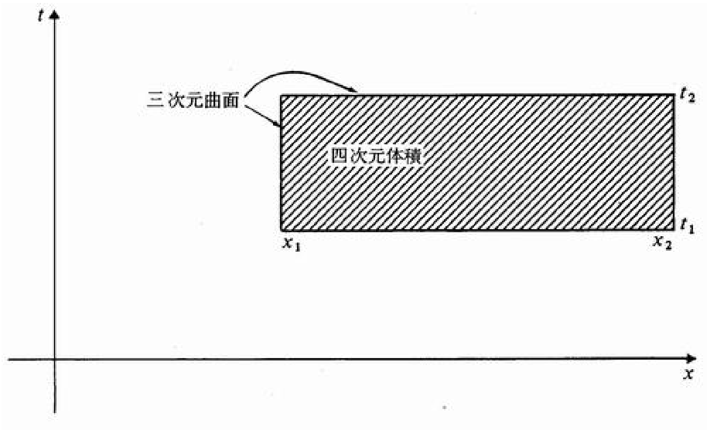


図 4.9　時空のある領域の境界

式（4.57）の表面積分（右辺）は，

$$\int \left[V^0(ct_2) - V^0(ct_1) \right] dxdydz$$

$$+ \int \left[V^x(x_2) - V^x(x_1) \right] cdtdydz \cdots \qquad 式（4.58）$$

詳細は問題 19 参照．

【参考】３次元空間のガウスの発散定理の証明

３次元空間のガウスの発散定理

◇　$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$　①

閉空間領域 V を囲む表面を S とする．

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV = \iiint_V \left(\frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} \right) dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial A^1}{\partial x^1} \right) dV + \iiint_V \left(\frac{\partial A^2}{\partial x^2} \right) dV + \iiint_V \left(\frac{\partial A^3}{\partial x^3} \right) dV \qquad ②$$

第１項の体積分を考える．

領域 V は一様に凸とし凹がないとすると，x^1 軸に平行な直線を接線としてその接点が描く曲線により表面 S は x^1 軸のプラス側のマイナス側に分けられる．

２つの表面を S_+ と S_- とする．

プラス側とマイナス側の表面式を次とする．

$$x^1 = f_+(x^2, x^3)$$

$$x^1 = f_-(x^2, x^3)$$

x^2, x^3 の積分範囲は不明だが，x^1 の積分範囲は，$f_+ - f_-$ となる．

$$\iiint_V \frac{\partial A^1}{\partial x^1} dV = \iint_R \left(\int_{f-}^{f+} \frac{\partial A^1}{\partial x^1} dx^1 \right) dx^2 dx^3 \qquad ③$$

表面 S の微小面素 dS の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし，x^1 軸の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}^1$ とし，そのなす角を α^1 とすると，dS の $x^2 - x^3$ 平面への射影は，

$$dx^2 dx^3 = \left| \cos\alpha^1 \right| dS = \left| \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}^1 \right| dS$$

これを使って，

③のつづき

$$= \iint_R A^1\left(f_+(x^2, x^3), x^2, x^3 \right) dx^2 dx^3 - \iint_R A^1\left(f_-(x^2, x^3), x^2, x^3 \right) dx^2 dx$$

$$= \iint_{S+} A^1\left(f_+(x^2, x^3), x^2, x^3 \right) \left| \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}^1 \right| dS - \iint_{S-} A^1\left(f_-(x^2, x^3), x^2, x^3 \right) \left| \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}^1 \right| dS$$

$$= \iint_{S+} A^1 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}^1 dS + \iint_{S-} A^1 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}^1 dS$$

$$= \iint_S A^1 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}^1 dS$$

３軸とも同様に

$$\iiint_V \frac{\partial A^1}{\partial x^1} d\boldsymbol{V} = \iint_S A^1 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}^1 dS$$

$$\iiint_V \frac{\partial A^2}{\partial x^2} d\boldsymbol{V} = \iint_S A^2 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}^2 dS$$

$$\iiint_V \frac{\partial A^3}{\partial x^3} d\boldsymbol{V} = \iint_S A^3 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}^3 dS$$

②のつづき $= \iint_S A^1 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}^1 dS + \iint_S A^2 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}^2 dS + \iint_S A^3 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}^3 dS$

$$= \iint_S \left(A^1 \boldsymbol{e}^1 + A^2 \boldsymbol{e}^2 + A^3 \boldsymbol{e}^3 \right) \cdot \boldsymbol{n} dS$$

$$= \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

４次元時空間に拡張する．

単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，正しくは単位垂直１形式 $\tilde{n}$ である．$\vec{A} \to (A^\alpha)$ であり，

ドット積 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}$ は，正しくは縮約 $\left\langle A^\alpha, n_\alpha \right\rangle = A^\alpha n_\alpha$ である．

４次元時空間の発散は，

$$A^\alpha{}_{,\alpha} = \left(\frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} \right)$$

であるから，

$$\int_V A^\alpha{}_{,\alpha} d\boldsymbol{V} = \int_{\partial V} A^\alpha n_\alpha dS$$

と書ける．ベクトル記号と積分表記法の約束を変えて，

◆ $$\int V^\alpha{}_{,\alpha} d^4x = \oint V^\alpha n_\alpha d^3s \qquad (4.57)$$

節の中で使われている公式と問題

()

1　連続体近似が次の物理系に適用できるかどうかについて述べよ．

(a)　太陽系の惑星運動

(b)　火山の溶岩流

(c)　ラッシュアワーの幹線道路の車の流れ

(d)　各道路に信号のある交差点での車の流れ．

(e)　プラズマの力学

(a)　×

(b)　○

(c)　○

(d)　×

(e)　○

()

2　x 一定の面を横切る流速を“x 方向の流速”と呼ぶことが多い．ベクトルと 1 形式の知識を使って，流速についての述べ方としては不適当であることを説明せよ．

この表現は，直交座標（デカルト座標）を前提にしているので，不適当である．x 一定の面は，3 次元空間では，$y-z$ 面に平行であるが，“x 方向の流速”とは，x 軸が $y-z$ 面に垂直であることを前提にしている．4 次元でも図に描くのが難しいだけで考え方は同じである．

()

3　(a)　ガリレイ的な運動量の概念が相対論的な概念と違って，系にどのように依存するかを説明せよ．
(b)　速度の小さいときに，相対論的な定義はガリレイ的な定義とほぼ同じであるのに，どうのようにしてこんなことが可能なのか？（ガリレイ的な４元運動量を定義せよ．）

(a)　ガリレイ的な３次元空間での運動量ベクトル p は系を変換すると変わる．相対論的な４元運動量 $\vec{p}$ は系を変換しても大きさは変わらず，その成分だけが変わる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　相対論では，４元運動量は，MCR 系で，

$$\vec{p} \xrightarrow[O]{} (mc, 0, 0, 0)$$

観測系で，

$$\vec{p} \xrightarrow[O]{} (mc\gamma, m\gamma v, 0, 0)$$

となる．一方，ガリレイ的な４元運動量は，MCR 系で，

$$p \xrightarrow[O]{} (mc, 0, 0, 0)$$

と，相対論のそれと同じにしても，観測系では，

$$p \xrightarrow[O]{} (mc, mv, 0, 0)$$

となり，γ だけ誤差がでる．

()

4　４元速度が $\vec{U}$ である観測者の測定するダストの粒子数密度は

$$-\vec{N}\cdot\vec{U}$$

であることを示せ．

ある系（粒子の MCR 系でなくてもよい）で，粒子数・流速ベクトルを $\vec{N}$，観測者の４元速度を $\vec{U}$ とする．

観測者の静止系で，

$$\vec{U} \xrightarrow[O]{} (c, 0, 0, 0)$$

$$\vec{N} \xrightarrow[O]{} (N^0, N^1, N^2, N^3)$$

これから，

$$-\vec{N}\cdot\vec{U} = -cN^0$$

ここで，N^0 は観測者の測定するダストの粒子数密度である．

（4.14）

5　式（4.14）がテンソルを定義していることの証明を，この量が二つの変数に関して線形であることを示すことで完成せよ．

◆　$\boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha}, \tilde{d}x^{\beta}) = T^{\alpha\beta} \equiv x^{\beta}$一定の面を横切る$\alpha$運動流速　（4.14）

$\boldsymbol{T}$ は，ダストのストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）である．

線形性は次を満足する．

$$\boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha} + \tilde{d}x^{\gamma}, \tilde{d}x^{\beta}) = \boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha}, \tilde{d}x^{\beta}) + \boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\gamma}, \tilde{d}x^{\beta})$$

$$\boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha}, \tilde{d}x^{\beta} + \tilde{d}x^{\gamma}) = \boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha}, \tilde{d}x^{\beta}) + \boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha}, \tilde{d}x^{\gamma})$$

$$\boldsymbol{T}(C\tilde{d}x^{\alpha}, \tilde{d}x^{\beta}) = \boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha}, C\tilde{d}x^{\beta}) = C\boldsymbol{T}(\tilde{d}x^{\alpha}, \tilde{d}x^{\beta})$$

（4.19）（4.20）

6　式（4.19）をその前の式を使って導け．

$$(T^{00})_{\mathrm{MCRF}} = \rho c^2 = mnc^2$$

$$(T^{0i})_{\mathrm{MCRF}} = (T^{i0})_{\mathrm{MCRF}} = (T^{ij})_{\mathrm{MCRF}} = 0$$

◆　ダスト：$\boldsymbol{T} = \vec{p} \otimes \vec{N} = mn\vec{U} \otimes \vec{U} = \rho\vec{U} \otimes \vec{U}$　（4.19）

$\boldsymbol{T}$ は，MCR 系でのダストのストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）である．

書き下すと，

$$\vec{U} \xrightarrow[\mathrm{MCRF}]{} (c, 0, 0, 0)$$

$$\vec{p} = m\vec{U} \xrightarrow[\mathrm{MCRF}]{} (mc, 0, 0, 0)$$

$$\vec{N} = n\vec{U} \xrightarrow[\mathrm{MCRF}]{} (nc, 0, 0, 0)$$

$$\boldsymbol{T} \xrightarrow[\mathrm{MCRF}]{} \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上式から，

◆　ダスト：$\boldsymbol{T} = \vec{p} \otimes \vec{N} = mn\vec{U} \otimes \vec{U} = \rho\vec{U} \otimes \vec{U}$　（4.19）

が導出できる．このことから，

$$T^{\alpha\beta} = \boldsymbol{T}\left(\tilde{e}^{\alpha}, \tilde{e}^{\beta}\right) = \rho\vec{U}\left(\tilde{e}^{\alpha}\right)\vec{U}\left(\tilde{e}^{\beta}\right)$$

$$T^{\alpha\beta} = \rho U^{\alpha} U^{\beta} \qquad (4.20)$$

（4.21）

7　式（4.21）を導け．

$$T^{\bar{0}\bar{0}}=\rho U^{\bar{0}}U^{\bar{0}}=\rho c^2\gamma^2$$
$$T^{\bar{0}\bar{i}}=\rho U^{\bar{0}}U^{\bar{i}}=\rho c v^i\gamma^2=\rho c^2\beta^i\gamma^2$$
$$T^{\bar{i}\bar{0}}=\rho U^{\bar{i}}U^{\bar{0}}=\rho c v^i\gamma^2=\rho c^2\beta^i\gamma^2$$
$$T^{\bar{i}\bar{j}}=\rho U^{\bar{i}}U^{\bar{j}}=\rho v^i v^j\gamma^2=\rho c^2\beta^i\beta^j\gamma^2 \tag{4.21}$$
$$\text{where}\quad \beta^i=\frac{v^i}{c},\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}}$$

$\boldsymbol{T}$ は, MCR 系ではないダストのストレス - エネルギーテンソル(エネルギー・運動量テンソル）である．

$$\vec{U}\xrightarrow[O]{}(c\gamma, c\gamma\boldsymbol{\beta})=(c\gamma, c\gamma\beta^1, c\gamma\beta^2, c\gamma\beta^3)$$
$$=(c\gamma, \gamma\boldsymbol{v})=(c\gamma, \gamma v^1, \gamma v^2, \gamma v^3)$$
$$U^{\bar{0}}=c\gamma$$
$$U^{\bar{i}}=\gamma v^i=c\gamma\beta^i$$

上式から式（4.21）が導出できる．

（4.22）～（4.26）

8　式（4.25）が
$$\tilde{d}\rho\cdot c^2-\left(\rho c^2+p\right)\tilde{d}n/n=nT\tilde{d}s \tag{4.25'}$$
という 1 形式を使った式で書けること，式（4.26）についても同じことができることを議論せよ． 1 形式 $\tilde{\delta}q$ は勾配でないこと．つまりどんな関数 q に対しても $\tilde{d}q$ でないことを示せ．

◆
$$d\rho\cdot c^2-\left(\rho c^2+p\right)dn/n=nTds \tag{4.25}$$
$$\delta q=Tds \tag{4.26}$$

式（4.25）の元の式は，熱力学第一法則（エネルギー保存則）である．

$$\delta Q=dU+pdV \tag{4.22}$$

Q ；要素の吸収熱量

U ；要素の内部エネルギー

p ；圧力

V ；要素の体積

pdV ；要素のなした仕事（失ったエネルギー）

式（4.22）から式（4.25）を導出する．

$$U=\rho c^2V$$

だから,

$$dU=d(\rho c^2V)=\rho c^2dV+d\rho\cdot c^2V$$
$$V=\frac{N}{n},\quad dV=-\frac{N}{n^2}dn \tag{4.23}$$

として，式（4.22）は,

$$\delta Q=\frac{N}{n}d\rho\cdot c^2-N(\rho c^2+p)\frac{dn}{n^2}$$

1 粒子あたりの吸収熱量を $q\equiv\dfrac{Q}{N}$ として,

$$n\delta q = d\rho\cdot c^2 - (\rho c^2 + p)\frac{dn}{n} \qquad (4.24)$$

１粒子あたりのエントロピーを

$$\delta q = Tds \qquad (4.26)$$

として，次式が導出できた．

◆ $$d\rho\cdot c^2 - (\rho c^2 + p)dn/n = nTds \qquad (4.25)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

式（4.22）を 1 形式に変換し，式が成り立つか確認する．

$$\tilde{\delta}Q = \tilde{d}U + p\tilde{d}V \qquad (4.22')$$

もし，上式の Q が完全 1 形式（完全微分形式）なら，

$$\tilde{d}\tilde{d}Q = 0$$

が成り立ち，関数 $Q(U,V)$ が存在することが証明できる．これを確認する．

$$\tilde{d}\tilde{d}Q = \tilde{d}\tilde{d}U + \tilde{d}(p\tilde{d}V)$$

$\tilde{d}\tilde{d}U = 0$ だから

$$= \tilde{d}(p\tilde{d}V)$$

$$= \tilde{d}p \wedge \tilde{d}V$$

$$= \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_U \tilde{d}V + \left(\frac{\partial p}{\partial U}\right)_V \tilde{d}U\right]\wedge \tilde{d}V$$

$\tilde{d}V \wedge \tilde{d}V = 0$ だから，

$$= \left(\frac{\partial p}{\partial U}\right)_V \tilde{d}U \wedge \tilde{d}V$$

もし，$\left(\frac{\partial p}{\partial U}\right)_V = 0$ なら，体積と内部エネルギーが変わらずに圧力だけが変わる流体であり，これは存在しない．ゆえに上式は成り立たず，$\tilde{d}\tilde{d}Q \neq 0$ であるので，Q は完全 1 形式ではない．これが $\tilde{d}Q$ を使わないで $\tilde{\delta}Q$ を使う理由である．

Q は 1 形式であるので，フルベニウスの定理により，

$$\tilde{\delta}Q = T\tilde{d}S$$

T ；温度

S ；要素のエントロピー

となる関数 $T(U,V)$，$S(U,V)$ が存在する．

$$T\tilde{d}S = \tilde{d}U + \tilde{p}dV$$

これで，式 (4.22) が 1 形式を使って書けることが証明できた．問題の式 (4.25) は式（4.22）の変形だから，同じ議論で式（4.22’）から式（4.25’）が導出できる．また，式（4.26）も 1 形式にできる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

どんな関数 Q に対しても $\tilde{d}Q$ でないこと，つまり，Q は完全 1 形式でないことは既に証明したが，

$$\tilde{\delta}Q = T\tilde{d}S$$

についても証明する．

$$\tilde{\delta}Q = \tilde{d}Q, \quad \tilde{d}\tilde{d}Q = 0$$

でないことを確認すればよい．

$$\tilde{d}\tilde{d}Q = \tilde{d}(T\tilde{d}S)$$

$$= \tilde{d}T \wedge \tilde{d}S$$

$$= \left[\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U \tilde{d}V + \left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_V \tilde{d}U\right]\wedge\left[\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U \tilde{d}V + \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V \tilde{d}U\right]$$

$\tilde{d}V \wedge \tilde{d}V = 0$，$\tilde{d}U \wedge \tilde{d}U = 0$ だから，

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V \tilde{d}V \wedge \tilde{d}U + \left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U \tilde{d}U \wedge \tilde{d}V$$

$\tilde{d}V \wedge \tilde{d}U = -\tilde{d}U \wedge \tilde{d}V$ だから

$$= \left[\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V - \left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U\right]\tilde{d}V \wedge \tilde{d}U$$

普通，流体は，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U$$

が成り立たないので，

$$\tilde{d}\tilde{d}Q \neq 0$$

となり，つねに関数 $Q(U,V)$ が存在するとは限らない．

()

9　α が空間を表す添字のとき式（4.34）はニュートンの第二法則となることを示せ.

◆ $$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0 \quad (4.34)$$

【表記法】$\dfrac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}=f_{,\alpha}=\partial_{\alpha}f$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

T^{i0}/c ；　i 運動量密度

T^{ij} ；x^{j} 面を横切る i 運動量流速

$$\frac{1}{c}\partial_{t}T^{i0}=-\left(\partial_{x}T^{ix}+\partial_{y}T^{iy}+\partial_{z}T^{iz}\right)$$

α が空間を表す添字のとき式（4.34）は，運動量保存則を表していて，次式となる.

$$T^{i\beta}{}_{,\beta}=0$$

次式のエネルギー保存則

$$T^{0\beta}{}_{,\beta}=0$$

と合わせて，次式をエネルギー・運動量保存則という.

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0$$

2015.06.10
4　特殊相対論における完全流体　4.10　練習問題

()

10　式（4.35）で $|\beta|<<1$ の極限を考えると

$$\partial n/\partial t+\partial(nv^{i})/\partial x^{i}=0$$

となることを示せ.

◆ $$N^{\alpha}{}_{,\alpha}=(nU^{\alpha})_{,\alpha}=0 \quad (4.35)$$

【表記法】$\dfrac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}=f_{,\alpha}=\partial_{\alpha}f$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

$$\vec{U}\to(c\gamma,\gamma v_{x},\gamma v_{y},\gamma v_{z})=(c\gamma,\gamma v^{1},\gamma v^{2},\gamma v^{3})$$

$$(nU^{\alpha})_{,\alpha}=\frac{1}{c}\partial_{t}(nc\gamma)+\partial_{x}(n\gamma v_{x})+\partial_{y}(n\gamma v_{y})+\partial_{z}(n\gamma v_{z})$$

$|\beta|<<1$ のとき $\beta\to0$ となって，

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^{2}}}\to1$$

であるから，

$$(nU^{\alpha})_{,\alpha}=\partial_{t}n+\partial_{x}(nv_{x})+\partial_{y}(nv_{y})+\partial_{z}(nv_{z})$$

となり，

$$\partial n/\partial t+\partial(nv^{i})/\partial x^{i}=0$$

が証明できた.

()

> 11　(a)　空間軸の回転では行列 δ^{ij} は変化しないことを示せ.
>
> (b)　この性質をもつ行列は δ^{ij} に定数を掛けたもののみであることを示せ.

(a)　z 軸まわりの回転の座標変換は,

$$(\bar{f}) = (\Lambda)^T (f)(\Lambda)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = diag(1,1,1) = \delta^{ij}$$

x 軸まわりの回転の座標変換行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y 軸まわりの回転の座標変換行列は,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

この２つの行列でさらに座標変換しても結果は変わらない.

座標変換行列は，２章問題 15(b)を参照。

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

z 軸まわりの回転の座標変換は，（便宜上 $M_{ij} \to ij$ と書く）

$$(M) = (\Lambda)^T (M)(\Lambda)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11\cos+12\sin & -11\sin+12\cos & 13 \\ 21\cos+22\sin & -21\sin+22\cos & 23 \\ 31\cos+32\sin & -31\sin+32\cos & 33 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \substack{11\cos^2+12\cos\cdot\sin \\ +21\cos\cdot\sin+22\sin^2} & \substack{-11\cos\cdot\sin+12\cos^2 \\ -21\sin^2+22\cos\cdot\sin} & 13\cos+23\sin \\ \substack{-11\cos\cdot\sin-12\sin^2 \\ +21\cos^2+22\cos\cdot\sin} & \substack{11\sin^2-12\cos\cdot\sin \\ -21\cos\cdot\sin+22\cos^2} & -13\sin+23\cos \\ 31\cos+32\sin & -31\sin+32\cos & 33 \end{pmatrix}$$

元の行列と等しいので, $M_{11} = M_{22}$, $M_{12} = -M_{21}$, $M_{13} = M_{23} = M_{31} = M_{32} = 0$

となるから,

$$= \begin{pmatrix} 11 & 12 & 0 \\ 21 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}$$

x 軸まわりの回転の座標変換をして同様にすると， $M_{11} = M_{22} = M_{33}$ となり,

$$= \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & 0 \\ 0 & 0 & M_{11} \end{pmatrix} = M_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{11} diag(1,1,1) = M_{11}\delta^{ij}$$

ちなみに， $diag(1,1,1)$ のことを単位行列 I という.

練習問題 12〜18　4.6 節　完全流体　　（4.36）〜（4.56）

12　式（4.36）から式（4.37）を導け
13　式（4.44）の変形ができることを説明せよ．
14　式（4.46）が MCR 系での式（4.45）の時間成分であることを議論せよ．
15　式（4.47）から式（4.48）を導け．
16　MCR 系では，$U^i = 0$ である．しかし，$U^i{}_{,\beta} = 0$ とできないのはなぜか？
17　$a^\mu = U^\mu{}_{,\beta} U^\beta$ と定義した．非相対論的極限（速度の小さい極限）をとって， $a^i = \dot{v}^i + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v^i = Dv^i / Dt$ であることを示せ．ここで演算子 D/Dt は，流体力学でふつうに使われる“ラグランジュ”微分または“物質”微分である．
18　$-\nabla p$ が MCR 系で流体要素の単位体積に作用する正味の力であることを示して，4.6 節の最後の議論（次欄）を精密化せよ．
相対論では，$(\rho + p/c^2)$ が“慣性質量密度”としてふるまう．式（4.54）から $(\rho + p/c^2)$ が大きくなればなるだけ, その物体を加速するのが困難になるからである．式（4.54）は本質的には $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ であって，$-p_{,i}$ が流体に作用する力になっている．すなわち，p は流体要素がその隣り合った要素に及ぼす力であるから，$-p$ がその要素に作用する力である．しかし，要素の反対側の要素も逆向きに力を及ぼしているので，流体要素に両側から作用する p に変化があるときにのみ，流体を加速する正味の力が現れるのである．$-\nabla p$ が力なのはそういう理由による．

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta} \tag{4.37}$$

$$(U^\alpha U^\gamma \eta_{\alpha\gamma})_{,\beta} = (U^\alpha U^\gamma)_{,\beta}\eta_{\alpha\gamma} = 2U^\alpha{}_{,\beta} U^\gamma \eta_{\alpha\gamma} \tag{4.44}$$

$$nU^\beta \left(\frac{\rho + p/c^2}{n} U^\alpha\right)_{,\beta} + p_{,\beta}\eta^{\alpha\beta} = 0 \tag{4.45}$$

$$nU^\beta U_\alpha \left(\frac{\rho + p/c^2}{n} U^\alpha\right)_{,\beta} + p_{,\beta}\eta^{\alpha\beta} U_\alpha = 0 \tag{4.46}$$

$$U^\beta \left[-n\left(\frac{\rho c^2 + p}{n}\right)_{,\beta} + p_{,\beta} \right] = 0 \tag{4.47}$$

$$-U^\beta \left[\rho_{,\beta} c^2 - \frac{\rho c^2 + p}{n} n_{,\beta} \right] = 0 \tag{4.48}$$

$$-U^\beta \left[\rho_{,\beta} - \frac{\rho + p/c^2}{n} n_{,\beta} \right] = 0$$

練習問題 12 の解

次式は, 完全流体の MCR 系でのストレス - エネルギーテンソル (エネルギー・運動量テンソル) である．

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

成分を書き下すと，

$$T^{00} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^0 U^0 + p\eta^{00} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) c^2 - p = \rho c^2$$

$$T^{0i}=\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)U^0U^i+p\eta^{0i}=0$$

$$T^{i0}=\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)U^iU^0+p\eta^{i0}=0$$

$$T^{ii}=\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)U^iU^i+p\eta^{ii}=p$$

$$T^{ij}=\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)U^iU^j+p\eta^{ij}=0,\ \text{when}\ \ i\neq j$$

これで，次式が証明できた．

$$T^{\alpha\beta}=\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)U^\alpha U^\beta+p\eta^{\alpha\beta} \tag{4.37}$$

上式は系に依存しない形になる．

$$\boldsymbol{T}=\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\vec{U}\otimes\vec{U}+p\boldsymbol{g}^{-1} \tag{4.38}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

【参考】ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）の式（4.37）をエネルギー・運動量保存則の式（4.34）に適用する．

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0 \tag{4.34}$$

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=\left[\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)U^\alpha U^\beta+p\eta^{\alpha\beta}\right]_{,\beta}=0 \tag{4.39}$$

上式は，フリーの α について 4 つの式である．

$$\left(nU^\beta\right)_{,\beta}=0 \tag{4.40}$$

も仮定して，式（4.39）の中辺の第 1 項は，

$$\begin{aligned}\left[\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)U^\alpha U^\beta\right]_{,\beta}&=\left[\frac{\rho+p/c^2}{n}U^\alpha nU^\beta\right]_{,\beta}\\&=\left(\frac{\rho+p/c^2}{n}U^\alpha\right)\left(nU^\beta\right)_{,\beta}+\left(\frac{\rho+p/c^2}{n}U^\alpha\right)_{,\beta}nU^\beta\\&=nU^\beta\left(\frac{\rho+p/c^2}{n}U^\alpha\right)_{,\beta}\end{aligned} \tag{4.41}$$

式（4.39）は，

$$nU^\beta\left(\frac{\rho+p/c^2}{n}U^\alpha\right)_{,\beta}+p_{,\beta}\eta^{\alpha\beta}=0 \tag{4.45}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 13 の解

練習問題 13 は，次式を証明することに使う．

$$U^\alpha{}_{,\beta}U_\alpha=0 \tag{4.42}$$

式（4.43）から式（4.44）を導く過程を示すのが問題である．

$$U^\alpha U_\alpha=-c^2\Rightarrow(U^\alpha U_\alpha)_{,\beta}=(U^\alpha U^\gamma\eta_{\alpha\gamma})_{,\beta}=0 \tag{4.43}$$

$\eta_{\alpha\gamma}=Const.$であるので，$\eta_{\alpha\gamma,\beta}=0$である．最後の式の左辺を部分微分して，

$$(U^\alpha U^\gamma\eta_{\alpha\gamma})_{,\beta}=(U^\alpha U^\gamma)_{,\beta}\eta_{\alpha\gamma}+(U^\alpha U^\gamma)(\eta_{\alpha\gamma,\beta})=(U^\alpha U^\gamma)_{,\beta}\eta_{\alpha\gamma}$$

（$\eta_{\alpha\gamma}=Const.$だから微分の対象（）の外に出すという説明でもよい．）

これをさらに部分微分すると，

$$(U^\alpha U^\gamma)_{,\beta}\eta_{\alpha\gamma}=U^\alpha{}_{,\beta}U^\gamma\eta_{\alpha\gamma}+U^\gamma{}_{,\beta}U^\alpha\eta_{\alpha\gamma}$$

右辺の第 2 項に，η の対称性を適用して，ラベルを付け替えて，

$$U^\gamma{}_{,\beta}U^\alpha\eta_{\alpha\gamma}=U^\gamma{}_{,\beta}U^\alpha\eta_{\gamma\alpha}=U^\alpha{}_{,\beta}U^\gamma\eta_{\alpha\gamma}$$

さらに，$U^\gamma\eta_{\alpha\gamma}=U_\alpha$ を適用して，

$$2U^\alpha{}_{,\beta}U^\gamma\eta_{\alpha\gamma}=2U^\alpha{}_{,\beta}U_\alpha$$

となるので，

$$\begin{aligned}(U^\alpha U^\gamma\eta_{\alpha\gamma})_{,\beta}&=(U^\alpha U^\gamma)_{,\beta}\eta_{\alpha\gamma}=2U^\alpha{}_{,\beta}U^\gamma\eta_{\alpha\gamma}\\&=2U^\alpha{}_{,\beta}U_\alpha=0\end{aligned} \tag{4.44}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 14 の解

$\vec{U}\xrightarrow[MCRF]{}(c,0,0,0)$ だから，式（4.45）に，U_α を掛け，α に関して和をとることにより，MCR 系での時間成分（0 成分）が取り出せる．

式（4.45）の時間成分は，

$$nU^{\beta}U_{\alpha}\left(\frac{\rho+p/c^2}{n}U^{\alpha}\right)_{,\beta}+p_{,\beta}\eta^{\alpha\beta}U_{\alpha}=0 \tag{4.46}$$

$$U^{\alpha}{}_{,\beta}U_{\alpha}=0,\quad U^{\alpha}U_{\alpha}=-c^2,\quad \eta^{\alpha\beta}U_{\alpha}=U^{\beta}$$

を使って，式（4.46）から，

$$U^{\beta}\left[-n\left(\frac{\rho c^2+p}{n}\right)_{,\beta}+p_{,\beta}\right]=0 \tag{4.47}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 15 の解

式（4.47）左辺

$$=U^{\beta}\left[-n\left(\frac{\rho c^2+p}{n}\right)_{,\beta}+p_{,\beta}\right]$$

$$=U^{\beta}\left[-(\rho_{,\beta}c^2+p_{,\beta})-n\left(\frac{\rho c^2+p}{-n^2}\right)+p_{,\beta}\right]$$

$$=-U^{\beta}\left[\rho_{,\beta}c^2-\left(\frac{\rho c^2+p}{n}\right)\right]$$

次式が証明できた．

$$-U^{\beta}\left[\rho_{,\beta}-\frac{\rho+p/c^2}{n}n_{,\beta}\right]=0 \tag{4.48}$$

これが，式（4.45）の時間成分である．

$\dfrac{d}{d\tau}=U^{\beta}\dfrac{d}{dx^{\beta}}$ から導ける $\dfrac{d\rho}{d\tau}=\rho_{,\beta}U^{\beta}$， $\dfrac{dn}{d\tau}=n_{,\beta}U^{\beta}$ を使って，

$$\frac{d\rho}{d\tau}-\frac{\rho+p/c^2}{n}\frac{dn}{d\tau}=0 \tag{4.49}$$

これは，エネルギー保存則を示す．

式（4.49）と式（4.25）を比べて，

$$d\rho\cdot c^2-\left(\rho c^2+p\right)dn/n=nTds \tag{4.25}$$

$$U^{\alpha}S_{,\alpha}=\frac{dS}{d\tau}=0 \tag{4.50}$$

したがって，粒子を保存する完全流体では，比エントロピーを保存する．これを断熱（adiabatic）という．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 16 の解

微分は，近傍との差を必要とするが，近傍の要素が微分対象と同じという保証はないので，微分は 0 にならない．

式（4.45）を再掲する．

$$nU^{\beta}\left(\frac{\rho+p/c^2}{n}U^{\alpha}\right)_{,\beta}+p_{,\beta}\eta^{\alpha\beta}=0 \tag{4.45}$$

上式の i 成分（空間成分）は，

$$nU^{\beta}\left(\frac{\rho+p/c^2}{n}U^{i}\right)_{,\beta}+p_{,\beta}\eta^{i\beta}=0 \tag{4.51}$$

$U^i=0$ だが， $U^i{}_{,\beta}\neq 0$ であり，

$$\left(\rho+p/c^2\right)U^{i}{}_{,\beta}U^{\beta}+p_{,\beta}\eta^{i\beta}=0 \tag{4.52}$$

これは，式（4.45）の空間成分であり，運動量保存則を示す．上式から，

$$\left(\rho+p/c^2\right)U_{i,\beta}U^{\beta}+p_{,i}=0 \tag{4.53}$$

ここで，

$$\frac{d}{d\tau}=\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\frac{d}{dx^{\beta}}=U^{\beta}\frac{d}{dx^{\beta}}$$

から導ける

$$a_i\equiv\frac{dU^i}{d\tau}=U^{i}{}_{,\beta}U^{\beta}=U_{i,\beta}U^{\beta}$$

をつかって，

◆ $$\left(\rho+p/c^2\right)a_i+p_{,i}=0 \tag{4.54}$$

上式は，非相対論的な流体力学の次式の一般化になっている．

$$\rho\boldsymbol{a}+\nabla p=0 \tag{4.55}$$

$$\text{where}\quad \boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v},\quad a_i=U_{i,\beta}U^{\beta} \tag{4.56}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 17 の解

$$\vec{U} \to (c\gamma, \gamma \boldsymbol{v}) = (c\gamma, \gamma v^1, \gamma v^2, \gamma v^3)$$

$$\text{where} \quad \beta^i = \frac{v^i}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}}$$

$$a^i = U^i{}_{,\beta} U^\beta$$

$$= \frac{\partial v^i}{\partial x^0} c\gamma + \frac{\partial v^i}{\partial x^1}\gamma v^1 + \frac{\partial v^i}{\partial x^2}\gamma v^2 + \frac{\partial v^i}{\partial x^3}\gamma v^3$$

$$= \gamma\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + (\nabla v^i)\cdot \boldsymbol{v}\right)$$

$$= \gamma\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v^i\right)$$

where,

$$\nabla = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x^3}$$ （ベクトルであることに注意）

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$$ （ベクトルでないことに注意）

$\beta \to 0, \quad \gamma \to 1$ のとき，

$$a^i = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)v^i$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 18 の解

$\dfrac{dU^i}{d\tau} = U^i{}_{,\beta} U^\beta$ を使えば，式（4.52）は，

$$\frac{dU^i}{d\tau}\left(\rho + p/c^2\right) + \eta^{i\beta}\nabla_\beta p = 0 \tag{4.52'}$$

これは，運動量保存則を示す.

$\dfrac{d}{d\tau} = \dfrac{dt}{d\tau}\dfrac{d}{dt} = \gamma \dfrac{d}{dt}$ だから，上式は，

$$\gamma \frac{dU^i}{dt}\left(\rho + p/c^2\right) = -\eta^{i\beta}\nabla_\beta p \tag{4.52''}$$

これは，加速度方程式である．ただし，運動量は，γ 倍に増えていく．

上式は，非相対論的な流体力学の次式の一般化になっている．

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right) = -\nabla p \tag{4.55'}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = m\frac{dn}{dt}$$

$$\text{where} \quad v << c, \quad p << \rho c^2$$

()

19　式（4.58）がガウスの法則［式（4.57）］を証明するのに使えることを示せ．

$$\int V^{\alpha}{}_{,\alpha} d^4x = \oint V^{\alpha} n_{\alpha} d^3 s \qquad \text{式（4.57）}$$

$$\int \left[V^0(ct_2) - V^0(ct_1) \right] dxdydz$$
$$+ \int \left[V^x(x_2) - V^x(x_1) \right] cdtdydz \cdots \qquad \text{式（4.58）}$$

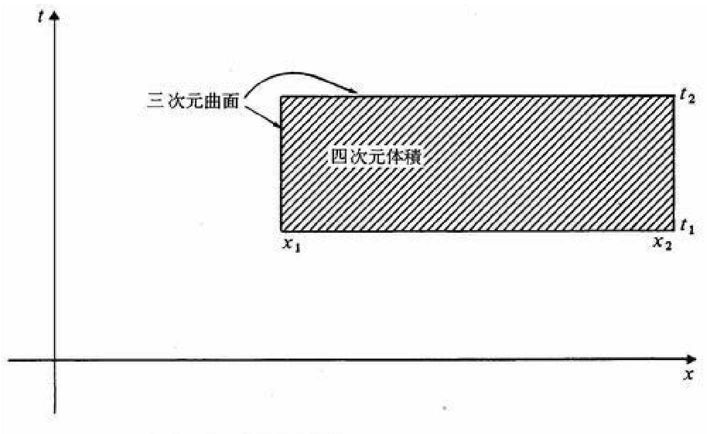


図 4.9　時空のある領域の境界

図 4.9 の境界面において，ct_2 面に垂直なのは $c\tilde{d}t$ であり，ct_1 面に垂直なのは $-c\tilde{d}t$ である．x_2 面に垂直なのは $\tilde{d}x$ であり，x_1 面に垂直なのは $-\tilde{d}x$ である．

式（4.57）の右辺

$$= \int_{ct2} V^0 dxdydz + \int_{ct} (-V^0) dxdydz$$
$$+ \int_{x2} V^x cdtdydz + \int_{x1} (-V^x) cdtdydz$$

＋境界のほかの面での同様な項

$$= \int \left[V^0(ct_2) - V^0(ct_1) \right] dxdydz$$
$$+ \int \left[V^x(x_2) - V^x(x_1) \right] cdtdydz \cdots$$
$$= \int \frac{V^0(ct_2) - V^0(ct_1)}{ct_2 - ct_1} cdtdxdydz$$
$$+ \int \frac{V^x(x_2) - V^x(x_1)}{x_2 - x_1} cdtdxdydz \cdots$$

=式（4.57）の左辺

()

20　(a)　粒子数が保存しないで，MCR 系で単位時間・単位体積あたり ε の割合で局所的に生成されるとしたら，保存則の式（4.35）は

$$N^{\alpha}{}_{,\alpha} = \varepsilon$$

となることを示せ.

(b)　(a)を一般化して物体のエネルギー・運動量が保存しない（たとえば，物体が外界と相互作用するため）とき，

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = F^{\alpha}$$

で定義される 4 元ベクトルの相対論的な力 F^{α} がある. MCR 系で F^{α} の成分について説明せよ.

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \qquad (4.34)$$

$$N^{\alpha}{}_{,\alpha} = (nU^{\alpha})_{,\alpha} = 0 \qquad (4.35)$$

(a)　$N^{\alpha}{}_{,\alpha} = N^{0}{}_{,0} + N^{1}{}_{,1} + N^{2}{}_{,2} + N^{3}{}_{,3} = 0$　（4.35）

$$-N^{0}{}_{,0} = N^{1}{}_{,1} + N^{2}{}_{,2} + N^{3}{}_{,3}$$

これは，単位時間・単位体積あたりの粒子数の増減量が境界での粒子の出入数でバランスしていることを示す．局所的に生成される項を足して，

$$-N^{0}{}_{,0} + \varepsilon = N^{1}{}_{,1} + N^{2}{}_{,2} + N^{3}{}_{,3}$$

したがって，与式が証明できた.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　$T^{0\beta}{}_{,\beta} = F^{0}$

F^{0} は単位体積あたりのエネルギー生成率である.

$$T^{i\beta}{}_{,\beta} = F^{i}$$

F^{i} は力の i 成分である.

()

21　慣性系 O で次の系のストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）の成分を計算せよ.

(a)　O で見て同じ速度 $\mathbf{v} = \beta\mathbf{e}_x$ で運動している粒子の集団，粒子の共動系で見てこれらの粒子の静止質量密度を ρ_0 とする．連続体と扱うために十分に高い密度だと仮定してよい.

(b)　N 個の同じ質量 m の粒子が，$x-y$ 面内で O の原点を中心として，角速度 ω 半径 a の円周を反時計まわりに運動している円環．この円環は断面が半径 $\delta a << a$ の円形のドーナッツ型で，その内部では粒子は一様で，連続体近似が成り立つ程度に密に分布している．それらの粒子を軌道運動させている力のストレス - エネルギーを含めないこと．（計算の途中で，(a)の ρ_0 を N，a，ω，δa で表すことになる．）

(c)　そのような円環が二つあり，それらの半径は同じ a で，一つは時計まわりで，もう一つは反時計まわりに回転している場合，粒子は衝突やほかの相互作用をしないとする.

(a)　練習問題 7 から，

$$\vec{U} \to (c\gamma, c\gamma\beta, 0, 0),\ \text{where}\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 U^{\alpha} U^{\beta}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　リング状の任意の点で，粒子の速度は，ωa である．任意の位置 (x, y) において，

$$\vec{U} \to \gamma(c, -\omega y, \omega x, 0),\ \text{where}\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2 a^2}}$$

慣性系では，その個数密度は，

$$\frac{N}{2\pi a \cdot \pi\delta a^2} = nU^0 = nc\gamma,\ \text{where}\quad n\ ;\text{その静止系での個数密度}$$

$$n = \frac{N}{2\pi^2 c\gamma a\delta a^2}$$

これを使って，

$$T^{\alpha\beta} = mnU^\alpha U^\beta$$

$$U^\alpha U^\beta = \gamma^2 \begin{pmatrix} c \\ -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -\omega y & \omega x & 0 \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} c^2 & -c\omega y & c\omega x & 0 \\ -c\omega y & \omega^2 y^2 & -\omega^2 xy & 0 \\ c\omega x & -\omega^2 xy & \omega^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

＋＋

(c)　上式の $\omega \to -\omega$ としたものと上式の和をとる．

$$U^\alpha U^\beta$$

$$= \gamma^2 \begin{pmatrix} c^2 & -c\omega y & c\omega x & 0 \\ -c\omega y & \omega^2 y^2 & -\omega^2 xy & 0 \\ c\omega x & -\omega^2 xy & \omega^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma^2 \begin{pmatrix} c^2 & c\omega y & -c\omega x & 0 \\ c\omega y & \omega^2 y^2 & -\omega^2 xy & 0 \\ -c\omega x & -\omega^2 xy & \omega^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \gamma^2 \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\omega^2 y^2 & -2\omega^2 xy & 0 \\ 0 & -2\omega^2 xy & 2\omega^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

()

22　多くの物理系は，衝突のない粒子の集団として，理想化して考えることができる（たとえば，黒体輻射，希薄プラズマ，銀河や球状星団）．そうした系では各点ごとに，ランダムな速度分布をしていて，MCR 系では方向の優位性がないと仮定して，ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）が完全流体のものであることを示せ．すべての粒子が同じ速度 v と質量 m をもつとして，p と ρ を m，v，n の関数として表せ．光子ガスでは $p = \rho c^2/3$ であることを示せ．

方向に優位性がないということは，T^{ij} が回転に対して不変であることを意味する．したがって，練習問題 11 より，ある p があって $T^{ij} = p\delta^{ij}$ とかける．MCR 系では $T^{0i} = 0$ だから，練習問題 12 の式（4.36）は成立する．

$$\left(T^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \qquad (4.36)$$

明らかに

$$\rho = \gamma nm, \text{ where } \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

たとえば，T^{zz} への各粒子の寄与は，それが表す運動量流速である．(θ, ϕ) 方向に速度 v をもつ一つの粒子に対しては，それは $z = Const.$ の面を $v\cos\theta$ の速度で横切るから $m\gamma v\cos\theta$ が z 運動量の成分となる．それらがランダムな速度をもっているとすれば，

$$T^{zz} = n(m\gamma v)(v) \times (\text{単位球上の}\cos^2\theta\text{の平均値} = 1/3)$$

となる．したがって，

$$T^{zz} = p = \gamma nmv^2/3$$

こうして

$$\frac{p}{\rho c^2} = \frac{1}{3}\frac{v^2}{c^2} \to \frac{1}{3}, \quad when \quad \frac{v}{c} \to 1$$

この極限で，各光子のエネルギー$m\gamma$は有限にとどまる．

()

23　式$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$を使って，閉じた系（空間の閉じた領域の外部では$T^{\mu\nu} = 0$となる系をいう）で次の量を計算せよ．

(a)　$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{0\alpha} d^3x = 0$　（エネルギー・運動量保存）

(b)　$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int T^{00} x^i x^j d^3x = 2\int T^{ij} d^3x$　（テンソルビリアル定理）

(c)　$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int T^{00} (x^i x_i)^2 d^3x = 4\int T^i{}_i x^j x_j d^3x + 8\int T^{ij} x_i x_j d^3x$

()

24　天体の明るさの観測とは，天体から出た輻射の流速T^{0i}を地球で測定することである．この問題は流速が天体と地球の相対速度にどのように依存するかをしらべるものである．

(a)　一定の光度L（１秒あたりの全エネルギー）をもつ星の静止系Oで，事象$(t, x, 0, 0)$でのその星からの輻射のストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）の成分は，$T^{00} = T^{0x} = T^{x0} = L/(4\pi x^2)$であることを示せ．星は原点に静止している．

(b)　$\vec{X}$が輻射の放出と受信の事象をつなぐヌルベクトルだとする.事象点$(x, x, 0, 0)$で観測された輻射については$\vec{X} \xrightarrow[O]{} (x, x, 0, 0)$であることを示せ. (a)のストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）は，系に依存しない表現

$$\boldsymbol{T} = \frac{L}{4\pi} \frac{\vec{X} \otimes \vec{X}}{(\vec{U}_s \cdot \vec{X})^4}$$

をもつことを示せ．ここで，$\vec{U}_s$は星の４元速度で，$\vec{U}_s \xrightarrow[O]{} (1, 0, 0, 0)$である．

(c)　星から速度vでx方向に遠ざかっている地球に固定された観測者$\bar{O}$が，同じく$\bar{x}$軸にある星について，同じ輻射を測定とするとする．$\vec{X} \to (R, R, 0, 0)$として，Rをxの関数として求めよ．また$T^{\bar{0}\bar{x}}$をRを使って表せ．Rと$T^{\bar{0}\bar{x}}$のv依存性について説明せよ.

()

25　特殊相対論における電磁気学
真空中の電場$\boldsymbol{E}$と磁場$\boldsymbol{B}$に対するマクスウェル方程式は, 3 次元ベクトルの記号で書くと

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \qquad \left(\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \qquad \left(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j}\right)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{4.59}$$

である．（ここで，ρは電荷密度で，$\boldsymbol{j}$は電流密度である．）

(a)　反対称の$(2,0)$テンソル$\boldsymbol{F}$を時空中で式$F^{0i} = E^i / c (i = 1, 2, 3)$，$F^{xy} = B_z$，$F^{yz} = B_x$，$F^{zx} = B_y$によって定義することができる．この定義からこの系でのほかの成分$F^{\mu\nu}$をすべて求め，行列の形で表せ.

(b)　z軸のまわりの角度θの回転は一種のローレンツ変換で，行列

$$\Lambda^{\beta'}{}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で表される．$\boldsymbol{F}$の新しい成分

$$F^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} \Lambda^{\beta'}{}_{\nu} F^{\mu\nu}$$

が新しい電場と磁場の３次元ベクトル成分を定義し［(a)で与えた規則に従って］，それらが古い$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{B}$を３次元空間で回転したとき得られる成分と同じであることを示せ．（このことは$\boldsymbol{F}$を空間回転することによって，$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{B}$が空間回転することを示している．）

(c)　電流４元ベクトル$\vec{J}$を$J^0 = c\rho$，$j^i = (\boldsymbol{J})^i$で定義するとき，マクスウェル方程式の二つの式は

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \mu_0 J^{\mu} \tag{4.60}$$

となることを示せ．

(d)　残りのマクスウェル方程式は

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0 \tag{4.61}$$

であることを示せ．この式には，4 個の独立な式しか含まれないことに注意せよ．すなわち，一つの添字をたとえば 0 に選んだとする．すると，残りの三つの値（1，2，3）を μ, ν, λ に任意の順序で割り当てると，（全体の符号を別として）そのたびごとに同じ式が得られる．実際に試してみると，これは $F_{\mu\nu}$ の反対称のためである．

(e)　こうしてマクスウェル方程式をテンソル形式で表した．電荷の保存 $J^{\mu}{}_{,\mu} = 0$［粒子数流速ベクトル $\vec{N}$ に対しての類似の式（4.35）を思い起こすとよい］は式（4.60）で保証されることを示せ．（ヒント：$F_{\mu\nu}$ の反対称性を使え．）

(f)　どの系でも電荷密度は J^0 である．したがって，時空の全電荷は $Q = \int J^0 dxdydz$ である．ここで積分範囲は $t =$ 一定の超曲面全体である．この超曲面の単位垂直を $\tilde{d}t = \tilde{n}$ で定義すると，

$$Q = \int J^{\alpha} n_{\alpha} dxdydz \tag{4.62}$$

となることを示せ．

(g)　ガウスの法則と式（4.60）を使って，$t =$ 一定の超曲面の中の任意の閉じた二次元曲面 φ の内部の電荷は J 全体にわたって積分をして，

$$Q = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\varphi} F^{0i} n_i d\varphi = c\varepsilon_0 \oint_{\varphi} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} d\varphi$$

で求めることができることを示せ．ここで $\boldsymbol{n}$ は超曲面の中の φ の単位垂直である．［前問の(f)の $\tilde{n}$ とは同じではない．］

(h)　上記(a)で使った系に対して x 方向に速度 v で運動している系 $\overline{O}$ へ $F^{\mu\nu}$ をローレンツ変換せよ．この系において，(a)と同じやり方で，３次元ベクトル $\overline{\boldsymbol{E}}$ を成分 $\overline{E}^i / c = F^{\bar{0}\bar{i}}$ で，また $\overline{\boldsymbol{B}}$ も同様な成分で定義せよ．そして $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が

ローレンツ変換でどうふるまうかしらべよ．それらは混じり合ってしまう．こうして $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ 自身はローレンツ不変ではなく，ファラデー・テンソルという $\boldsymbol{F}$ の成分でしかなく，相対論で電磁場の不変な表現はこのファラデー・テンソルであることになる．注意深く考えれば，物理的にそれらの量が不変ではありえないことがわかる．特に，磁場は運動する電荷によってつくられるが，一つの系で動いている電荷は，他の系では静止していることがあり，ある系で存在する磁場が他の系では存在しなくなる．すべての系で同じなのはファラデー・テンソルであり，その成分のみが変換されるのである．

(a)　電場と $\boldsymbol{E}$ 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ についてのファラデー・テンソル（電磁場テンソル）は，次の行列である．

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{E^x}{c} & \dfrac{E^y}{c} & \dfrac{E^z}{c} \\ -\dfrac{E^x}{c} & 0 & B^z & -B^y \\ -\dfrac{E^y}{c} & -B^z & 0 & B^x \\ -\dfrac{E^z}{c} & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}$$

導出法は，このホームページの「マクスウェル方程式」を参照のこと．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(b)　ベクトルの空間回転の座標変換の問題である．

z 軸まわりの回転の座標変換行列は，

$$\Lambda^{\beta'}{}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

座標変換式は，

$$F^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} \Lambda^{\beta'}{}_{\nu} F^{\mu\nu} \tag{2}$$

次のファラデー･テンソルを座標変換する．

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{E^x}{c} & \dfrac{E^y}{c} & \dfrac{E^z}{c} \\ -\dfrac{E^x}{c} & 0 & B^z & -B^y \\ -\dfrac{E^y}{c} & -B^z & 0 & B^x \\ -\dfrac{E^z}{c} & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

式（2）は，

$$(\bar f) = (\Lambda)^T (f)(\Lambda)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{E^x}{c}\cos - \dfrac{E^y}{c}\sin & \dfrac{E^y}{c}\cos + \dfrac{E^x}{c}\sin & \dfrac{E^z}{c} \\ -\dfrac{E^x}{c}\cos + \dfrac{E^y}{c}\sin & 0 & B^z & -B^y\cos - B^x\sin \\ -\dfrac{E^y}{c}\cos - \dfrac{E^x}{c}\sin & -B^z & 0 & B^x\cos - B^y\sin \\ -\dfrac{E^z}{c} & B^y\cos + B^x\sin & -B^x\cos + B^y\sin & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

一方，空間座標回転は，

$$\begin{pmatrix} A^{\bar x} \\ A^{\bar y} \\ A^{\bar z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^x \\ A^y \\ A^z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^x\cos\theta - A^y\sin\theta \\ A^y\cos\theta + A^x\sin\theta \\ A^z \end{pmatrix} \tag{5}$$

式（3）に式（5）を代入すると，式（4）が得られる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(c)　ファラデー・テンソルを微分すると，マクスウェル方程式が導出できる．

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c}\partial_t & \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{c}}\mathrm{div}\boldsymbol{E} & \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{c\varepsilon_0} & \mu_0 \boldsymbol{j} \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \mu_0 J^\mu \tag{4.60}$$

導出法は，このホームページの「マクスウェル方程式」を参照のこと．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(d)　問題の式は，ビアンキ恒等式という．

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0 \tag{4.61}$$

これをファラデー・テンソルに適用すると，マクスウェル方程式が導出できる．導出法は，このホームページの「マクスウェル方程式」を参照のこと．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(e)　反対称性 $F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$ と対称性 $\partial_\nu\partial_\mu = \partial_\mu\partial_\nu$ を使って

$$\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu} = -\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu} = -\partial_\nu\partial_\mu F^{\nu\mu} = -\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu} = 0$$

$$\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu} = 0$$

式（m.22）$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$ から，電荷の保存則が得られる．

$$\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0\partial_\mu J^\mu = \mu_0 J^\mu{}_{,\mu} = 0$$

$$J^\mu{}_{,\mu} = 0$$

導出法は，このホームページの「マクスウェル方程式」を参照のこと．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(f)　超曲面 $\phi(t, x, y, z) = Const.$ のなかで，$\phi = t$ を選べば，$t = Const.$ 面を横切る流速を算出できる．この超曲面の単位垂直 1 形式は，$\tilde n = \tilde d t \to (1, 0, 0, 0)$ であり，これを横切る流速は，

$$\tilde n(\vec J) = \langle \tilde n, \vec J \rangle = J^\alpha n_\alpha = J^0$$

したがって，与式が得られた．

$$Q = \int J^0 dxdydz = \int J^\alpha n_\alpha dxdydz$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(g)　ガウスの定理は，つぎの式である．

$$\int V^{\alpha}{}_{,\alpha} d^4 x = \oint V^{\alpha} n_{\alpha} d^3 S \tag{4.57}$$

問題(f)に式（m.22）を適用すると，

$$Q = \int J^0 dxdydz = \frac{1}{\mu_0} \int F^{0\nu}{}_{,\nu} dxdydz$$

ガウスの定理を適用すると，$F^{00} = 0$ を考慮して，

$$\frac{1}{\mu_0} \int F^{0\nu}{}_{,\nu} dxdydz = \frac{1}{\mu_0} \oint F^{0i} n_i d\varphi$$

一方，$F^{0i} = \dfrac{E^i}{c}$ であるから，

$F^{0i}{}_{,i} = \dfrac{1}{c} E^i{}_{,i} = \dfrac{1}{c} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{1}{c} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}$，where $\boldsymbol{n}$ ；単位法線ベクトル

したがって，与式が証明できた．

$$Q = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\varphi} F^{0i} n_i d\varphi = \frac{1}{c\mu_0} \oint_{\varphi} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} d\varphi = c\varepsilon_0 \oint_{\varphi} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} d\varphi$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

(h)　$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1 \quad \beta = \dfrac{v}{c} < 1$

ファラデー・テンソルのローレンツ・ブーストを求める．

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{E^{\bar{x}}}{c} & \frac{E^{\bar{y}}}{c} & \frac{E^{\bar{z}}}{c} \\ -\frac{E^{\bar{x}}}{c} & 0 & B^{\bar{z}} & -B^{\bar{y}} \\ -\frac{E^{\bar{y}}}{c} & -B^{\bar{z}} & 0 & B^{\bar{x}} \\ -\frac{E^{\bar{z}}}{c} & B^{\bar{y}} & -B^{\bar{x}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^x}{c} & \frac{E^y}{c} & \frac{E^z}{c} \\ -\frac{E^x}{c} & 0 & B^z & -B^y \\ -\frac{E^y}{c} & -B^z & 0 & B^x \\ -\frac{E^z}{c} & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^x}{c} & \gamma\frac{E^y}{c} - \gamma\beta B^z & \gamma\frac{E^z}{c} + \gamma\beta B^y \\ -\frac{E^x}{c} & 0 & \gamma B^z - \gamma\beta\frac{E^y}{c} & -\gamma B^y - \gamma\beta\frac{E^z}{c} \\ -\gamma\frac{E^y}{c} + \gamma\beta B^z & -\gamma B^z + \gamma\beta\frac{E^y}{c} & 0 & B^x \\ -\gamma\frac{E^z}{c} - \gamma\beta B^y & \gamma B^y + \gamma\beta\frac{E^z}{c} & -B^x & 0 \end{pmatrix}$$

成分を比較して，

$$E^{\bar{x}} = E^x$$

$$\boldsymbol{E}'_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{E}_{\perp} + \mathrm{v} \times \boldsymbol{B}_{\perp})$$

$$B^{\bar{x}} = B^x$$

$$\boldsymbol{B}'_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{B}_{\perp} + \frac{1}{c^2} \mathrm{v} \times \boldsymbol{E}_{\perp})$$

where　$\boldsymbol{E}_{\perp} = E^y \boldsymbol{e}_x + E^z \boldsymbol{e}_z$，　$\boldsymbol{B}_{\perp} = B^y \boldsymbol{e}_x + B^z \boldsymbol{e}_z$

$\boldsymbol{E}'_{\perp} = E^{\bar{y}} \boldsymbol{e}_{\bar{x}} + E^{\bar{z}} \boldsymbol{e}_{\bar{z}}$，　$\boldsymbol{B}'_{\perp} = B^{\bar{y}} \boldsymbol{e}_{\bar{x}} + B^{\bar{z}} \boldsymbol{e}_{\bar{z}}$

$v = c\beta$

5　曲率の導入

重力と曲率，極座標のテンソル代数・テンソル解析，クリストッフェル記号

5.1　重力と曲率の関係　　（5.1）～（5.2）

重力赤方偏移の実験　　（5.1）

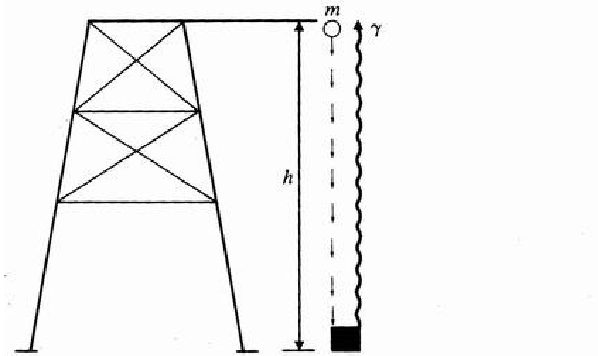


図 5.1　質量 m が高さ h の塔から落とされる．一番下での全質量はエネルギーに変えられ，光子として頂上へ戻される．光子がさかのぼるとき，落下するさいに質量が得たエネルギーを失わなければ永久運動となる．したがって重力場をさかのぼるさいに光は赤方偏移する．

◆　$$\frac{E'}{E}=\frac{h\nu'}{h\nu}=\frac{mc^2}{mc^2+mgh+\mathrm{O}(v^4)}=1-\frac{gh}{c^2}+\mathrm{O}(v^4) \tag{5.1}$$

練習問題 1　　（5.1）～（5.2）

地上で静止したローレンツ系が存在しないこと　　()

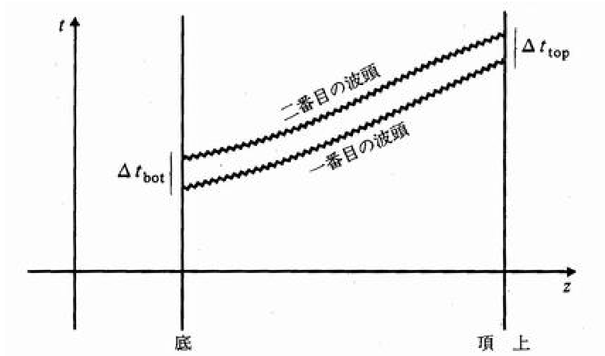


図 5.2　時間的に変化しない重力場では，電磁波の引き続く二つの"波頭"は同一の経路を運動しなければならない．赤方偏移［式(5.1)］のため，頂上でのそれらの間の時間間隔は，底での間隔よりも長くなる．したがって頂上での観測者は，底にある時計がゆっくり進むように"見る"．

等価原理　　()

再び赤方偏移の実験　　（5.2）

$$\frac{\nu(\text{自由落下系})}{\nu'(\text{頂上での装置})} \cong 1+\frac{gh}{c^2} \qquad (5.2)$$

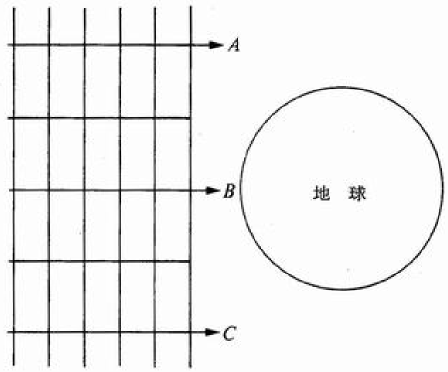


図 5.3　剛体的な系は地球の場の中では剛体的なままでは自由落下できない.

局所慣性系　　()

潮汐力　　()

練習問題 2　　()

曲率の役割　　()

5.2　極座標でのテンソル代数　（5.3）～（5.35）

ベクトルと 1 形式　（5.7）～（5.15）

【表記法】シュッツ著では一般座標$\{\xi,\eta\}$を使っているが，本書では極座標$\{r,\theta\}$で統一している．一般式は$\{r,\theta\}$を$\{\xi,\eta\}$に置き換えるだけでよい．

ユークリッド平面のデカルト座標$\{x,y\}$と極座標$\{r,\theta\}$

ベクトルの成分の座標変換は，

$$r=(x^2+y^2)^{1/2}, \quad x=r\cos\theta \qquad (5.3)$$

$$\theta=\arctan(y/x), \quad y=r\sin\theta$$

小さな増分の変換

$$\begin{pmatrix}\Delta r\\ \Delta\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r}\\ -\dfrac{y}{r^2} & \dfrac{x}{r^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\dfrac{1}{r}\sin\theta & \dfrac{1}{r}\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} \qquad (5.4)$$

$$\begin{pmatrix}\Delta r\\ \Delta\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} \qquad (5.5)$$

ヤコビアン

$$\det\begin{pmatrix}\partial r/\partial x & \partial r/\partial y\\ \partial\theta/\partial x & \partial\theta/\partial y\end{pmatrix}\neq 0 \qquad (5.6)$$

$$\det\begin{pmatrix}\partial \xi/\partial x & \partial \xi/\partial y\\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y\end{pmatrix}\neq 0 \qquad (5.6)$$

ヤコビアンが一点で 0 になるなら，変換はそこで特異であるという．

式（5.5）の繰り返しになるが，

$$\begin{pmatrix}\Delta r\\ \Delta\theta\end{pmatrix}=\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} \qquad (5.7)$$

$$\Delta x^{\alpha'}=\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}\Delta x^{\beta}, \quad \Delta x^{\alpha'}=\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\Delta x^{\beta}, \quad \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}\right)=\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\end{pmatrix}$$

（5.8）

ベクトルの成分の座標逆変換は,

$$x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta \qquad (5.3)$$

$$\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta\\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta r\\ \Delta\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = \left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right)\begin{pmatrix}\Delta r\\ \Delta\theta\end{pmatrix}$$

$$\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right) = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x/r & -y\\ y/r & x\end{pmatrix}$$

（5.13）

ベクトルの成分の座標変換は,

$$V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}V^{\beta} \qquad (5.9)$$

１形式の定義

$$\tilde{d}\phi \to \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \qquad (5.10)$$

偏微分の規則

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad (5.11)$$

１形式の成分の座標変換は,

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial r} & \dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix} \qquad (5.12)$$

$$\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right) = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix} \qquad (5.13)$$

$$\left(\tilde{d}\phi\right)_{\beta'} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\left(\tilde{d}\phi\right)_{\alpha} \qquad (5.14)$$

$$\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right)\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right) =$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial x} & \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\theta} + \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial\theta}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\theta} + \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix} \qquad (5.15)$$

合成関数の微分の規則と偏微分の定義から,

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial r} & \dfrac{\partial r}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial r} & \dfrac{\partial\theta}{\partial\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (5.16)$$

ゆえに

$$\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right)^{-1} = \left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right)^{T}$$

【ポイント】ベクトル成分の逆変換行列 $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}$ は変換行列 $\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}$ の逆行列である．それは，変換行列 $\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}$ の偏微分の分母と分子を入れ換えた行列の転置行列である．また，特殊相対論のローレンツ変換の変換行列も本来同じ意味である．2.9 練習問題 11 を参照．

練習問題 3　　（5.6）
練習問題 7　　（5.3）～（5.15）
練習問題 8　　（5.7）～（5.13）

曲線とベクトル　　　　　　　　　　　　（5.17）～（5.20）

◆　　曲線：$\{\xi = f(s), \eta = g(s), a \le s \le b\}$　　（5.17）

$\{\xi = f'(s'), \eta = g'(s'), a' \le s' \le b'\}$　　（5.18）

$\phi = \phi(\xi(s), \eta(s))$

$$\frac{d\phi}{ds} = \left\langle \tilde{d}\phi, \vec{V} \right\rangle \qquad (5.19)$$

where　$\vec{V} \to \left(\frac{d\xi}{ds}, \frac{d\eta}{ds}\right)$,　$\tilde{d}\phi \to \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}, \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)$

$$\begin{pmatrix} d\xi/ds \\ d\eta/ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx/ds \\ dy/ds \end{pmatrix} \qquad (5.20)$$

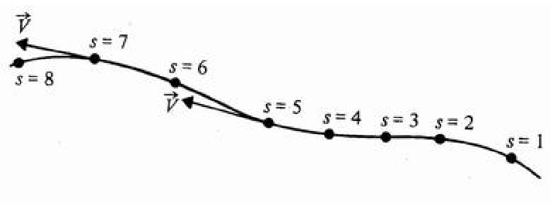


図 5.4　曲線とそのパラメーターとその接ベクトル

練習問題 4　　　（5.18）

練習問題 5　　　（）

極座標基底１形式と極座標基底ベクトル　　　　（5.21）～（5.27）

基底ベクトルの座標変換は,

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial y/\partial r \\ \partial x/\partial\theta & \partial y/\partial\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} = \left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right) \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix}$$

（5.21）（5.23）

基底 1 形式の座標変換は,

$$\begin{pmatrix} \tilde{d}r \\ \tilde{d}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y \\ \partial\theta/\partial x & \partial\theta/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}x \\ \tilde{d}y \end{pmatrix} = \left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right) \begin{pmatrix} \tilde{d}x \\ \tilde{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}x \\ \tilde{d}y \end{pmatrix}$$

（5.26）（5.27）

基底が単位基底でないことを示す.

$$\left|\vec{e}_\theta\right|^2 = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = r^2 \sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$$

$$\left|\vec{e}_r\right|^2 = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\left|\tilde{d}r\right|^2 = \tilde{d}r \cdot \tilde{d}r = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\left|\tilde{d}\theta\right|^2 = \tilde{d}\theta \cdot \tilde{d}\theta = \frac{1}{r^2}\sin^2\theta + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta = \frac{1}{r^2}$$

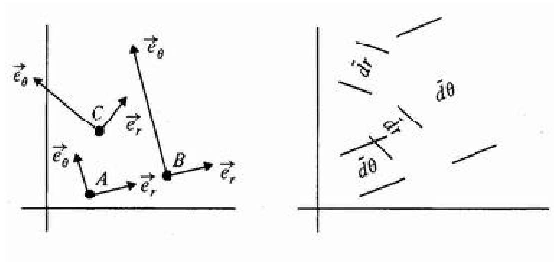


図 5.5　極座標に対する基底ベクトルと基底一形式

練習問題 6　　　（）

メトリックテンソル

$$\boldsymbol{g}\left(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta\right) = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{（デカルト座標）} \qquad (5.29)$$

$$g_{\alpha'\beta'} = \boldsymbol{g}\left(\vec{e}_{\alpha'}, \vec{e}_{\beta'}\right) = \vec{e}_{\alpha'} \cdot \vec{e}_{\beta'} \qquad (5.30)$$

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{r\theta} = 0 \qquad (5.31)$$

$$\left(g_{\alpha\beta}\right)_{\text{polar}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \qquad (5.32)$$

線要素

◆ $$d\vec{l}\cdot d\vec{l}=ds^2=\left|dr\vec{e}_r+d\theta\vec{e}_\theta\right|^2=dr^2+r^2d\theta^2 \qquad (5.33)$$

$$\boldsymbol{g}=g_{\alpha\beta}\tilde{d}x^\alpha\otimes\tilde{d}x^\beta=\tilde{d}r\otimes\tilde{d}r+r^2\tilde{d}\theta\otimes\tilde{d}\theta$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & r^2\end{pmatrix}^{-1}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & r^{-2}\end{pmatrix} \qquad (5.34)$$

$$\left(\vec{d}\phi\right)^\alpha=g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta} \qquad (5.35)$$

$$\left(\vec{d}\phi\right)^r=g^{r\beta}\phi_{,\beta}=g^{rr}\phi_{,r}+g^{r\theta}\phi_{,\theta}=\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$\left(\vec{d}\phi\right)^\theta=g^{\theta\beta}\phi_{,\beta}=g^{\theta r}\phi_{,r}+g^{\theta\theta}\phi_{,\theta}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \qquad (5.36)$$

5.3　極座標におけるテンソル解析　（5.35）～（5.67）

基底ベクトルの微分　（5.36）～（5.37）

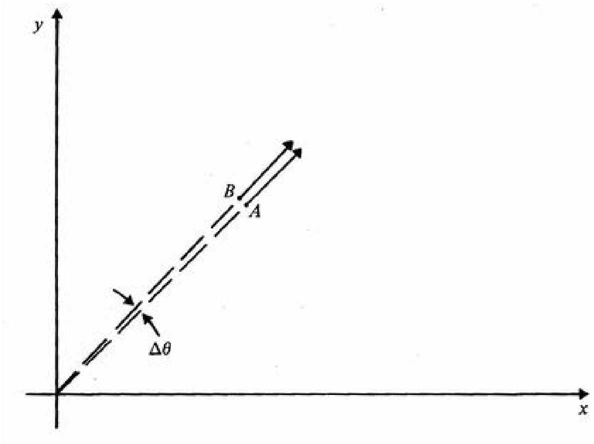


図5.6　θ が $\Delta\theta$ だけ変化したときの $\vec{e}_r$ の変化

$$\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r=\frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta\vec{e}_x+\sin\theta\vec{e}_y)=0=\Gamma^\mu{}_{rr}\vec{e}_\mu \qquad (5.37a)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_r=-\sin\theta\vec{e}_x+\cos\theta\vec{e}_y=\frac{1}{r}\vec{e}_\theta=\Gamma^\mu{}_{r\theta}\vec{e}_\mu \qquad (5.37b)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_\theta=-\sin\theta\vec{e}_x+\cos\theta\vec{e}_y=\frac{1}{r}\vec{e}_\theta=\Gamma^\mu{}_{\theta r}\vec{e}_\mu \qquad (5.38a)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta=-r\cos\theta\vec{e}_x+r\sin\theta\vec{e}_y=-r\,\vec{e}_r=\Gamma^\mu{}_{\theta\theta}\vec{e}_\mu \qquad (5.38b)$$

練習問題 9　　（5.36）～（5.37）

一般のベクトルの微分　（5.39）～（5.43）

クリストッフェル記号　（5.44）～（5.45）

クリストッフェル記号導入式

$$\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}=\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\vec{e}_\mu \qquad (5.45)$$

（5.37）～（5.38）から,

クリストッフェル記号の極座標での値

$$\Gamma^\mu{}_{rr}=\Gamma^r{}_{r\theta}=\Gamma^r{}_{\theta r}=\Gamma^\theta{}_{\theta\theta}=0,\quad \Gamma^\theta{}_{r\theta}=\Gamma^\theta{}_{\theta r}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^r{}_{\theta\theta}=-r \qquad (5.45)$$

共変微分　（5.46）～（5.53）

$\vec{V}$ の共変微分は,

$$\nabla_\beta\vec{V}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\beta}=\frac{\partial}{\partial x^\beta}(V^\alpha\vec{e}_\alpha)=\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}\vec{e}_\alpha+V^\alpha\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \qquad (5.43)$$

$$=V^\alpha{}_{,\beta}\vec{e}_\alpha+V^\alpha\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\vec{e}_\mu$$

$$=V^\alpha{}_{,\beta}\vec{e}_\alpha+V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\vec{e}_\alpha \qquad (5.46)\quad(5.47)$$

$$=\left(V^\alpha{}_{,\beta}+V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\right)\vec{e}_\alpha \qquad (5.48)\quad(5.49)$$

$$=V^\alpha{}_{;\beta}\vec{e}_\alpha \qquad (5.51)$$

共変微分の定義式

◆ $$\nabla_\beta\vec{V}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\beta}=V^\alpha{}_{;\beta}\vec{e}_\alpha \qquad (5.51)$$

◆ $$V^\alpha{}_{;\beta}\equiv V^\alpha{}_{,\beta}+V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \qquad (5.48)$$

$$\nabla\vec{V} = V^{\alpha}{}_{;\beta}\vec{e}_{\alpha}\otimes\tilde{\omega}^{\beta} \qquad (5.51b)$$

ベクトルの共変微分の成分

$$(\nabla\vec{V})^{\alpha}{}_{\beta} = (\nabla_{\beta}\vec{V})^{\alpha} = V^{\alpha}{}_{;\beta} \equiv V^{\alpha}{}_{,\beta} + V^{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} \qquad (5.52)$$

$\nabla\vec{V}$ は，ベクトル場 $\vec{e}_{\beta}$ をベクトル $\partial\vec{V}/\partial x^{\beta}$ に写像する（1,1）テンソルである．

スカラーは，基底ベクトルに依存しないから，スカラーの共変微分は，勾配であり，クリストッフェル記号は現れず，偏微分だけ現れる．

$$\nabla_{\alpha} f = \partial_{\alpha} f = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} = f_{,\alpha}, \quad \nabla f = \tilde{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}\tilde{d}x^{\alpha} = f_{,\alpha}\tilde{d}x^{\alpha} \qquad (5.52)$$

練習問題 10　　　（5.52）

練習問題 17　　　（5.44）（5.50）

発散とラプラシアン　　　（5.54）～（5.58）

極座標での発散の定義式

$$V^{\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{\partial V^{r}}{\partial r} + \frac{\partial V^{\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}V^{r}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV^{r}) + \frac{\partial}{\partial\theta}V^{\theta} \qquad (5.56)$$

$$\nabla\cdot\nabla\phi \equiv \nabla^{2}\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}\phi}{\partial\theta^{2}} \qquad (5.57)$$

$$\nabla^{2}\phi = \frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}\phi}{\partial y^{2}} \qquad (5.58)$$

練習問題 11　　　（5.50）～（5.56）

１形式と高階のテンソル微分　　　（5.58）～（5.67）

１形式の共変微分を求めるために，スカラーが１形式とベクトルの縮約であるという性質を利用する．積の微分の規則と（5.49）を使って，

$$\phi = p_{\alpha}V^{\alpha} \qquad (5.59)$$

$$\nabla_{\beta}\phi = \phi_{,\beta} = \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}V^{\alpha} + p_{\alpha}\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \qquad (5.60)$$

$$\nabla_{\beta}\phi = \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}V^{\alpha} + p_{\alpha}V^{\alpha}{}_{;\beta} - p_{\alpha}V^{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} \qquad (5.61)$$

$$\nabla_{\beta}\phi = \left(\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - p_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\right)V^{\alpha} + p_{\alpha}V^{\alpha}{}_{;\beta} \qquad (5.62)$$

１形式の共変微分の定義式

◆ $$(\nabla_{\beta}\tilde{p})_{\alpha} \equiv (\nabla\tilde{p})_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - p_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \qquad (5.63)$$

$$\nabla_{\beta}\tilde{p} = \frac{\partial\tilde{p}}{\partial x^{\beta}} = p_{\alpha;\beta}\tilde{\omega}^{\alpha} \qquad (5.63b)$$

$$\nabla\tilde{p} = p_{\alpha;\beta}\tilde{\omega}^{\alpha}\otimes\tilde{\omega}^{\beta} \qquad (5.63c)$$

式（5.61）を書き換えて，

スカラーの共変微分の定義式

◆ $$\nabla_{\beta}\left(p_{\alpha}V^{\alpha}\right) = p_{\alpha;\beta}V^{\alpha} + p_{\alpha}V^{\alpha}{}_{;\beta} \qquad (5.64)$$

(0,2)，(2,0)，(1,1)テンソルの共変微分の定義式

◆ $$\nabla_{\beta}T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} - T_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} \qquad (5.65)$$

◆ $$\nabla_{\beta}A^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}{}_{,\beta} + A^{\alpha\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + A^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} \qquad (5.66)$$

◆ $$\nabla_{\beta}B^{\mu}{}_{\nu} = B^{\mu}{}_{\nu,\beta} + B^{\alpha}{}_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - B^{\mu}{}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} \qquad (5.67)$$

$\nabla_{\beta}T_{\mu\nu}$ は ∇T の成分，$\nabla_{\beta}A^{\mu\nu}$ は ∇A の成分，$\nabla_{\beta}B^{\mu}{}_{\nu}$ は ∇B の成分である．

練習問題 12　　　（5.62）

練習問題 13　　　()

練習問題 14　　　（5.65）

練習問題 15　　　（5.66）

5.4　クリストッフェル記号とメトリック　　　（5.68）～（5.76）

$\vec{V}$ を任意のベクトルとして，それに付随する１形式

$$\tilde{V} = \boldsymbol{g}(\vec{V},\ \ )$$

$$\nabla_{\beta}\tilde{V} = \boldsymbol{g}(\nabla_{\beta}\vec{V},\ \ ) \qquad (5.68)$$

次式が成り立つ．（上式の成分表示）

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^{\mu}{}_{;\beta} \quad (5.69)$$

線形性から，

$$V_{\alpha;\beta} = \left(g_{\alpha\mu} V^{\mu}\right)_{;\beta} = g_{\alpha\mu;\beta} V^{\mu} + g_{\alpha\mu} V^{\mu}{}_{;\beta}$$

比べて，$g_{\alpha\mu;\beta} V^{\mu} = 0$ が任意の $\vec{V}$ で成り立っているから，

$$g_{\alpha\mu;\beta} = 0 \quad (5.72)$$

すべての座標系でメトリックの共変微分は 0 である．

練習問題 20　（5.74）～（5.75）
練習問題 21　（5.96）
練習問題 22　（5.68）

メトリックからのクリストッフェル記号の計算　（5.74）～（5.76）

$$\phi_{,\beta;\alpha} = \phi_{,\alpha;\beta} \quad (5.74)$$

練習問題 16　（5.74）～（5.75）

$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ のテンソル性　()

5.5　非座標基底　（5.77）～（5.96）

極座標基底　()

極単位基底　（5.77）～（5.88）

練習問題 18　（5.78）
練習問題 19　（5.81）～（5.84）

非座標基底に関する一般的注意　（5.89）～（5.96）

節の中で使われている公式と問題

5.1　重力と曲率の関係　（5.1）～（5.2）

重力赤方偏移の実験　（5.1）

練習問題 1

地上で静止したローレンツ系が存在しないこと　()

等価原理　()

再び赤方偏移の実験　（5.2）

局所慣性系　()

潮汐力　()

練習問題 2

曲率の役割　()

5.2　極座標でのテンソル代数　（5.3）～（5.36）

練習問題 3

ベクトルと１形式　（5.7）～（5.15）

練習問題 7，8

曲線とベクトル　（5.16）～（5.19）

練習問題 4，5

極座標基底１形式と極座標基底ベクトル　（5.20）～（5.27）

練習問題 6

メトリックとテンソル　（5.28）～（5.36）

5.3　極座標におけるテンソル解析　（5.37）～（5.67）

基底ベクトルの微分　（5.37）～（5.38）

練習問題 9

一般のベクトルの微分　（5.39）～（5.43）

（5.1）～（5.2）

練習問題 1

　より現実的な仮定のもとに式（5.1）を導いた議論をくり返せ．底で質点の運動エネルギーの一部εが光子に変換され，上方に打ち上げられ，残りのエネルギーは有用な形態で底にとどまる．仮に式（5.1）が破れたとして，永久機関を考えだせ．

【ポイント】式（5.1）は，模式的に導出したものであり，一般相対性理論を使った厳密な導出法は別にやる． $O(v^4)$はランダウの記号で，誤差項を表す．ラテンアルファベットのオーを用いる．ローマ字のオーを用いるのも多い．

【準備】テーラー展開を使ったべき級数展開は次式である．

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots,\quad (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^4+\cdots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots,\quad (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{8}\beta^4+\cdots$$

塔の頂上から静止質量mの粒子を自由落下させると，地面では速度$v=\sqrt{2gh}$となる．ここで観測される総エネルギーは，

$$E=mc^2\gamma=mc^2(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}=mc^2+\frac{1}{2}mv^2+\frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2}+\cdots$$

$\frac{1}{2}mv^2=mgh$ だから，

$$E\cong mc^2+\frac{1}{2}mv^2+O(v^4)=mc^2+mgh+O(v^4)$$

$$\text{where}\quad 1>>\beta^2>>\beta^4>>\cdots,\quad mc^2>>\frac{1}{2}mv^2=mgh>>O(v^4)$$

このエネルギーを持ったままマジカルな方法で光子に変換され，真上に打ち上げられる．塔の頂上に戻ったとき，エネルギーは重力によって失い，エネルギー保存則により最初のエネルギーと同じになる．

$$E'=mc^2$$

それを比較すると，

$$\frac{E'}{E}=\frac{mc^2}{mc^2+mgh+\mathrm{O}(v^4)}=\left(1+\frac{gh}{c^2}+\frac{\mathrm{O}(v^4)}{mc^2}\right)^{-1}\cong 1-\frac{gh}{c^2} \quad (5.1)$$

これは前出の近似式を使った結果である．近似式を使わない場合，

$$\frac{E'}{E}=\frac{mc^2}{mc^2\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}}=\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{8}\beta^4+\cdots$$

地上到達速度は，$\beta^2=\frac{v^2}{c^2}=\frac{2gh}{c^2}$ だから，

$$\frac{E'}{E}=1-\frac{gh}{c^2}-\frac{1}{2}\frac{g^2h^2}{c^4}+\cdots\cong 1-\frac{gh}{c^2} \quad (5.1)$$

光子どうしで比較すると，$E=h\nu$，$E'=h\nu'$ だから次の赤方偏移の式を得る．

$$\frac{\nu'}{\nu}\cong 1-\frac{gh}{c^2}$$

$$Z_g=\frac{\nu-\nu'}{\nu}=1-\frac{\nu'}{\nu}\cong\frac{gh}{c^2}$$

塔の頂上に戻ってきた光子のエネルギーが重力によるロスがないと仮定すると，元のエネルギーより大きいことになる．つまり，落下時に獲得した重力ポテンシャル分の運動エネルギーだけ増えていく．

光子を往復させると，この仮定から永久機関が成り立ってしまう．したがって，この仮定は否定される．つまり，エネルギー保存則により，落下時に獲得した重力ポテンシャルエネルギー分だけ上昇時に失うことになる．

本来，光子の静止質量は 0 であり，速度は常に光速なので，マジカルといえども任意の静止質量と任意の速度の仮定は成り立たないが，重力ポテンシャル分のエネルギーがロスしていく，つまり，周波数が低くなり波長が長くなるのは，実験と矛盾しない事実である．

次に，自由落下系では赤方偏移が起こらないことを示す．

光子が地上から発射されたときに静止していて，その後に自由落下する系を考える．光子は距離 h を登るから，頂上につくまでに時間 $\Delta t=h/c$ を要する．この時間に自由落下系は実験装置に対して下向きに速度 gh/c を得る．

赤方偏移の公式（2.9 練習問題 25）は，

$$\frac{\nu'}{\nu}=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

したがって，自由落下系が観測する光子の振動数と塔の頂上で観測するそれとを比較すると，

$$\frac{\nu(\text{自由落下系})}{\nu'(\text{頂上での装置})}=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}=\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cong 1+\beta$$

自由落下系の速度は，$\beta=v/c=gh/c^2$ であるから，

$$\frac{\nu(\text{自由落下系})}{\nu'(\text{頂上での装置})}\cong 1+\frac{gh}{c^2} \quad (5.2)$$

式（5.1）と比較して，高次を無視すると，

$$\nu(\text{地上で発射された光子})=\nu(\text{自由落下系で頂上についた光子})$$

これから，自由落下系では赤方偏移が起きないと言える．これは自由落下系が慣性系である証拠である．

【注意】上の導出法は模式的であり，重力による赤方偏移と自由落下による青方偏移が塔の頂上で打ち消しあうような印象をあたえがちであるが，自由落下系はいつでも重力による赤方偏移が起きない慣性系である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（）

練習問題 2
　一様な重力場はなぜ地球上で潮の満干を引き起こさないかを説明せよ．

満潮とは海面が上昇することをいう．重力場が一様ならば，すべてが自由落下して，下向き以外の力は現れないので，潮の満干は起きないはずである．これは事実と異なる．実際には，月と太陽の重力の影響で，自由落下以外の力が現れ，潮の満干を引き起こす．
＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.6）

練習問題 3
(a)　座標変換 $(x,y) \to (\xi,\eta),\ \xi = x,\ \eta = 1$ が式（5.6）を満たさないことを示せ．
(b)　次の座標変換は良いふるまいをするか？ヤコビアンを計算し，変換が特異になるすべての点を求めよ．
(i)　$\xi = (x^2+y^2)^{1/2}$，$\eta = \arctan(y/x)$
(ii)　$\xi = \ln x$，$\eta = y$
(iii)　$\xi = \arctan(y/x)$，$\eta = (x^2+y^2)^{-1/2}$

ヤコビアン

$$\det\begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5.6}$$

【ポイント】座標変換先が質のよい座標であるためには，元の任意の二つの違った点が座標変換先でも違った点に対応させせられる必要がある．これは，座標変換式の変換行列の行列式（ヤコビアン）がゼロでなければよい．

(a)　$\dfrac{\partial\xi}{\partial x} = 1$，$\dfrac{\partial\xi}{\partial y} = 0$，$\dfrac{\partial\eta}{\partial x} = 0$，$\dfrac{\partial\eta}{\partial y} = 0$

$$\det\begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(b) (i)　これは極座標である．

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}x,\quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}y$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\det\begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

原点 $x=y=0$ 以外では質の良い座標系である．すなわち，(x,y) を (ξ,η) へと一対一で写像する．

(ii)

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{1}{x},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=1$$

$$\det\begin{pmatrix}\partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y\\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{x} & 0\\ 0 & y\end{vmatrix}=\frac{y}{x}$$

$x<0$ で定義されず，$x=0$ で発散し，それ以外では質の良い座標系である．すなわち (x,y) の右半分を (ξ,η) の全平面に写像する．

(iii)　　これは単位円の内と外の入換えである．

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=-(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}x,\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=-(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}y$$

$$\det\begin{pmatrix}\partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y\\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\\ \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{vmatrix}=\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

原点 $x=y=0$ と無限遠以外では質の良い座標系である．すなわち一対一で対応する．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.18）

練習問題 4
　$\{x=f(\lambda),\ y=g(\lambda),\ 0\le\lambda\le 1\}$ によって定義される曲線がある．接ベクトル $(dx/d\lambda,\ dy/d\lambda)$ が実際にこの曲線に接することを示せ．

【ポイント】この問題は，

3　特殊相対論におけるテンソル解析

3.3　(0, 1) テンソル：１形式

関数の微分は１形式である

の繰り返しである．

ここでは，２次元 (x,y) 座標空間を考える．x, y はパラメーター λ の関数とすると，x, y がつくる曲線は，λ がつくる１次元実数軸から２次元曲線経路への写像である．

スカラー場 ϕ を次式とする．

$$\phi=\phi(x(\lambda),\ y(\lambda))$$

接ベクトルは次式である．

$$\frac{d}{d\lambda}=\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{dy}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{dx}{d\lambda}\vec{e}_x+\frac{dy}{d\lambda}\vec{e}_y$$

where　$dx/d\lambda$，$dy/d\lambda$ は接ベクトルの成分

$\partial/\partial x=\vec{e}_x$，$\partial/\partial y=\vec{e}_y$ は基底ベクトル

接１形式（勾配）は次式である．

$$\tilde{d}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\tilde{d}x^i=\frac{\partial\phi}{\partial x}\tilde{d}x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\tilde{d}y=\frac{\partial\phi}{\partial x}\tilde{\omega}^x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\tilde{\omega}^y$$

where　$\partial\phi/\partial x$，$\partial\phi/\partial y$ は接１形式の成分

$\tilde{d}x=\tilde{\omega}^x$，$\tilde{d}y=\tilde{\omega}^y$ は基底１形式

スカラー場 ϕ の曲線に沿っての微分（スカラー場 ϕ の λ 方向の微分）は，接ベクトルと接１形式の縮約である．

$$\frac{d\phi}{d\lambda}=\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}=\frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{dy}{d\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial y}=\left\langle\tilde{d}\phi,\ \frac{d}{d\lambda}\right\rangle \tag{5.18}$$

接ベクトル $d/d\lambda$ と接 1 形式 $\tilde{d}\phi$ はスカラー場 ϕ をつくるお互いに関数の関係にある.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 5

次の曲線を描け．どれが同じ経路をもつか？またパラメーターがゼロのときのそれらの接ベクトルを求めよ.

(a)　$x = \sin\lambda,\ y = \cos\lambda$

(b)　$x = \cos(2\pi t^2),\ y = \sin(2\pi t^2 + \pi)$

(c)　$x = s,\ y = s + 4$

(d)　$x = s^2,\ y = -(s-2)(s+2)$

(d)　$x = u,\ y = 1$

(a)　$x^2 + y^2 = \sin^2\lambda + \cos^2\lambda = 1$

経路は，原点が中心の半径 1 の円.

$$\left[\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=0} = [\cos\lambda]_{\lambda=0} = 1, \quad \left[\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=0} = [-\sin\lambda]_{\lambda=0} = 0$$

$$\frac{d}{d\lambda} \to (1, 0)$$

(b)　$x^2 + y^2 = \cos^2(2\pi t^2) + \sin^2(2\pi t^2 + \pi) = \cos^2(2\pi t^2) + \sin^2(2\pi t^2) = 1$

経路は，原点が中心の半径 1 の円.

$$\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]_{t=0} = \left[-4\pi t\sin(2\pi t^2)\right]_{t=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t=0} = \left[4\pi t\cos(2\pi t^2)\right]_{t=0} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \to (0, 0)$$

(c)　$y = x + 4$

経路は，直線.

$$\left[\frac{\partial x}{\partial s}\right]_{s=0} = 1, \quad \left[\frac{\partial y}{\partial s}\right]_{s=0} = 1$$

$$\frac{d}{ds} \to (1, 1)$$

(d)　$y = -s^2 + 4 = -|x| + 4$

経路は，y 軸対称の２本の直線.

$$\left[\frac{\partial x}{\partial s}\right]_{s=0}=[2s]_{s=0}=0\,,\quad \left[\frac{\partial y}{\partial s}\right]_{s=0}=[-2s]_{s=0}=0$$

$$\frac{d}{ds}\to(0,0)$$

(e)　$y=1$

経路は，x 軸に平行な直線.

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]_{u=0}=1\,,\quad \left[\frac{\partial y}{\partial u}\right]_{s=0}=0$$

$$\frac{d}{du}\to(1,0)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 6

図 5.5 の抽像を正当化せよ.

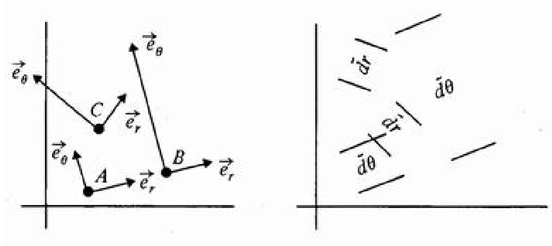


図 5.5　極座標に対する基底ベクトルと基底一形式

$\vec{e}_r$ は，原点から放射状の向きで大きさは 1 である.

$\vec{e}_\theta$ は，$\vec{e}_r$ に垂直で，つまり，原点を中心とする円の円周の向きで，大きさは原点からの距離と等しい.

$\tilde{d}\,r$ は，原点から放射状の向きに垂直な面（原点を中心とする円の円周に接する面）を貫く 1 形式で，大きさは 1 つまり貫く面の数は 1 である.

$\tilde{d}\theta$ は，$\tilde{d}\,r$ が貫く面に垂直な面，つまり，原点を中心とする円の円周の向きに垂直な面（原点からの放射状の面）を貫く 1 形式で，大きさつまり貫く面の数は原点からの距離の逆数である．したがって，面の間の距離は原点からの距離に等しくなる.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.3）～（5.15）

練習問題 7
　デカルト座標 (x, y)（プライムなしの添字）から極座標 (r, θ)（プライム付きの添字）への変換に対する変換行列 $\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}$，$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ のすべての要素を計算せよ．

ベクトルの成分の座標変換は,

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctan(y/x) \tag{5.3}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ -\dfrac{y}{r^2} & \dfrac{x}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{1}{r}\sin\theta & \dfrac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} x = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} y = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{r^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{r^2}$$

$$\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right) = \begin{pmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y \\ \partial\theta/\partial x & \partial\theta/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y/r^2 & x/r^2 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

ベクトルの成分の座標逆変換は,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{5.3}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right) \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial x}{\partial\theta} = -r\sin\theta = -y$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial y}{\partial\theta} = r\cos\theta = x$$

$$\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & -y \\ y/r & x \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

$$\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right)\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

ゆえに

$$\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right)^{-1} = \left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.7）～（5.13）

練習問題 8

(a)　（練習問題 7 の結果を用いよ．） $f = x^2 + y^2 + 2xy$ とし，デカルト座標で $\vec{V} \to (x^2 + 3y, y^2 + 3x)$， $\vec{W} \to (1,1)$ とする． f を r と θ の関数として計算し，極座標での $\vec{V}$ と $\vec{W}$ の成分を r と θ の関数として表せ.

(b)　デカルト座標での $\tilde{d}f$ の成分を求めよ．またその極座標での成分を(i)極座標での直接の計算から，(ii)デカルト座標からの変換から求めよ．

(c)　(i)極座標でのメトリックテンソルを用い， $\vec{V}$ と $\vec{W}$ に付随する 1 形式 $\tilde{V}$， $\tilde{W}$ の極座標成分を求めよ．(ii) $\vec{V}$， $\vec{W}$ のデカルト座標の成分から変換によってそれらの極座標成分を求めよ．

(a)　練習問題 7 の式（5.7）を使って，

$$\begin{pmatrix} \vec{V}^r \\ \vec{V}^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y/r^2 & x/r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 + 3y \\ y^2 + 3x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}(x^3 + y^3 + 6xy) \\ \dfrac{1}{r^2}(-x^2 y - 3y^2 + xy^2 + 3x^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r^2(\cos^3\theta + \sin^3\theta) + 6r\sin\theta\cos\theta \\ 3(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{W}^r \\ \vec{W}^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y/r^2 & x/r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}(x+y) \\ \dfrac{1}{r^2}(-y+x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta + \sin\theta \\ \dfrac{1}{r}(\cos\theta - \sin\theta) \end{pmatrix}$$

(b) (i)　先に f を極座標に変換しておく

$$f = x^2 + y^2 + 2xy = r^2 + 2r^2\cos\theta\sin\theta = r^2(1 + \sin 2\theta)$$

$$(\tilde{d}f)^r = \partial f / \partial r = 2r(1 + \sin 2\theta)$$

$$(\tilde{d}f)^\theta = \partial f / \partial\theta = 2r^2\cos 2\theta$$

(ii)　$\tilde{d}f$ のデカルト座標での成分を先に求めておく.

$$\partial f / \partial x = 2x + 2y, \quad \partial f / \partial y = 2x + 2y$$

練習問題 7 の式（5.12）（5.13）を使って，

$$\begin{pmatrix} \partial\phi/\partial r \\ \partial\phi/\partial\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2}{r}(x^2 + y^2 + 2xy) \\ 2(-xy - y^2 + x^2 + xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{r} f \\ 2(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2r(1 + \sin 2\theta) \\ 2r^2\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

(c)(i)

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_r \\ \tilde{V}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2(\cos^3\theta + \sin^3\theta) + 6r(\sin\theta\cos\theta) \\ 3\cos 2\theta - (r/2)\sin 2\theta(\cos\theta - \sin\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r^2(\cos^3\theta + \sin^3\theta) + 6r\sin\theta\cos\theta \\ 3r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + r^3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{W}_r \\ \tilde{W}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta + \sin\theta \\ \dfrac{1}{r}(\cos\theta - \sin\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta + \sin\theta \\ r(\cos\theta - \sin\theta) \end{pmatrix}$$

(ii)　練習問題 7 の式（5.13）を使って，デカルト座標では，ベクトルと 1 形式の成分は同じだから，

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_r \\ \tilde{V}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V}_x \\ \tilde{V}_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 + 3y \\ y^2 + 3x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}(x^3 + y^3 + 6xy) \\ -x^2 y - 3y^2 + xy^2 + 3x^2 \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} r^2(\cos^3\theta+\sin^3\theta)+6r\sin\theta\cos\theta \\ 3r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+r^3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta) \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \tilde{W}_r \\ \tilde{W}_\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{W}_x \\ \tilde{W}_y \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} \cos\theta+\sin\theta \\ r(\cos\theta-\sin\theta) \end{pmatrix}
$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.36）～（5.37）

練習問題 9

図 5.6 のような図を書いて，式（5.37）を説明せよ．

$$
\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r=\frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta\,\vec{e}_x+\sin\theta\,\vec{e}_y)=0=\Gamma^{\mu}{}_{rr}\vec{e}_\mu \qquad (5.36a)
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_r=-\sin\theta\,\vec{e}_x+\cos\theta\,\vec{e}_y=\frac{1}{r}\vec{e}_\theta=\Gamma^{\mu}{}_{r\theta}\vec{e}_\mu \qquad (5.36b)
$$

$$
\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_\theta=-\sin\theta\,\vec{e}_x+\cos\theta\,\vec{e}_y=\frac{1}{r}\vec{e}_\theta=\Gamma^{\mu}{}_{\theta r}\vec{e}_\mu \qquad (5.37a)
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta=-r\cos\theta\,\vec{e}_x+r\sin\theta\,\vec{e}_y=-r\,\vec{e}_r=\Gamma^{\mu}{}_{\theta\theta}\vec{e}_\mu \qquad (5.37b)
$$

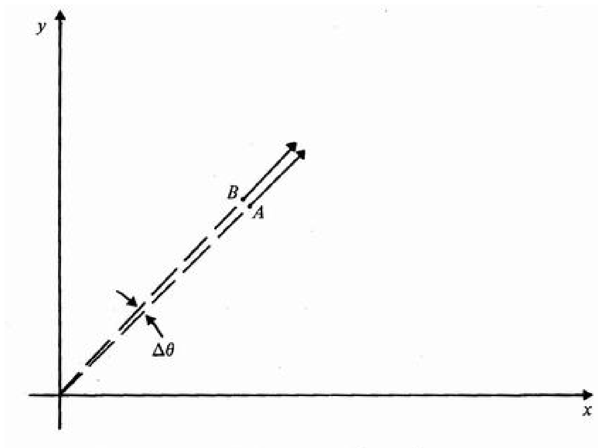


図 5.6　θ が $\Delta\theta$ だけ変化したときの $\vec{e}_r$ の変化

式（5.36b）は，$\vec{e}_r$ の θ に関する微分である．原点から等距離 r にあり $\Delta\theta$ だけ違った方向にある二つの近傍の点AとBで，$\vec{e}_r$ は原点からの放射状を向いていて，$\vec{e}_r$ の差は $\vec{e}_\theta$ と同じ向きつまり原点を中心とする円の円周方向のベクトルである．したがって，式（5.36b）は確からしい．

式（5.36a）は，$\vec{e}_r$ の r に関する微分である．原点からの放射状の直線上の距離 Δr 離れている二つの近傍の点で，$\vec{e}_r$ の差は直線上にある大きさ一定のベクトルの差であるので 0 である．したがって，式（5.36a）は確からしい．
式（5.37b）は，$\vec{e}_\theta$ の θ に関する微分である．原点から等距離 r にあり $\Delta\theta$ だけ違った方向にある二つの近傍の点 A と B で，$\vec{e}_\theta$ は原点を中心とする円の円周方向のベクトルであり，$\Delta\theta$ だけ向きが違う．$\vec{e}_\theta$ の差は原点への向きのベクトルであり，$\vec{e}_r$ と逆向きである．したがって，式（5.37b）は確からしい．
式（5.37a）は，$\vec{e}_\theta$ の r に関する微分である．原点からの放射状の直線上の距離 Δr 離れている二つの近傍の点で，$\vec{e}_\theta$ は原点を中心とする円の円周方向のベクトルであり，向きは同じであるが大きさが異なる．その差は $\vec{e}_\theta$ と同じ向きである．したがって，式（5.37a）は確からしい．
＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

2015.06.12
5　曲率の導入　5.9　練習問題

（5.51）

練習問題 10
　式（5.51）で定義された $\nabla\vec{V}$ が（1,1）テンソルであることを証明せよ．

$$(\nabla\vec{V})^\alpha{}_\beta = (\nabla_\beta\vec{V})^\alpha = V^\alpha{}_{;\beta} \equiv V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \tag{5.51}$$

式（5.51）は，ベクトル $\vec{V}$ の共変微分 $\nabla\vec{V}$ の成分である．共変微分は，共変成分を 1 つ増やす操作である．したがって，ベクトルの共変微分は，（1,1）テンソルになる．
練習問題 17 で式（5.51）がテンソルとしてふるまうことを証明する．
＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.49）～（5.55）

練習問題 11

（練習問題 7 と 8 を用いる．）デカルト座標での成分が $(x^2+3y,\, y^2+3x)$ であるベクトル $\vec{V}$ に対して以下の量を計算せよ.

(a)　デカルト座標での $V^{\alpha}{}_{,\beta}$,

(b)　極座標への変換 $\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}V^{\alpha}{}_{,\beta}$,

(c)　式（5.49）で（5.44）のクリストッフェル記号を使って極座標での成分 $V^{\mu'}{}_{;\nu'}$,

(d)　(a)の結果を使って発散 $V^{\alpha}{}_{,\alpha}$,

(e)　(b)あるいは(c)の結果を使って発散 $V^{\mu'}{}_{;\mu'}$,

(f)　式（5.55）を直接使って発散 $V^{\mu'}{}_{;\mu'}$

クリストッフェル記号の極座標での値

$$\Gamma^{\mu}{}_{rr}=\Gamma^{r}{}_{r\theta}=\Gamma^{r}{}_{\theta r}=\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta}=0,\quad \Gamma^{\theta}{}_{r\theta}=\Gamma^{\theta}{}_{\theta r}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^{r}{}_{\theta\theta}=-r \tag{5.44}$$

共変微分の定義式

◆ $$\nabla_{\beta}\vec{V}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^{\beta}}=V^{\alpha}{}_{;\beta}\vec{e}_{\alpha} \tag{5.50}$$

◆ $$V^{\alpha}{}_{;\beta}\equiv V^{\alpha}{}_{,\beta}+V^{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} \tag{5.49}$$

$$\nabla\vec{V}=V^{\alpha}{}_{;\beta}\vec{e}_{\alpha}\otimes\tilde{\omega}^{\beta} \tag{5.50b}$$

極座標での発散の定義式

$$V^{\alpha}{}_{;\alpha}=\frac{\partial V^{r}}{\partial r}+\frac{\partial V^{\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}V^{r}$$
$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV^{r})+\frac{\partial}{\partial\theta}V^{\theta} \tag{5.55}$$

(a)　$V^{1}{}_{,1}=2x$，$V^{1}{}_{,2}=3$，$V^{2}{}_{,1}=3$，$V^{2}{}_{,2}=2y$

(b)　変換式は,

$V^{\mu'}{}_{;\nu'}=\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha}\Lambda_{\nu'}{}^{\beta}V^{\alpha}{}_{,\beta}$

where

$$\left(\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha}\right)=\begin{pmatrix}\Lambda^{1'}{}_{1} & \Lambda^{1'}{}_{2}\\ \Lambda^{2'}{}_{1} & \Lambda^{2'}{}_{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x/r & y/r\\ -y/r^{2} & x/r^{2}\end{pmatrix}$$

$$\left(\Lambda_{\nu'}{}^{\beta}\right)=\left(\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\right)^{T}=\begin{pmatrix}\Lambda^{1}{}_{1'} & \Lambda^{1}{}_{2'}\\ \Lambda^{2}{}_{1'} & \Lambda^{2}{}_{2'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x/r & -y\\ y/r & x\end{pmatrix}$$

以下，上式の記号を使う．

$$\begin{aligned}
(\nabla\vec{V})^{r}{}_{r}&=V^{r}{}_{;r}=V^{1'}{}_{;1'}=\Lambda^{1'}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{1'}V^{\alpha}{}_{,\beta}\\
&=\Lambda^{1'}{}_{1}\Lambda^{1}{}_{1'}V^{1}{}_{,1}+\Lambda^{1'}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{1'}V^{1}{}_{,2}+\Lambda^{1'}{}_{2}\Lambda^{1}{}_{1'}V^{2}{}_{,1}+\Lambda^{1'}{}_{2}\Lambda^{2}{}_{1'}V^{2}{}_{,2}\\
&=\frac{x}{r}\frac{x}{r}2x+\frac{x}{r}\frac{y}{r}3+\frac{y}{r}\frac{x}{r}3+\frac{y}{r}\frac{y}{r}2y\\
&=\frac{2x^{3}}{r^{2}}+\frac{2y^{3}}{r^{2}}+\frac{6xy}{r^{2}}\\
&=2r(\cos^{3}\theta+\sin^{3}\theta)+6\cos\theta\sin\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla\vec{V})^{r}{}_{\theta}&=V^{r}{}_{;\theta}=V^{1'}{}_{;2'}=\Lambda^{1'}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{2'}V^{\alpha}{}_{,\beta}\\
&=\Lambda^{1'}{}_{1}\Lambda^{1}{}_{2'}V^{1}{}_{,1}+\Lambda^{1'}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{2'}V^{1}{}_{,2}+\Lambda^{1'}{}_{2}\Lambda^{1}{}_{2'}V^{2}{}_{,1}+\Lambda^{1'}{}_{2}\Lambda^{2}{}_{2'}V^{2}{}_{,2}\\
&=\frac{x}{r}(-y)2x+\frac{x}{r}x3+\frac{y}{r}(-y)3+\frac{y}{r}x2y\\
&=\frac{2}{r}xy(y-x)+\frac{3}{r}(x^{2}-y^{2})\\
&=2r^{2}\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)+3r(\cos^{2}\theta-\sin^{2}\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla\vec{V})^{\theta}{}_{r}&=V^{\theta}{}_{;r}=V^{2'}{}_{;1'}=\Lambda^{2'}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{1'}V^{\alpha}{}_{,\beta}\\
&=\Lambda^{2'}{}_{1}\Lambda^{1}{}_{1'}V^{1}{}_{,1}+\Lambda^{2'}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{1'}V^{1}{}_{,2}+\Lambda^{2'}{}_{2}\Lambda^{1}{}_{1'}V^{2}{}_{,1}+\Lambda^{2'}{}_{2}\Lambda^{2}{}_{1'}V^{2}{}_{,2}\\
&=\frac{-y}{r^{2}}\frac{x}{r}2x+\frac{-y}{r^{2}}\frac{y}{r}3+\frac{x}{r^{2}}\frac{x}{r}3+\frac{x}{r^{2}}\frac{y}{r}2y\\
&=\frac{2}{r^{3}}xy(y-x)+\frac{3}{r^{3}}(x^{2}-y^{2})
\end{aligned}$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) + \frac{3}{r}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$(\nabla\vec{V})^{\theta}{}_{\theta} = V^{\theta}{}_{;\theta} = V^{2'}{}_{;2'} = \Lambda^{2'}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{2'}V^{\alpha}{}_{,\beta}$$

$$= \Lambda^{2'}{}_{1}\Lambda^{1}{}_{2'}V^{1}{}_{,1} + \Lambda^{2'}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{2'}V^{1}{}_{,2} + \Lambda^{2'}{}_{2}\Lambda^{1}{}_{2'}V^{2}{}_{,1} + \Lambda^{2'}{}_{2}\Lambda^{2}{}_{2'}V^{2}{}_{,2}$$

$$= \frac{-y}{r^2}(-y)2x + \frac{-y}{r^2}x3 + \frac{x}{r^2}(-y)3 + \frac{x}{r^2}x2y$$

$$= \frac{2xy^2}{r^2} + \frac{-3xy}{r^2} + \frac{-3xy}{r^2} + \frac{2x^2y}{r^2}$$

$$= \frac{2}{r^2}xy(x+y) - \frac{6xy}{r^2}$$

$$= 2r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) - 6\sin\theta\cos\theta$$

(c)　練習問題 8 の結果

$$\begin{pmatrix} \vec{V}^{r} \\ \vec{V}^{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2(\cos^3\theta + \sin^3\theta) + 6r\sin\theta\cos\theta \\ 3(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) \end{pmatrix}$$

を使って,

$$V^{r}{}_{,r} = 2r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) + 6\cos\theta\sin\theta$$

$$V^{r}{}_{,\theta} = 3r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) + 6r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$V^{\theta}{}_{,r} = \sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$V^{\theta}{}_{,\theta} = -r\cos^3\theta - r\sin^3\theta + 2r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) - 12\sin\theta\cos\theta$$

練習問題 10 の式（5.44）（5.49）を使って,

$$V^{r}{}_{;r} = V^{r}{}_{,r} + V^{\mu}\Gamma^{r}{}_{\mu r} = V^{r}{}_{,r} + V^{r}\Gamma^{r}{}_{rr} + V^{\theta}\Gamma^{r}{}_{\theta r} = V^{r}{}_{,r}$$

$$= 2r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) + 6\cos\theta\sin\theta$$

$$V^{r}{}_{;\theta} = V^{r}{}_{,\theta} + V^{\mu}\Gamma^{r}{}_{\mu\theta} = V^{r}{}_{,\theta} + V^{r}\Gamma^{r}{}_{r\theta} + V^{\theta}\Gamma^{r}{}_{\theta\theta} = V^{r}{}_{,\theta} - rV^{\theta}$$

$$= 2r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) + 3r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$V^{\theta}{}_{;r} = V^{\theta}{}_{,r} + V^{\mu}\Gamma^{\theta}{}_{\mu r} = V^{\theta}{}_{,r} + V^{r}\Gamma^{\theta}{}_{rr} + V^{\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\theta r} = V^{\theta}{}_{,r} + \frac{1}{r}V^{\theta}$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) + \frac{3}{r}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$V^{\theta}{}_{;\theta} = V^{\theta}{}_{,\theta} + V^{\mu}\Gamma^{\theta}{}_{\mu\theta} = V^{\theta}{}_{,\theta} + V^{r}\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} + V^{\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} = V^{\theta}{}_{,\theta} + \frac{1}{r}V^{r}$$

$$= 2r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) - 6\sin\theta\cos\theta$$

問題(b)と同じ結果.

(d)　$V^{\alpha}{}_{,\alpha} = V^{1}{}_{,1} + V^{2}{}_{,2} = 2x + 2y$

(e)　$V^{\mu'}{}_{;\mu'} = V^{r}{}_{;r} + V^{\theta}{}_{;\theta}$

$$= 2r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) + 6\cos\theta\sin\theta$$
$$+ 2r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) - 6\sin\theta\cos\theta$$
$$= 2r(\cos^3\theta + \sin^3\theta + \sin^2\theta\cos\theta + \sin\theta\cos^2\theta)$$
$$= 2r(\cos\theta + \sin\theta)$$

問題(d)と同じ結果.

(f)　$V^{\alpha}{}_{;\alpha} = \dfrac{\partial V^{r}}{\partial r} + \dfrac{\partial V^{\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r}V^{r}$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV^{r}) + \frac{\partial}{\partial\theta}V^{\theta} \qquad (5.55)$$

（上式は問題(c)の結果と同じであるので，以下は問題(e)と同じ．）

$$= 2r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) + 6\cos\theta\sin\theta$$
$$+ 2r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) - 6\sin\theta\cos\theta$$
$$= 2r(\cos^3\theta + \sin^3\theta + \sin^2\theta\cos\theta + \sin\theta\cos^2\theta)$$
$$= 2r(\cos\theta + \sin\theta)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.62）

練習問題 12

デカルト座標成分が $(x^2+3y,\ y^2+3x)$ である 1 形式 $\tilde{p}$ に対して以下の量を計算せよ.

(a)　デカルト座標での $p_{\alpha,\beta}$，

(b)　極座標への変換 $\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}p_{\alpha,\beta}$，

(c)　式 (5.62) で (5.44) のクリストッフェル記号を使って極座標での $p_{\mu';\nu'}$，

◆

$$(\nabla_{\beta}\tilde{p})_{\alpha} \equiv (\nabla\tilde{p})_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - p_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \qquad (5.62)$$

$$\nabla_{\beta}\tilde{p} = \frac{\partial\tilde{p}}{\partial x^{\beta}} = p_{\alpha;\beta}\tilde{\omega}^{\alpha} \qquad (5.62\text{b})$$

$$\nabla\tilde{p} = p_{\alpha;\beta}\tilde{\omega}^{\alpha}\otimes\tilde{\omega}^{\beta} \qquad (5.62\text{c})$$

(a)　$p_{1,1}=2x$，　$p_{1,2}=3$，　$p_{2,1}=3$，　$p_{2,2}=2y$

(b)　変換式は,

$$(\nabla\tilde{p})_{\alpha\beta} = \Lambda_{\nu'}{}^{\alpha}\Lambda_{\nu'}{}^{\beta}p_{\alpha,\beta}$$

where

$$\left(\Lambda_{\nu'}{}^{\mu}\right) = \left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}\right)^{T} = \begin{pmatrix}\Lambda^{1}{}_{1'} & \Lambda^{1}{}_{2'}\\ \Lambda^{2}{}_{1'} & \Lambda^{2}{}_{2'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x/r & -y\\ y/r & x\end{pmatrix}$$

以下，上式の記号を使う.

$$\begin{aligned}
(\nabla\tilde{p})_{rr} &= p_{r;r} = p_{1';1'} = \Lambda^{\alpha}{}_{1'}\Lambda^{\beta}{}_{1'}p_{\alpha,\beta}\\
&= \Lambda^{1}{}_{1'}\Lambda^{1}{}_{1'}p_{1,1} + \Lambda^{1}{}_{1'}\Lambda^{2}{}_{1'}p_{1,2} + \Lambda^{2}{}_{1'}\Lambda^{1}{}_{1'}p_{2,1} + \Lambda^{2}{}_{1'}\Lambda^{2}{}_{1'}p_{2,2}\\
&= \frac{x}{r}\frac{x}{r}2x + \frac{x}{r}\frac{y}{r}3 + \frac{y}{r}\frac{x}{r}3 + \frac{y}{r}\frac{y}{r}2y\\
&= \frac{2x^3}{r^2} + \frac{2y^3}{r^2} + \frac{6xy}{r^2}\\
&= 2r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) + 6\cos\theta\sin\theta = V^{r}{}_{;r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla\tilde{p})_{r\theta} &= p_{r;\theta} = p_{1';2'} = \Lambda^{\alpha}{}_{1'}\Lambda^{\beta}{}_{2'}p_{\alpha,\beta}\\
&= \Lambda^{1}{}_{1'}\Lambda^{1}{}_{2'}p_{1,1} + \Lambda^{1}{}_{1'}\Lambda^{2}{}_{2'}p_{1,2} + \Lambda^{2}{}_{1'}\Lambda^{1}{}_{2'}p_{2,1} + \Lambda^{2}{}_{1'}\Lambda^{2}{}_{2'}p_{2,2}\\
&= \frac{x}{r}(-y)2x + \frac{x}{r}x3 + \frac{y}{r}(-y)3 + \frac{y}{r}x2y\\
&= \frac{2}{r}xy(y-x) + \frac{3}{r}(x^2-y^2)\\
&= 2r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta) + 3r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = V^{r}{}_{;\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla\tilde{p})_{\theta r} &= p_{\theta;r} = p_{2';1'} = \Lambda^{\alpha}{}_{2'}\Lambda^{\beta}{}_{1'}p_{\alpha,\beta}\\
&= \Lambda^{1}{}_{2'}\Lambda^{1}{}_{1'}p_{1,1} + \Lambda^{1}{}_{2'}\Lambda^{2}{}_{1'}p_{1,2} + \Lambda^{2}{}_{2'}\Lambda^{1}{}_{1'}p_{2,1} + \Lambda^{2}{}_{2'}\Lambda^{2}{}_{1'}p_{2,2}\\
&= (-y)\frac{x}{r}2x + (-y)\frac{y}{r}3 + x\frac{x}{r}3 + x\frac{y}{r}2y\\
&= \frac{2}{r}xy(y-x) + \frac{3}{r}(x^2-y^2)\\
&= 3r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta) = r^2V^{\theta}{}_{;r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla\tilde{p})_{\theta\theta} &= p_{\theta;\theta} = p_{2';2'} = \Lambda^{\alpha}{}_{2'}\Lambda^{\beta}{}_{2'}p_{\alpha,\beta}\\
&= \Lambda^{1}{}_{2'}\Lambda^{1}{}_{2'}p_{1,1} + \Lambda^{1}{}_{2'}\Lambda^{2}{}_{2'}p_{1,2} + \Lambda^{2}{}_{2'}\Lambda^{1}{}_{2'}p_{2,1} + \Lambda^{2}{}_{2'}\Lambda^{2}{}_{2'}p_{2,2}\\
&= (-y)(-y)2x + (-y)x3 + x(-y)3 + xx2y\\
&= 2xy^2 - 3xy - 3xy + 2x^2y\\
&= 2xy(x+y) - 6xy\\
&= 2r^3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta) - 6r^2\sin\theta\cos\theta = r^2V^{\theta}{}_{;\theta}
\end{aligned}$$

(c)　練習問題 8 の結果

$$\begin{pmatrix}\tilde{p}_r\\ \tilde{p}_\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r^2(\cos^3\theta+\sin^3\theta) + 6r\sin\theta\cos\theta\\ 3r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta) + r^3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)\end{pmatrix}$$

を使って,

$$p_{r,r} = 2r(\cos^3\theta+\sin^3\theta) + 6\cos\theta\sin\theta$$

$$p_{r,\theta} = 3r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta) + 6r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$p_{\theta,r} = 6r(\cos^2\theta-\sin^2\theta) + 3r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$$

$$p_{\theta,\theta} = r^3(-\cos^3\theta - \sin^3\theta + 2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)) - 12r^2\sin\theta\cos\theta$$

式（5.44）（5.62）を使って，

$$\Gamma^{\mu}{}_{rr}=\Gamma^{r}{}_{r\theta}=\Gamma^{r}{}_{\theta r}=\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta}=0\,,\quad \Gamma^{\theta}{}_{r\theta}=\Gamma^{\theta}{}_{\theta r}=\frac{1}{r}\,,\quad \Gamma^{r}{}_{\theta\theta}=-r \tag{5.44}$$

$$p_{r;r}=p_{r,r}-p_{\mu}\Gamma^{u}{}_{rr}=p_{r,r}-p_{r}\Gamma^{r}{}_{rr}-p_{\theta}\Gamma^{\theta}{}_{rr}=p_{r,r}$$

$$=2r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)+6\cos\theta\sin\theta=V^{r}{}_{;r}$$

$$p_{r;\theta}=p_{r,\theta}-p_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{r\theta}=p_{r,r}-p_{r}\Gamma^{r}{}_{r\theta}-p_{\theta}\Gamma^{\theta}{}_{r\theta}=p_{r,\theta}-\frac{1}{r}p_{\theta}$$

$$=2r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)+3r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=V^{r}{}_{;\theta}$$

$$p_{\theta;r}=p_{\theta,r}-p_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\theta r}=p_{\theta,r}-p_{r}\Gamma^{r}{}_{\theta r}-p_{\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\theta r}=p_{\theta,r}-\frac{1}{r}p_{\theta}$$

$$=3r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)=r^2V^{\theta}{}_{;r}$$

$$p_{\theta;\theta}=p_{\theta,\theta}-p_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\theta\theta}=p_{\theta,\theta}-p_{r}\Gamma^{r}{}_{\theta\theta}-p_{\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta}=p_{\theta,\theta}+rp_{r}$$

$$=2r^3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)-6r^2\sin\theta\cos\theta=r^2V^{\theta}{}_{;\theta}$$

問題(b)と同じ結果.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

2015.06.12
5　曲率の導入　5.9　練習問題

（）

練習問題 13

問題 11 と 12 から，$g_{\mu'\alpha'}V^{\alpha'}{}_{;\nu'}=p_{\mu';\nu'}$ を確かめよ.

$$\begin{pmatrix} p_{r;r} & p_{r;\theta} \\ p_{\theta;r} & p_{\theta;\theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^{r}{}_{;r} & V^{r}{}_{;\theta} \\ V^{\theta}{}_{;r} & V^{\theta}{}_{;\theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V^{r}{}_{;r} & V^{r}{}_{;\theta} \\ r^2V^{\theta}{}_{;r} & r^2V^{\theta}{}_{;\theta} \end{pmatrix}$$

$$p_{r;r}=V^{r}{}_{;r}\,,\quad p_{r;\theta}=V^{r}{}_{;\theta}\,,\quad p_{\theta;r}=r^2V^{\theta}{}_{;r}\,,\quad p_{\theta;\theta}=r^2V^{\theta}{}_{;\theta}$$

上式は，練習問題 12 で確かめられている.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.65）

練習問題 14

極座標成分が $(A^{rr} = r^2,\ \ A^{r\theta} = r\sin\theta,\ \ A^{\theta r} = r\cos\theta,\ \ A^{\theta\theta} = \tan\theta)$ であるテンソルに対して, すべての可能な添字につき極座標での式（5.65）を計算せよ.

◆
$$\nabla_\beta A^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}{}_{,\beta} + A^{\alpha\nu}\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} + A^{\mu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} \qquad (5.65)$$

β に r または θ を入れて固定して, フリーの μ と ν に r または θ を順に入れていく.　α はダミー.　クリストッフェル記号の値は次式である.

$$\Gamma^\mu{}_{rr} = \Gamma^r{}_{r\theta} = \Gamma^r{}_{\theta r} = \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = 0\,,\quad \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta r} = \frac{1}{r},\quad \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r \qquad (5.44)$$

$$\nabla_r A^{rr} = A^{rr}{}_{,r} + A^{rr}\Gamma^r{}_{rr} + A^{\theta r}\Gamma^r{}_{\theta r} + A^{rr}\Gamma^r{}_{rr} + A^{r\theta}\Gamma^r{}_{\theta r}$$
$$= A^{rr}{}_{,r} = 2r$$
$$\nabla_r A^{r\theta} = A^{r\theta}{}_{,r} + A^{r\theta}\Gamma^r{}_{rr} + A^{\theta\theta}\Gamma^r{}_{\theta r} + A^{rr}\Gamma^\theta{}_{rr} + A^{r\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta r}$$
$$= A^{r\theta}{}_{,r} + \frac{1}{r}A^{r\theta} = \sin\theta + \sin\theta = 2\sin\theta$$
$$\nabla_r A^{\theta r} = A^{\theta r}{}_{,r} + A^{rr}\Gamma^\theta{}_{rr} + A^{\theta r}\Gamma^\theta{}_{\theta r} + A^{\theta r}\Gamma^r{}_{rr} + A^{\theta\theta}\Gamma^r{}_{\theta r}$$
$$= A^{\theta r}{}_{,r} + \frac{1}{r}A^{\theta r} = \cos\theta + \cos\theta = 2\cos\theta$$
$$\nabla_r A^{\theta\theta} = A^{\theta\theta}{}_{,r} + A^{r\theta}\Gamma^\theta{}_{rr} + A^{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta r} + A^{\theta r}\Gamma^\theta{}_{rr} + A^{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta r}$$
$$= A^{\theta\theta}{}_{,r} + \frac{1}{r}A^{\theta\theta} + \frac{1}{r}A^{\theta\theta} = \frac{1}{r}\tan\theta + \frac{1}{r}\tan\theta = 2\frac{1}{r}\tan\theta$$
$$\nabla_\theta A^{rr} = A^{rr}{}_{,\theta} + A^{rr}\Gamma^r{}_{r\theta} + A^{\theta r}\Gamma^r{}_{\theta\theta} + A^{rr}\Gamma^r{}_{r\theta} + A^{r\theta}\Gamma^r{}_{\theta\theta}$$
$$= A^{rr}{}_{,\theta} - rA^{\theta r} = -r^2\cos\theta$$
$$\nabla_\theta A^{r\theta} = A^{r\theta}{}_{,\theta} + A^{r\theta}\Gamma^r{}_{r\theta} + A^{\theta\theta}\Gamma^r{}_{\theta\theta} + A^{rr}\Gamma^\theta{}_{r\theta} + A^{r\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta\theta}$$
$$= A^{r\theta}{}_{,\theta} - rA^{\theta\theta} + \frac{1}{r}A^{rr}\Gamma^\theta{}_{r\theta} = r\cos\theta - r\tan\theta + r$$

$$\nabla_\theta A^{\theta r} = A^{\theta r}{}_{,\theta} + A^{rr}\Gamma^\theta{}_{r\theta} + A^{\theta r}\Gamma^\theta{}_{\theta\theta} + A^{\theta r}\Gamma^r{}_{r\theta} + A^{\theta\theta}\Gamma^r{}_{\theta\theta}$$
$$= A^{\theta r}{}_{,\theta} + \frac{1}{r}A^{rr} - rA^{\theta\theta} = -r\sin\theta + r - r\tan\theta$$
$$\nabla_\theta A^{\theta\theta} = A^{\theta\theta}{}_{,\theta} + A^{r\theta}\Gamma^\theta{}_{r\theta} + A^{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta\theta} + A^{\theta r}\Gamma^\theta{}_{r\theta} + A^{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta\theta}$$
$$= A^{\theta\theta}{}_{,\theta} + \frac{1}{r}A^{r\theta} + \frac{1}{r}A^{\theta r} = \sec^2\theta + \sin\theta + \cos\theta$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.66）

練習問題 15

極座標成分が $(V^r=1,\ \ V^\theta=0)$ であるベクトルに対して，極座標での 2 階の共変微分 $V^\alpha{}_{;\mu;\nu}$ のすべての成分を計算せよ．［ヒント：2 階の微分を求めるには，1 階微分 $V^\alpha{}_{;\mu}$ を（1,1）テンソルと見なす：式（5.66）］

$$V^\alpha{}_{;\beta} \equiv V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \tag{5.49}$$

$$\Gamma^\mu{}_{rr} = \Gamma^r{}_{r\theta} = \Gamma^r{}_{\theta r} = \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = 0\,,\quad \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta r} = \frac{1}{r},\quad \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r \tag{5.44}$$

を使って，

$$V^r{}_{;r} = V^r{}_{,r} + V^r\Gamma^r{}_{rr} + V^\theta\Gamma^r{}_{\theta r} = 0$$

$$V^\theta{}_{;r} = V^\theta{}_{,r} + V^r\Gamma^\theta{}_{rr} + V^\theta\Gamma^{\alpha\theta}{}_{\theta r} = 0$$

$$V^r{}_{;\theta} = V^r{}_{,\theta} + V^r\Gamma^r{}_{r\theta} + V^\theta\Gamma^r{}_{\theta\theta} = 0$$

$$V^\theta{}_{;\theta} = V^\theta{}_{,\theta} + V^r\Gamma^\theta{}_{r\theta} + V^\theta\Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}$$

$V^\mu{}_{;\nu} = B^\mu{}_\nu$ として，

$$\nabla_\beta B^\mu{}_\nu = B^\mu{}_{\nu,\beta} + B^\alpha{}_\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - B^\mu{}_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} \tag{5.66}$$

を使って，（式は 8 個）

$$\nabla_r B^r{}_r = B^r{}_{r,r} + B^r{}_r\Gamma^r{}_{rr} + B^\theta{}_r\Gamma^r{}_{\theta r} - B^r{}_r\Gamma^r{}_{rr} - B^r{}_\theta\Gamma^\theta{}_{rr}$$

$$= 0$$

$$\nabla_r B^r{}_\theta = B^r{}_{\theta,r} + B^r{}_\theta\Gamma^r{}_{rr} + B^\theta{}_\theta\Gamma^r{}_{\theta r} - B^r{}_r\Gamma^r{}_{\theta r} - B^r{}_\theta\Gamma^\theta{}_{\theta r}$$

$$= 0$$

$$\nabla_r B^\theta{}_r = B^\theta{}_{r,r} + B^r{}_r\Gamma^\theta{}_{rr} + B^\theta{}_r\Gamma^\theta{}_{\theta r} - B^\theta{}_r\Gamma^r{}_{rr} - B^\theta{}_\theta\Gamma^\theta{}_{rr}$$

$$= 0$$

$$\nabla_r B^\theta{}_\theta = B^\theta{}_{\theta,r} + B^r{}_\theta\Gamma^\theta{}_{rr} + B^\theta{}_\theta\Gamma^\theta{}_{\theta r} - B^\theta{}_r\Gamma^r{}_{\theta r} - B^\theta{}_\theta\Gamma^\theta{}_{\theta r}$$

$$= -\frac{1}{r^2}$$

$$\nabla_\theta B^r{}_r = B^r{}_{r,\theta} + B^r{}_r\Gamma^r{}_{r\theta} + B^\theta{}_r\Gamma^r{}_{\theta\theta} - B^r r\Gamma^r{}_{r\theta} - B^r{}_\theta\Gamma^\theta{}_{r\theta}$$

$$= 0$$

$$\nabla_\theta B^r{}_\theta = B^r{}_{\theta,\theta} + B^r{}_\theta\Gamma^r{}_{r\theta} + B^\theta{}_\theta\Gamma^r{}_{\theta\theta} - B^r{}_r\Gamma^r{}_{\theta\theta} - B^r{}_\theta\Gamma^\theta{}_{\theta\theta}$$

$$= -1$$

$$\nabla_\theta B^\theta{}_r = B^\theta{}_{r,\theta} + B^r{}_r\Gamma^\theta{}_{r\theta} + B^\theta{}_r\Gamma^\theta{}_{\theta\theta} - B^\theta{}_r\Gamma^r{}_{r\theta} - B^\theta{}_\theta\Gamma^\theta{}_{r\theta}$$

$$= -\frac{1}{r^2}$$

$$\nabla_\theta B^\theta{}_\theta = B^\theta{}_{\theta,\theta} + B^r{}_\theta\Gamma^\theta{}_{r\theta} + B^\theta{}_\theta\Gamma^\theta{}_{\theta\theta} - B^\theta{}_r\Gamma^r{}_{\theta\theta} - B^\theta{}_\theta\Gamma^\theta{}_{\theta\theta}$$

$$= 0$$

++++++++++++++++++++++++++++++++++

（5.74）～（5.75）

練習問題 16
　式（5.74）から式（5.75）を導くさいに，省略した過程をすべて補え.

スカラー場 ϕ の１階微分 $\nabla\phi$ は，成分 $\phi_{,\beta}$ をもつ１形式である．２階共変微分 $\nabla\nabla\phi$ は，成分 $\phi_{,\beta;\alpha}$ をもつ（0,2）テンソルである.

練習問題 12 の式（5.62）を使って，

$$\phi_{,\beta;\alpha} = \phi_{,\beta,\alpha} - \phi_{,\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$$

すべての座標系で，α と β について対称であるから，

◆ $$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} \qquad (5.74)$$

式（5.64）を使って，

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} - \Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu} \qquad (5.72)$$

$g_{\alpha\mu;\beta} = 0$ を使って，式（5.72）の添字を置換した式を用意する.

$$g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} + \Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}$$

$$g_{\alpha\mu,\beta} = \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}g_{\nu\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}$$

$$-g_{\beta\mu,\alpha} = \Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha}g_{\nu\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}$$

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}$$
$$= \left(\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}\right)g_{\nu\beta} + \left(\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha}\right)g_{\nu\mu} + \left(\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta}\right)g_{\alpha\nu}$$

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = 2g_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}$$

$g^{\alpha\gamma}$ を掛け，$g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\nu} = \delta^{\gamma}{}_{\nu}$ を使って，

◆ $$\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}\left(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}\right) = \Gamma^{\gamma}{}_{\beta\mu} \qquad (5.75)$$

＋＋

（5.43）（5.49）

練習問題 17
　$V^{\beta}{}_{,\alpha}$ と $V^{\mu}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}$ が座標変換の下でそれぞれどのように変換されるか？
［$\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}$ に対しては式（5.43）から始めるとよい.］このどちらもテンソル則には従わないが，その和はテンソルとして変換することを示せ.

【ポイント】共変微分はテンソルであるがそれの各項はテンソルではない.

$$V^{\alpha}{}_{;\beta} \equiv V^{\alpha}{}_{,\beta} + V^{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} \qquad (5.49)$$

【準備】クリストッフェル記号の定義式

$$\frac{\partial \vec{e}_{\mu}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}\vec{e}_{\lambda} \qquad (5.43)$$

から，$\tilde{\omega}^{\alpha}$ を基底１形式として，

$$\frac{\partial \vec{e}_{\mu}}{\partial x^{\beta}}\tilde{\omega}^{\alpha} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}\vec{e}_{\lambda}\tilde{\omega}^{\alpha} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}\delta^{\alpha}{}_{\lambda} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}$$

ゆえに　$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} = \dfrac{\partial \vec{e}_{\mu}}{\partial x^{\beta}}\tilde{\omega}^{\alpha}$

$\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} \equiv \dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}$ 等々として，

$$V^{\nu'}{}_{;\mu'} \equiv V^{\nu'}{}_{,\mu'} + V^{\lambda'}\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'} \qquad (5.49)$$
$$= \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}V^{\beta}) + V^{\lambda'}\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'}$$

（$\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'} = \dfrac{\partial \vec{e}_{\lambda'}}{\partial x^{\mu'}}\tilde{\omega}^{\nu'}$ を使って）

$$= \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + V^{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial \Lambda^{\nu'}{}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + V^{\lambda'}\frac{\partial \vec{e}_{\lambda'}}{\partial x^{\mu'}}\tilde{\omega}^{\nu'}$$

（第３項だけ計算を進めると，）

$$= \cdots + \Lambda^{\lambda'}{}_{\gamma}V^{\gamma}\frac{\partial \vec{e}_{\lambda'}}{\partial x^{\mu'}}\Lambda^{\nu'}{}_{\delta}\tilde{\omega}^{\delta}$$

$$= \cdots + \Lambda^{\lambda'}{}_{\gamma} V^{\gamma} \Lambda^{\nu'}{}_{\delta} \tilde{\omega}^{\delta} \Lambda^{\varepsilon}{}_{\mu'} \frac{\partial}{\partial x^{\varepsilon}} (\Lambda^{\gamma}{}_{\lambda'} \vec{e}_{\gamma})$$

$$= \cdots + \Lambda^{\lambda'}{}_{\gamma} V^{\gamma}\Lambda^{\nu'}{}_{\delta}\tilde{e}^{\delta}\Lambda^{\varepsilon}{}_{\mu'}\Lambda^{\gamma}{}_{\lambda'}\frac{\partial \vec{e}_\gamma}{\partial x^\varepsilon} + \Lambda^{\lambda'}{}_\gamma V^\gamma \Lambda^{\nu'}{}_\delta \tilde{e}^\delta \Lambda^\varepsilon{}_{\mu'} \vec{e}_\gamma \frac{\partial \Lambda^\gamma{}_{\lambda'}}{\partial x^\varepsilon}$$

（$\frac{\partial \vec e_\gamma}{\partial x^\varepsilon}\tilde\omega^\delta = \Gamma^\delta{}_{\gamma\varepsilon}$， $\Lambda^{\lambda'}{}_\gamma \Lambda^\gamma{}_{\lambda'} = \delta^\gamma{}_{\lambda'}$， $\tilde\omega^\delta \vec e_\gamma = \delta^\delta{}_\gamma$， $\Lambda^{\lambda'}{}_\gamma \frac{\partial\Lambda^\gamma{}_{\lambda'}}{\partial x^\varepsilon} = -\Lambda^\gamma{}_{\nu'}\frac{\partial \Lambda^{\nu'}{}_\gamma}{\partial x^\varepsilon}$ を使って）

$$= \cdots + \Lambda^{\nu'}{}_\delta \Lambda^\varepsilon{}_{\mu'} V^\gamma \Gamma^\delta{}_{\gamma\varepsilon} - V^\gamma \Lambda^{\nu'}{}_\delta \Lambda^\varepsilon{}_{\mu'} \Lambda^\gamma{}_{\nu'} \frac{\partial \Lambda^{\nu'}{}_\gamma}{\partial x^\varepsilon}$$

（$\Lambda^{\nu'}{}_\delta \Lambda^\gamma{}_{\nu'} = \delta^\gamma{}_\delta$ を使って，）

$$= \cdots + \Lambda^{\nu'}{}_\delta\Lambda^\varepsilon{}_{\mu'}V^\gamma\Gamma^\delta{}_{\gamma\varepsilon} - V^\gamma\Lambda^\varepsilon{}_{\mu'}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_\gamma}{\partial x^\varepsilon}$$

（ダミー添字の置換 $\gamma\to\beta$， $\varepsilon\to\alpha$）

$$= \Lambda^{\nu'}{}_\beta\Lambda^\alpha{}_{\mu'}\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha} + V^\beta\Lambda^\alpha{}_{\mu'}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_\beta}{\partial x^\alpha} + \Lambda^{\nu'}{}_\delta\Lambda^\varepsilon{}_{\mu'}V^\gamma\Gamma^\delta{}_{\gamma\varepsilon} - V^\beta\Lambda^\alpha{}_{\mu'}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_\beta}{\partial x^\alpha}$$

$$= \Lambda^{\nu'}{}_\beta\Lambda^\alpha{}_{\mu'}\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha} + \Lambda^{\nu'}{}_\delta\Lambda^\varepsilon{}_{\mu'}V^\gamma\Gamma^\delta{}_{\gamma\varepsilon}$$

（ダミー添字の置換 $\delta\to\beta$， $\varepsilon\to\alpha$）

$$= \Lambda^{\nu'}{}_\beta\Lambda^\alpha{}_{\mu'}\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha} + \Lambda^{\nu'}{}_\beta\Lambda^\alpha{}_{\mu'}V^\gamma\Gamma^\beta{}_{\gamma\alpha}$$

$$= \Lambda^{\nu'}{}_\beta\Lambda^\alpha{}_{\mu'}\left(\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha} + V^\gamma\Gamma^\beta{}_{\gamma\alpha}\right)$$

結論として，

$$V^{\nu'}{}_{;\mu'} = \Lambda^{\nu'}{}_\beta\Lambda^\alpha{}_{\mu'}V^\beta{}_{;\alpha}$$

これから，$V^\alpha{}_{;\beta}$は，確かに（1,1）テンソルの成分である．

（別解）

$\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'}$ を先に求めておく．

$$\frac{\partial\vec e_{\mu'}}{\partial x^{\nu'}} = \Lambda^\beta{}_{\nu'}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\Lambda^\alpha{}_{\mu'}\vec e_\alpha) = \Lambda^\alpha{}_{\mu'}\Lambda^\beta{}_{\nu'}\frac{\partial\vec e_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\Lambda^\alpha{}_{\mu'}}{\partial x^\beta}\Lambda^\beta{}_{\nu'}\vec e_\alpha$$

$$= \Lambda^\alpha{}_{\mu'}\Lambda^\beta{}_{\nu'}\frac{\partial\vec e_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\Lambda^\alpha{}_{\mu'}}{\partial x^\beta}\Lambda^\beta{}_{\nu'}\vec e_\alpha$$

（$\frac{\partial\vec e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\vec e_\gamma$ を使って）

$$= \Lambda^\alpha{}_{\mu'}\Lambda^\beta{}_{\nu'}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\vec e_\gamma + \frac{\partial\Lambda^\alpha{}_{\mu'}}{\partial x^\beta}\Lambda^\beta{}_{\nu'}\vec e_\alpha$$

$$= \Lambda^\alpha{}_{\mu'}\Lambda^\beta{}_{\nu'}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\Lambda^{\lambda'}{}_\gamma\vec e_{\lambda'} + \frac{\partial\Lambda^\alpha{}_{\mu'}}{\partial x^\beta}\Lambda^\beta{}_{\nu'}\Lambda^{\lambda'}{}_\alpha\vec e_{\lambda'}$$

$\frac{\partial\vec e_{\mu'}}{\partial x^{\nu'}} = \Gamma^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'}\vec e_{\lambda'}$ と比較して

$$\Gamma^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'} = \Lambda^\alpha{}_{\mu'}\Lambda^\beta{}_{\nu'}\Lambda^{\lambda'}{}_\gamma\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} + \frac{\partial\Lambda^\alpha{}_{\mu'}}{\partial x^\beta}\Lambda^\beta{}_{\nu'}\Lambda^{\lambda'}{}_\alpha$$

（ダミー添字の置換 $\lambda'\to\nu'$， $\mu'\to\lambda'$， $\nu'\to\mu'$）

$$\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'} = \Lambda^\alpha{}_{\lambda'}\Lambda^\beta{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_\gamma\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} + \frac{\partial\Lambda^\alpha{}_{\lambda'}}{\partial x^\beta}\Lambda^\beta{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_\alpha$$

$$V^{\nu'}{}_{;\mu'} \equiv V^{\nu'}{}_{,\mu'} + V^{\lambda'}\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'} \tag{5.49}$$

$$= \Lambda^\alpha{}_{\mu'}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\Lambda^{\nu'}{}_\beta V^\beta) + V^{\lambda'}\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'}$$

$$= \Lambda^\alpha{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_\beta\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha} + V^\beta\Lambda^\alpha{}_{\mu'}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_\beta}{\partial x^\alpha} + V^{\lambda'}\Gamma^{\nu'}{}_{\lambda'\mu'}$$

$$= \Lambda^\alpha{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_\beta\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha} + V^\beta\Lambda^\alpha{}_{\mu'}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_\beta}{\partial x^\alpha}$$

$$+ V^{\lambda'}\Lambda^\alpha{}_{\lambda'}\Lambda^\beta{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_\gamma\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} + V^{\lambda'}\frac{\partial\Lambda^\alpha{}_{\lambda'}}{\partial x^\beta}\Lambda^\beta{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_\alpha$$

（$\frac{\partial\Lambda^\alpha{}_{\lambda'}}{\partial x^\beta}\Lambda^{\nu'}{}_\alpha = -\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_\alpha}{\partial x^\beta}\Lambda^\alpha{}_{\lambda'}$ を使って，第 3 項，第 4 項の計算を進める）

$$= \cdots + V^\alpha\Lambda^\beta{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_\gamma\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - V^{\lambda'}\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_\alpha}{\partial x^\beta}\Lambda^\alpha{}_{\lambda'}\Lambda^\beta{}_{\mu'}$$

$$= \cdots + V^\alpha\Lambda^\beta{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_\gamma\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - V^\alpha\frac{\partial\Lambda^{\nu'}{}_\alpha}{\partial x^\beta}\Lambda^\beta{}_{\mu'}$$

（ダミー添字の置換，第 3 項は，$\alpha \to \gamma$，$\beta \to \alpha$，$\gamma \to \beta$，
第 4 項は，$\alpha \to \beta$）

$$= \cdots + V^{\gamma}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\gamma\alpha} - V^{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial \Lambda^{\nu'}{}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$= \Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + V^{\gamma}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\gamma\alpha}$$

$$= \Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}V^{\gamma}\Gamma^{\beta}{}_{\gamma\alpha}$$

$$= \Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\left(\frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + V^{\gamma}\Gamma^{\beta}{}_{\gamma\alpha}\right)$$

結論として，

$$V^{\nu'}{}_{;\mu'} = \Lambda^{\nu'}{}_{\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}V^{\beta}{}_{;\alpha}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.78）

練習問題 18
　式（5.78）を確かめよ．

$$\vec{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \vec{e}_{\hat{\beta}} \equiv g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \delta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} \cdot \tilde{\omega}^{\hat{\beta}} \equiv g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \delta^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \qquad (5.78)$$

練習問題 6 から，
基底ベクトルの座標変換は，

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial x/\partial r & \partial y/\partial r\\ \partial x/\partial\theta & \partial y/\partial\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\end{pmatrix} = \left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}\right)\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\end{pmatrix}$$

（5.21）（5.22）

基底 1 形式の座標変換は，

$$\begin{pmatrix}\tilde{d}r\\ \tilde{d}\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial r/\partial x & \partial r/\partial y\\ \partial\theta/\partial x & \partial\theta/\partial y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{d}x\\ \tilde{d}y\end{pmatrix} = \left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right)\begin{pmatrix}\tilde{d}x\\ \tilde{d}y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{d}x\\ \tilde{d}y\end{pmatrix}$$

（5.25）（5.26）

$$\vec{e}_{\hat{r}} = \vec{e}_r,\quad \vec{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \qquad (5.76)$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{r}} = \tilde{\omega}^{r},\quad \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = r\tilde{\omega}^{\theta} \qquad (5.77)$$

$$\vec{e}_{\hat{r}} \cdot \vec{e}_{\hat{r}} = (\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)$$

$$= \cos^2\theta\,\vec{e}_x + \sin^2\theta\,\vec{e}_y$$

$$= 1$$

$$\vec{e}_{\hat{\theta}} \cdot \vec{e}_{\hat{\theta}} = (-\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y)(-\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y)$$

$$= \sin^2\theta\,\vec{e}_x + \cos^2\theta\,\vec{e}_y$$

$$= 1$$

$$\vec{e}_{\hat{r}} \cdot \vec{e}_{\hat{\theta}} = \vec{e}_{\hat{\theta}} \cdot \vec{e}_{\hat{r}} = (\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)(-\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y)$$

$$= 0$$

where

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned}\tilde{d}\hat{r}\cdot\tilde{d}\hat{r} &= (\cos\theta\,\tilde{d}x+\sin\theta\,\tilde{d}y)(\cos\theta\,\tilde{d}x+\sin\theta\,\tilde{d}y)\\ &= \cos^2\theta\,\tilde{d}x+\sin^2\theta\,\tilde{d}y\\ &=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{d}\hat{\theta}\cdot\tilde{d}\hat{\theta} &= (-\sin\theta\,\tilde{d}x+\cos\theta\,\tilde{d}y)(-\sin\theta\,\tilde{d}x+\cos\theta\,\tilde{d}y)\\ &= \sin^2\theta\,\tilde{d}x+\cos^2\theta\,\tilde{d}y\\ &=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{d}\hat{r}\cdot\tilde{d}\hat{\theta} = \tilde{d}\hat{\theta}\cdot\tilde{d}\hat{r} &= (\cos\theta\,\tilde{d}x+\sin\theta\,\tilde{d}y)(-\sin\theta\,\tilde{d}y+\cos\theta\,\tilde{d}y)\\ &=0\end{aligned}$$

where

$$\tilde{\omega}^\alpha\cdot\tilde{\omega}^\beta=\delta^{\alpha\beta},\quad \tilde{\omega}^x=\tilde{d}x,\quad \tilde{\omega}^y=\tilde{d}y,\quad \tilde{\omega}^{\hat{r}}=\tilde{d}\hat{r},\quad \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}=\tilde{d}\hat{\theta}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.81）～（5.84）

練習問題 19

　式（5.81）から式（5.84）までの計算を確かめよ．これを $\tilde{d}r$ と $\tilde{d}\theta$ に対して繰り返し，それらが座標基底であることを示せ．

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_{\hat{r}}\\ \vec{e}_{\hat{\theta}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{e}_\xi\\ \vec{e}_\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial\eta} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\end{pmatrix} \tag{5.79}$$

となるような座標 (ξ,η) が存在するか確認する．もし存在するなら，$(\vec{e}_{\hat{r}},\vec{e}_{\hat{\theta}})$ は座標 (ξ,η) の基底であり，もし存在しないなら，それらは非座標基底である．このことは基底 1 形式を見たほうがより簡単である．

$$\begin{pmatrix}\tilde{\omega}^{\hat{r}}\\ \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{d}\xi\\ \tilde{d}\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{d}x\\ \tilde{d}y\end{pmatrix} \tag{5.80}$$

となるような (ξ,η) を探す．練習問題 6 の式（5.25）（5.26）から，

$$\begin{pmatrix}\tilde{\omega}^{\hat{r}}\\ \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{d}x\\ \tilde{d}y\end{pmatrix} \tag{5.81}$$

$\tilde{\omega}^{\hat{r}}$ と $\tilde{\omega}^{\hat{\theta}}$ は直交している．もし (ξ,η) が存在するなら，

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\sin\theta,\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\cos\theta \tag{5.82}$$

であるはずである．これから，次式も成り立つはずである．

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{\partial\sin\theta}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial\cos\theta}{\partial x} \tag{5.83}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\sin\theta)=\frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta) \tag{5.84}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

実際には，上式は成り立たないから，(ξ,η) は存在しない．

$\tilde{d}r$ と $\tilde{d}\theta$ について確かめる．練習問題 6 の式（5.25）（5.26）から，

$$\begin{pmatrix}\tilde{d}r\\ \tilde{d}\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{d}x\\ \tilde{d}y\end{pmatrix} \qquad \text{(5.25)（5.26）}$$

もし (ξ,η) が存在するなら，

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{-\sin\theta}{r},\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r} \qquad \text{(5.82')}$$

であるはずである．これから，次式も成り立つはずである．

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\sin\theta}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right) \qquad \text{(5.83')}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\sin\theta}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right) \qquad \text{(5.84')}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

上式は成り立つから，(ξ,η) は存在する．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.74）～（5.75）

練習問題 20

非座標基底 $\{\vec{e}_\mu\}$ に対して，$\nabla_{\vec{e}_\mu}\vec{e}_\nu-\nabla_{\vec{e}_\nu}\vec{e}_\mu\equiv c^\alpha{}_{\mu\nu}\vec{e}_\alpha$ を定義して式（5.74）のかわりにこれを用いて式（5.75）を一般化せよ．

共変微分の定義から，

$$\nabla_{\vec{e}_\mu}\vec{e}_\nu-\nabla_{\vec{e}_\nu}\vec{e}_\mu=\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\vec{e}_\alpha-\Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}\vec{e}_\alpha$$

これから次式が得られる．

$$c^\alpha{}_{\mu\nu}=\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}-\Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}$$

練習問題 16 の途中の式から，

$$g_{\alpha\beta,\mu}+g_{\alpha\mu,\beta}-g_{\beta\mu,\alpha}$$
$$=\left(\Gamma^\nu{}_{\alpha\mu}-\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}\right)g_{\nu\beta}+\left(\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}-\Gamma^\nu{}_{\beta\alpha}\right)g_{\nu\mu}+\left(\Gamma^\nu{}_{\beta\mu}+\Gamma^\nu{}_{\mu\beta}\right)g_{\alpha\nu}$$
$$=-c^\nu{}_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}-c^\nu{}_{\alpha\beta}g_{\nu\mu}+c^\nu{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}+2\Gamma^\nu{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}$$

$$g_{\alpha\beta,\mu}+g_{\alpha\mu,\beta}-g_{\beta\mu,\alpha}+c_{\beta\alpha\mu}+c_{\mu\alpha\beta}-c_{\alpha\beta\mu}=2\Gamma^\nu{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}$$

$g^{\alpha\gamma}$ を掛け，$g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\nu}=\delta^\gamma{}_\nu$ を使って，

$$g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu}+g_{\alpha\mu,\beta}-g_{\beta\mu,\alpha}+c_{\beta\alpha\mu}+c_{\mu\alpha\beta}-c_{\alpha\beta\mu})$$
$$=2\delta^\gamma{}_\nu\Gamma^\nu{}_{\beta\mu}=2\Gamma^\gamma{}_{\beta\mu}$$

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu}+g_{\alpha\mu,\beta}-g_{\beta\mu,\alpha}+c_{\beta\alpha\mu}+c_{\mu\alpha\beta}-c_{\alpha\beta\mu})=\Gamma^\gamma{}_{\beta\mu}$$

シュッツ著に合わせるため，添字を機械的に置換する．

（$\alpha\to\mu$，$\beta\to\alpha$，$\mu\to\beta$，$\gamma\to\nu$）

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\mu\alpha,\beta}+g_{\mu\beta,\alpha}-g_{\alpha\beta,\mu}+c_{\alpha\mu\beta}+c_{\beta\mu\alpha}-c_{\mu\alpha\beta})=\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.96）

練習問題 21

特殊相対論で，ある慣性観測者の $x-ct$ 面を考える．ある一様に加速された観測者が正規直交座標系をつくりたいとする．2.9 節の練習問題 21 から彼の世界線は，

$$ct(\lambda)=a\sinh\lambda,\quad x(\lambda)=a\cosh\lambda \tag{5.96}$$

で与えられる．ここで a は定数である，$a\lambda$ は観測者の固有時間（彼の腕時計の示す時間）である．

(a)　λ を固定し，a を変数と見なしたとき，式（5.96）で記述される空間的な線は，観測者の世界線とその交差する点で直交することを示せ．式（5.96）で λ を変えると，そのような曲線の族が得られる．

(b)　式（5.96）は座標 (ct, x) から直交座標 (λ, a) への変換を定義することを示せ．その座標を描き，それがもとの $ct-x$ 面の半分しか覆わないことを示せ．この座標は $|x|=c|t|$ で定義される線上で特異になり，したがってそれは非連結な二つの領域を覆うことを示せ．

(c)　この座標系でのメトリックとすべてのクリストッフェル記号を計算せよ．この観測者はクリストッフェル記号を適切に使い，座標が覆う一つの連結領域にとどまる限り，完全に質のいい観測者である．この意味で特殊相対論でも加速度観測者を考えることができる．この座標を覆う領域の右半分はしばしばリンドラー空間とよばれ，その境界線 $x=\pm ct$ は後に学ぶブラックホールの地平面に似た性質をもつ．

(a)　接ベクトルは，

$$\frac{cdt}{d\tau}=a\cosh\lambda,\quad \frac{dx}{d\tau}=a\sinh\lambda$$

$$\frac{dt}{da}=\sinh\lambda,\quad \frac{dx}{da}=\cosh\lambda$$

スカラー積は，

$$-\frac{cdt}{d\tau}\frac{dx}{d\tau}+\frac{cdt}{da}\frac{dx}{da}=-a\cosh\lambda\sinh\lambda+a\sinh\lambda\cosh\lambda=0$$

接ベクトルどうしは直交している．

(b)　任意の a と λ に対して，

$$\left|\frac{ct}{x}\right|=|\tanh\lambda|<1,\quad x>0$$

ゆえに

$$|x|>c|t|,\quad s^2=-(ct)^2+x^2>0\ \text{（空間的）}$$

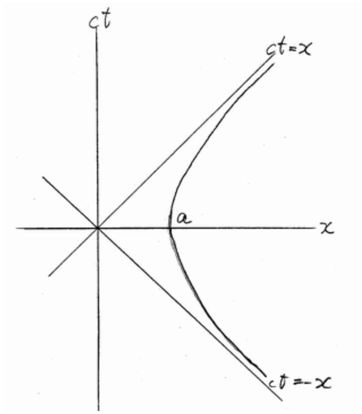
世界線は双曲線であり，x 軸での値は a である．

$$x^2-(ct)^2=a^2\cosh^2\lambda-a^2\sinh^2\lambda=a^2$$

漸近線は次式となる．

$$x=\pm ct$$

$a\to 0$ で双曲線は漸近線に近づく．



(c)

$$\vec{e}_\lambda=\frac{c\partial t}{\partial\lambda}\vec{e}_t+\frac{\partial x}{\partial\lambda}\vec{e}_x=a\cosh\lambda\vec{e}_t+a\sinh\lambda\vec{e}_x$$

$$\vec{e}_a=\frac{c\partial t}{\partial a}\vec{e}_t+\frac{\partial x}{\partial a}\vec{e}_x=\sinh\lambda\vec{e}_t+\cosh\lambda\vec{e}_x$$

$$g_{\lambda\lambda}=g(\vec{e}_\lambda,\vec{e}_\lambda)=\vec{e}_\lambda\cdot\vec{e}_\lambda=(a\cosh\lambda\vec{e}_t+a\sinh\lambda\vec{e}_x)^2=-a^2$$

$$g_{aa} = g(\vec{e}_a, \vec{e}_a) = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_a = (\sinh\lambda\vec{e}_t + \cosh\lambda\vec{e}_x)^2 = 1$$

$$g_{a\lambda} = g(\vec{e}_a, \vec{e}_\lambda) = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_\lambda$$

$$= (\sinh\lambda\vec{e}_t + \cosh\lambda\vec{e}_x)(a\cosh\lambda\vec{e}_t + a\sinh\lambda\vec{e}_x) = 0$$

$$g^{\lambda\lambda} = -\frac{1}{a^2}, \quad g^{aa} = 1, \quad g^{a\lambda} = 0$$

練習問題 16 の式（5.75）を使う.

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) = \Gamma^\gamma{}_{\beta\mu} \quad (5.75)$$

$$\Gamma^\lambda{}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}(g_{\lambda\lambda,\lambda} + g_{\lambda\lambda,\lambda} - g_{\lambda\lambda,\lambda}) + \frac{1}{2}g^{a\lambda}(g_{a\lambda,\lambda} + g_{a\lambda,\lambda} - g_{\lambda\lambda,a})$$

$$= 0$$

$$\Gamma^\lambda{}_{aa} = \frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}(g_{\lambda a,a} + g_{\lambda a,a} - g_{aa,\lambda}) + \frac{1}{2}g^{a\gamma}(g_{aa,a} + g_{aa,a} - g_{aa,a}) = 0$$

$$\Gamma^\lambda{}_{a\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}(g_{\lambda a,\lambda} + g_{\lambda\lambda,a} - g_{a\lambda,\lambda}) + \frac{1}{2}g^{a\lambda}(g_{aa,\lambda} + g_{a\lambda,a} - g_{a\lambda,a})$$

$$= \frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}g_{\lambda\lambda,a} + \frac{1}{2}g^{a\lambda}g_{aa,\lambda} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}\right)(-2a) = \frac{1}{a}$$

$$\Gamma^a{}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda a}(g_{\lambda\lambda,\lambda} + g_{\lambda\lambda,\lambda} - g_{\lambda\lambda,\lambda}) + \frac{1}{2}g^{aa}(g_{a\lambda,\lambda} + g_{a\lambda,\lambda} - g_{\lambda\lambda,a})$$

$$= -\frac{1}{2}g^{aa}g_{\lambda\lambda,a} = -\frac{1}{2}(-2a) = a$$

$$\Gamma^a{}_{aa} = \frac{1}{2}g^{\lambda a}(g_{\lambda a,a} + g_{\lambda a,a} - g_{aa,\lambda}) + \frac{1}{2}g^{aa}(g_{aa,a} + g_{aa,a} - g_{aa,a}) = 0$$

$$\Gamma^a{}_{a\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda a}(g_{\lambda a,\lambda} + g_{\lambda\lambda,a} - g_{a\lambda,\lambda}) + \frac{1}{2}g^{aa}(g_{aa,\lambda} + g_{a\lambda,a} - g_{a\lambda,a}) = 0$$

シュッツ著によれば，次式と密接な関係にある.

練習問題 7

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctan(y/x) \quad (5.3)$$

練習問題 11

$$\Gamma^\mu{}_{rr} = \Gamma^r{}_{r\theta} = \Gamma^r{}_{\theta r} = \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = 0, \quad \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r \quad (5.44)$$

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{r\theta} = 0 \quad (5.30)$$

$$(g_{\alpha\beta})_{\mathrm{polar}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（5.68）

練習問題 22

もし$U^{\alpha}\nabla_{\alpha}V^{\beta}=W^{\beta}$ならば，$U^{\alpha}\nabla_{\alpha}V_{\beta}=W_{\beta}$となることを示せ.

練習問題 16 の

$$V_{\alpha;\beta}=g_{\alpha\mu}V^{\mu}{}_{;\beta} \qquad (5.68)$$

を使って，

$$U^{\alpha}V^{\beta}{}_{;\alpha}=W^{\beta}$$

$$U^{\alpha}g_{\mu\beta}V^{\beta}{}_{;\alpha}=g_{\mu\beta}W^{\beta}$$

$$U^{\alpha}V_{\mu;\alpha}=W_{\mu}$$

$$U^{\alpha}\nabla_{\alpha}V_{\mu}=W_{\mu}$$

添字を機械的に置換する．$\mu\rightarrow\beta$

$$U^{\alpha}\nabla_{\alpha}V_{\beta}=W_{\beta}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

6　曲がった多様体

リーマン多様体，リーマン・テンソル，曲率テンソル，測地線，ビアンキ恒等式，アインシュタイン・テンソル

6.1　可微分多様体とテンソル　（6.1）

微分可能性を仮定するとただちに，１形式とベクトルを定義できる．

あらゆる曲線（パラメータλ）には，接ベクトル$\vec{V}=d/d\lambda$があって，

１形式$\tilde{d}\phi$を曲線に沿ったϕの微分

$$\left\langle \tilde{d}\phi, \vec{V} \right\rangle = \vec{V}\left(\tilde{d}\phi\right) = \nabla_{\vec{V}}\phi = d\phi/d\lambda \qquad (6.1)$$

に写像する線形関数として定義される．

上の議論は，5.9 練習問題 4 の繰返しである．

テンソル代数の規則

(1)　テンソル場は各点でテンソルを定義している．

(2)　ベクトルと１形式は相互に作用して実数となる線形作用素である．

$$\left\langle \tilde{p}, a\vec{V}+b\vec{W} \right\rangle = a\left\langle \tilde{p}, \vec{V} \right\rangle + b\left\langle \tilde{p}, \vec{W} \right\rangle$$

$$\left\langle a\tilde{p}+b\tilde{q}, \vec{V} \right\rangle = a\left\langle \tilde{p}, \vec{V} \right\rangle + b\left\langle \tilde{q}, \vec{V} \right\rangle$$

a，bは任意のスカラー場である．

(3)　テンソルとは上記と同じように１形式とベクトルに作用して実数を与える線形作用素である．

(4)　同じタイプの二つのテンソルが，ある基底に対して同じ成分をもつとき，すべての基底に対して同じ成分をもち，同一（等しい，同じ）であるという．特に，テンソルの成分がある基底に対してすべてゼロであるならば，すべての基底に対してもゼロであって，ゼロテンソルとよぶ．

(5)　“許容テンソル操作”

(i)　スカラー場を掛けると同じタイプの新たなテンソルが得られる．

(ii)　同じタイプの二つのテンソルの成分の和は，同じタイプの新しいテンソルの成分を与える．（特に，同じタイプのテンソルのみが等し

くなりうる．）

(iii)　任意のタイプの二つのテンソルの成分の積からは，二つのタイプの和をタイプとする新たなタイプのテンソルの成分が得られて，これを二つのテンソルの外積という．

(iv)　（N,M）テンソルの成分の共変微分からは，（N,M+1）テンソルの成分が得られる．

(v)　（N,M）テンソルの成分の一対の添字の縮約によって，（N-1,M-1）テンソルの成分が求まる．

(6)　ある式が，許容テンソル操作のみを使ってつくられたテンソルの成分を使って書かれており，その式がある基底に対して正しければ，その式はほかのどんな基底に対しても成り立つ．

練習問題 1　　()

練習問題 2　　()

6.2　リーマン多様体　（6.2）～（6.29）

メトリックと局所的平坦さ　（6.2）～（6.5）

$$\left(g_{\alpha'\beta'}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \left(\eta_{\alpha\beta}\right) \qquad (6.2)$$

練習問題 3　　()

長さと体積　（6.6）～（6.20）

練習問題 28　　（6.19）

練習問題 36　　（7.8）（8.50）

練習問題 37　　（6.18）

練習問題 38　　（6.8）

局所的平坦性定理の証明　　　　　（6.21）～（6.29）

$\{x^{\alpha}\}$を任意の座標系とし，$\{x^{\alpha'}\}$を求めたい座標系とする．このとき，

$$x^{\alpha}=x^{\alpha}(x^{\mu'}) \tag{6.21}$$

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}} \tag{6.22}$$

という関係がある．$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}$を点 P（その座標を$x^{\mu'}{}_0$とする）のまわりでテーラー展開して，

$$\begin{aligned}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}(\vec{x}')&=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}(P)+(x^{\gamma'}-x^{\gamma'}{}_0)\frac{\partial \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}}{\partial x^{\gamma'}}\\&\quad+\frac{1}{2}(x^{\gamma'}-x^{\gamma'}{}_0)(x^{\lambda'}-x^{\lambda'}{}_0)\frac{\partial^2\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\gamma'}}+\cdots\\&=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}|_P+(x^{\gamma'}-x^{\gamma'}{}_0)\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\gamma'}\partial x^{\mu'}}|_P\\&\quad+\frac{1}{2}(x^{\gamma'}-x^{\gamma'}{}_0)(x^{\lambda'}-x^{\lambda'}{}_0)\frac{\partial^3 x^{\alpha}}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\gamma'}\partial x^{\mu'}}|_P+\cdots\end{aligned} \tag{6.23}$$

となる．メトリックも同様に展開して，

$$\begin{aligned}g_{\alpha\beta}(\vec{x}')&=g_{\alpha\beta}|_P+(x^{\gamma'}-x^{\gamma'}{}_0)\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma'}}|_P\\&\quad+\frac{1}{2}(x^{\gamma'}-x^{\gamma'}{}_0)(x^{\lambda'}-x^{\lambda'}{}_0)\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\gamma'}}|_P+\cdots\end{aligned} \tag{6.24}$$

が得られる．これらの式を変換

$$g_{\mu'\nu'}=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}g_{\alpha\beta} \tag{6.25}$$

に代入して，

$$\begin{aligned}g_{\mu'\nu'}(\vec{x}')&=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}|_P\ \Lambda^{\beta}{}_{\nu'}|_P\ g_{\alpha\beta}|_P\\&\quad+(x^{\gamma'}-x^{\gamma'}{}_0)[\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}|_P\ \Lambda^{\beta}{}_{\nu'}|_P\ g_{\alpha\beta,\chi'}|_P\\&\quad+\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}|_P\ g_{\alpha\beta}|_P\ \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\gamma'}\partial x^{\nu'}}|_P\\&\quad+\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}|_P\ g_{\alpha\beta}|_P\ \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\gamma'}\partial x^{\mu'}}|_P]\\&\quad+\frac{1}{2}(x^{\gamma'}-x^{\gamma'}{}_0)(x^{\lambda'}-x^{\lambda'}{}_0)[\cdots]\end{aligned} \tag{6.26}$$

が得られる．

式（6.21）の変換は，テーラー展開によって，定義することができる．

自由にとりうる変数の数を勘定してみる．

$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\big|_P$には 16 個の要素があり，それらすべては自由に決められる．

$\left.\dfrac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\gamma'}\partial x^{\mu'}}\right|_P$には，$4\times4\times4=64$個の要素があり，$\gamma'$と$\mu'$については対称であるので，$4\times10=40$個の要素が自由に決定できる．

$\left.\dfrac{\partial^3 x^{\alpha}}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\gamma'}\partial x^{\mu'}}\right|_P$は，$4\times20=80$個の成分をもつ．$\lambda'$，$\gamma'$，$\mu'$のすべての並び替えに対しての対称性を考えると，独立な並び方は$n(n+1)(n+2)/3!$=20 個になる．

$g_{\alpha\beta}\big|_P$，$g_{\alpha\beta,\gamma'}\big|_P$，$g_{\alpha\beta,\gamma'\mu'}\big|_P$はすべて最初に与えられたものである．それぞれ 10 個，$10\times4=40$個，$10\times10=100$個の独立な成分をもつ．

最初に問題になるのは，次式を満たすこと．

$$g_{\mu'\nu'}\big|_P=\eta_{\mu'\nu'} \tag{6.27}$$

この式は

$$\eta_{\mu'\nu'}=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\big|_P\times\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\big|_P\times g_{\alpha\beta}\big|_P \tag{6.28}$$

と書き直せる．この式は 10 個の方程式で，これを満たすのに，$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\big|_P$に現れる 16 個の任意の定数が使える．したがって，この式は$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\big|_P$のなかの 6 個の要素を指定しないで，満足させうる．この 6 個はメトリック$\eta_{\mu'\nu'}$の形を保存するローレンツ変換の 6 自由度に対応している．つまり，速度$\boldsymbol{v}$（3 個の自由なパラメーター）動かしたり，二つの角度で指定される軸のまわりの角θの回転である．

次の問題は式（6.26）の 40 個の $\left.\frac{\partial \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}}{\partial x^{\gamma'}}\right|_P$ を選んで，

$$\left. g_{\alpha'\beta',\mu'}\right|_P = 0 \qquad (6.29)$$

という 40 個の式を満たすことが可能である．$\left.\Lambda^{\alpha}{}_{\mu',\gamma'}\right|_P$ をうまく選んで，

$\left. g_{\alpha'\beta',\mu'}\right|_P = 0$ とするように，点 P の近傍で座標を決めるやり方は，ただ一通り可能である．したがって，局所ローレンツ変換以外の自由度はなくなる．

最後に，高次を考える．100 個の式 $\left. g_{\alpha'\beta',\mu'\lambda'}\right|_P = 0$ を満足するように，80 個の $\left.\Lambda^{\alpha}{}_{\mu',\gamma'\lambda'}\right|_P$ を決められない．

一般のメトリックでは，2 階微分 $\left. g_{\alpha'\beta',\mu'\lambda'}\right|_P$ に自由度が 20 ある（100-80=20）．

つまり，一般には 2 階微分の少なくとも 20 個は消えないことになる．平坦な空間では 20 個すべてがゼロとなる．

練習問題 4　　　()

2011.06.10
6　曲がった多様体　6.9　練習問題

6.3　共変微分　　　（6.30）～（6.45）

局所慣性系では，

$$V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta} \quad \text{（この系の点 P で）} \qquad (5.30)$$

$V^{\alpha}{}_{;\beta}$ はテンソルなので，次式が成り立つ．

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^{\mu}{}_{;\beta} \qquad (5.68)$$

線形性から，

$$V_{\alpha;\beta} = \left(g_{\alpha\mu} V^{\mu}\right)_{;\beta} = g_{\alpha\mu;\beta} V^{\mu} + g_{\alpha\mu} V^{\mu}{}_{;\beta}$$

比べて，$g_{\alpha\mu;\beta} V^{\mu} = 0$ が任意の V で成り立っているから，

◆ $$g_{\alpha\mu;\beta} = 0 \quad \text{（任意の基底）} \qquad (6.31)$$

局所慣性系の任意の基底でメトリックの共変微分は 0 である．

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$$

であるならば，次式が成り立つ．

局所慣性系の任意の基底でのクリストッフェル記号の定義式

◆ $$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \qquad (6.32)$$

したがって，メトリックを与えられると共変微分をすべて計算できる．公式を示す．

$$V^{\alpha}{}_{;\beta} = V^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} V^{\mu} \qquad (6.33)$$

$$p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} p_{\mu} \qquad (6.34)$$

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = T^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma} T^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\mu\gamma} T^{\alpha\mu} \qquad (6.35)$$

練習問題 5　　　（6.32）

練習問題 31　　　（6.35）
練習問題 32　　　（6.32）
練習問題 33　　　()
練習問題 34　　　（6.31）～（6.40）

発散の公式　　(6.36）～（6.45）

固有体積要素を使って，発散を体積積分すると

$$\int V^{\alpha}{}_{;\alpha}\sqrt{-g}\,d^4x=\int\left(\sqrt{-g}V^{\alpha}\right)_{,\alpha}d^4x \qquad (6.43)$$

ガウスの法則を適用して，

$$\int\left(\sqrt{-g}V^{\alpha}\right)_{,\alpha}d^4x=\oint V^{\alpha}n_{\alpha}\sqrt{-g}\,d^3S \qquad (6.44)$$

曲った多様体でガウスの発散定理は，

◆ $$\int V^{\alpha}{}_{;\alpha}\sqrt{-g}\,d^4x=\oint V^{\alpha}n_{\alpha}\sqrt{-g}\,d^3S \qquad (6.45)$$

練習問題 6　　（6.36）～（6.42）

練習問題 7　　（6.36）～（6.42）

練習問題 8　　（6.36）～（6.42）

練習問題 9　　（6.42）

6.4　平行移動，測地線，曲率　　（6.46）～（6.52）

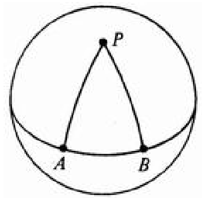


図 6.1　球面上の三角形 APB

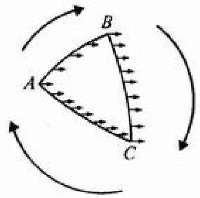


図 6.2　平坦な空間中で，曲線によってつくった“三角形”

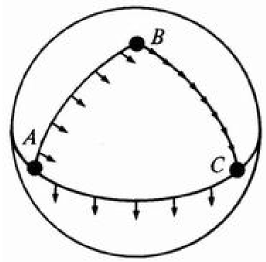


図 6.3　球面上の三角形のまわりの平行移動

練習問題 10　　（6.42）

平行移動　　(6.46)～(6.48)

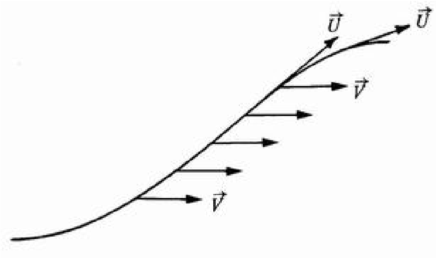


図 6.4　$\vec{U}$ に沿った $\vec{V}$ の平行移動

$\vec{U}$ に沿った $\vec{V}$ の平行移動の系に依存しない定義

◆　$U^{\beta}V^{\alpha}{}_{;\beta}=0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda}\vec{V}=\nabla_{\vec{U}}\vec{V}=0$　　(6.48)

練習問題 11　　()

測地線　　(6.49)～(6.52)

【ポイント】測地線の定義

メトリックが定義される空間においては，測地線は２つの離れた点を結ぶ（局所的に）最短な線である．

アフィン接続が定義される空間においては，測地線は，曲線のうち，その接ベクトルが曲線に沿って移動しても平行に保たれるような曲線（測地的曲率が常にゼロ）である．

測地線では接ベクトルが平行になる．

◆　$\{\vec{U}$ が測地線に平行$\} \Leftrightarrow \nabla_{\vec{U}}\vec{U}=0$　　(6.49)

成分で書くと，

$$U^{\beta}U^{\alpha}{}_{;\beta}=U^{\beta}U^{\alpha}{}_{,\beta}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}U^{\mu}U^{\beta}=0 \qquad (6.50)$$

λ を曲線のパラメーターとすると，

$$U^{\alpha}=\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda},\quad U^{\beta}\frac{d}{dx^{\beta}}=\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}\frac{d}{dx^{\beta}}=\frac{d}{d\lambda}$$

だから，次の測地線方程式が得られる．

◆
$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}\right)+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda}=0 \qquad (6.51)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\right)+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}=0$$

$$\frac{d}{d\tau}U^{\alpha}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu}=0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

【参考】測地線方程式の別の求め方

測地線は停留曲線でもある．つまり，曲線の１次の微小変化に対して，任意の２点間で曲線の長さが変化しない．このことを次のように証明する．

$$\int_a^b\left[g_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}d\lambda \qquad (6.7)$$

について，λ_0 と λ_1 を固定した場合に対するオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{dL}{dq_i}=0$$

を適用して得られた式を，

◆ $$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(g_{\beta\mu,\nu}+g_{\beta\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\beta}\right) \quad (6.32)$$

を使って整理すると，次の測地線方程式が得られる．

◆ $$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda}=0 \quad (6.51)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

以下の式の添字は，最後に上式の添字になるように調整してある．

曲った時空に対して固有時間 $d\tau$ は次式で定義される．

$$d\tau^2=-\frac{1}{c^2}ds^2=-\frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \quad ①$$

任意の時間的曲線上の固有時間は，

$$c\tau_{AB}=c\int_A^B d\tau=c\int_{\lambda 0}^{\lambda 1}\frac{d\tau}{d\lambda}d\lambda=\int_{\lambda 0}^{\lambda 1}\left[-g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}d\lambda \quad ②$$

$$c\tau_{AB}=\int_{\lambda 0}^{\lambda 1}L\left(x^{\beta},\dot{x}^{\beta},\lambda\right)d\lambda \quad ③$$

$$\text{where}\quad L\left(x^{\beta},\dot{x}^{\beta},\lambda\right)=\left[-g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\right]^{\frac{1}{2}} \quad ④$$

と書け，次のオイラー・ラグランジュ方程式を満足する．

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\beta}}-\frac{dL}{dx^{\beta}}=0 \qquad \text{where}\qquad \dot{x}^{\beta}=\frac{dx^{\beta}}{d\lambda} \quad ⑤$$

上式の左辺の計算を進めると，

$$\frac{dL}{dx^{\beta}}=-\frac{1}{2}\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}$$

$$\frac{dL}{d\dot{x}^{\beta}}=-\frac{1}{2}\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}(2)g_{\beta\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$$

ここで，次式を使って，

$$\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{d\tau}{d\lambda}$$

$$\frac{dL}{dx^{\beta}}=-\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\tau}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}$$

$$\frac{dL}{d\dot{x}^{\beta}}=-\frac{d\lambda}{d\tau}g_{\beta\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}=-g_{\beta\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$$

これから，オイラー・ラグランジュ方程式は，

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\beta\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right)-\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\tau}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}=0$$

これに，$d\lambda/d\tau$ を掛けて，

$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{\beta\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}=0$$

ここで，次式を使って，

$$\frac{dg_{\beta\mu}}{\partial\tau}=\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}$$

$$g_{\beta\mu}\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2}+\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}=0$$

これに，$g^{\alpha\beta}$ を掛けて，

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2}+g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\right)\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}=0$$

上式の一部を計算して，

$$\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}+\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}$$

これを使って，元の式は，

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2}+\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\right)\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}=0$$

となる．ここで，クリストッフェル記号の定義式（6.32）を使って，

◆ $$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0 \qquad (6.51)$$

上式は，曲った時空の時間的測地線の運動方程式である．局所慣性系では，

$\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}=0$ であるから，次の自由粒子の運動方程式が得られる．

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}=0$$

$$\phi=a\lambda+b \qquad (6.52)$$

練習問題 12　（6.51）～（6.52）

練習問題 13　()

練習問題 14　()

練習問題 15　()

6.5　曲率テンソル　（6.53）～（6.87）

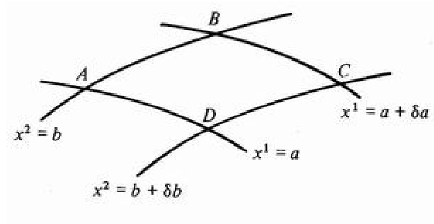


図 6.5　座標格子の微小部分

練習問題 16　（6.58）～（6.61）

練習問題 17　（6.64）～（6.68）

練習問題 18　（6.68）～（6.70）

練習問題 19　（6.71）

練習問題 20　（6.72）～（6.77）

練習問題 21　（6.78）

練習問題 29　（6.63）

練習問題 30　（6.63）

練習問題 35　（6.63）

測地線偏差　　（6.79）～（6.87）

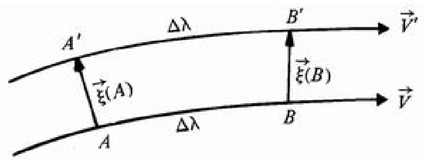


図 6.6　二つの測地線をつなぐベクトル $\vec{\xi}$ は，同じパラメーターの値の点を結んでいる．

練習問題 22　　（6.84）～（6.86）

6.6　ビアンキの恒等式：リッチ・テンソルとアインシュタインテンソル

（6.88）～（6.99）

練習問題 23　　（6.67）～（6.89）

練習問題 24　　（6.67）～（6.89）

リッチ・テンソル　　（6.91）～（6.92）

練習問題 25　　（6.91）

アインシュタインテンソル　　（6.93）～（6.99）

練習問題 26　　（6.94）～（6.99）

練習問題 27　　（6.94）～（6.99）

6.7　曲率のまとめ　　()

リー微分・リー括弧

練習問題 39　　（6.100）～（6.104）

節の中で使われている公式と問題

6.1　可微分多様体とテンソル　（6.1）

問題 1，2

6.2　リーマン多様体　（6.2）～（6.29）

メトリックと局所的平坦さ　（6.2）～（6.5）

問題 3

長さと体積　（6.6）～（6.20）

問題 28，36，37，38

局所的平坦性定理の証明　（6.21）～（6.29）

問題 4

6.3　共変微分　（6.30）～（6.45）

問題 5，問題 31，32，33，34，

発散の公式　（6.36）～（6.45）

問題 6，7，8，９

6.4　平行移動，測地線，曲率　（6.46）～（6.52）

問題 10

平行移動　（6.46）～（6.48）

問題 11

測地線　（6.49）～（6.52）

問題 12，13，14，15

6.5　曲率テンソル　（6.53）～（6.87）

問題 16，17，18，19，20，21，29，30，35

測地線偏差　（6.79）～（6.87）

問題 22

6.6　ビアンキの恒等式：リッチ・テンソルとアインシュタインテンソル

（6.88）～（6.99）

問題 23，24

リッチ・テンソル　（6.91）～（6.92）

問題 25

アインシュタインテンソル　（6.93）～（6.99）

問題 26，27

6.7　曲率のまとめ　()

リー微分・リー括弧

問題 39

()

練習問題 1

次の集合が多様体であるか否かとその理由を述べよ．集合が多様体でない例外的な点があれば，それを示せ．

(a)　ハミルトン力学での位相空間．正準座標 q^i と運動量 p_i とのなす空間．

(b)　２次元ユークリッド空間の単位円の内部．

(c)　n 個のものの置換の集合

(d)　２次元ユークリッド空間（座標が x と y ）の部分集合で，$xy(x^2+y^2-1)=0$ の解．

(a)　多様体．特異点は系による．

(b)　多様体．$r=(x^2+y^2)^{1/2}$ を定義すると，写像

$$\{X=(x/r)\tan(\pi r/2), Y=(y/r)\tan(\pi r/2)\}$$

は，単位円の内部（$r<1$）が多様体としては全平面（x, y が任意）と区別できないことを示している．この写像は距離をゆがめるが，メトリックは多様体の定義に含めないから問題ない．

(c)　多様体ではない．離散的な集合である．

(d)　これは，解が $(x^2+y^2)=1$，$x=0$，$y=0$ であり，単位円と座標軸からなっている．（1, 0）のような５つの交点を除けば至るところ１次元多様体の構造をもつ．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 2

練習問題 1 のうちの多様体について，ふつうにメトリックが使われるのはどれか？　また，そのメトリックは何か？　ふつうにはメトリックが定義されないのはどれか？　それはなぜか？

(a)　ハミルトン力学では，リーマン・メトリックを定義できる．

(b)　メトリックを定義できる．

(c)　多様体ではない．

(d)　１次元多様体なので，成分が１つのメトリックを定義できない．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 3

任意の対称行列 A（実数成分）に対して行列 H があって，$H^T AH$ が対角行列で，その要素は A の固有値となることが知られている．

(a)　$R^T H^T AHR$ が $H^T AH$ と固有値が大きさの順に上から下へ並んでいる点以外で同じ行列となるような行列 R が存在することを示せ．

(b)　第三の行列 N があって $N^T R^T H^T AHRN$ が対角行列で，その対角要素が $-1, 0, +1$ のいずれかであるようなものがあることを示せ．

(c)　A が逆行列をもつとき(b)の対角要素はどれもゼロでないことを示せ．

(d)　(a)～(c)から式（6.2）を導く変換行列 Λ が存在することを示せ．

【ポイント】メトリックを有するどんなベクトル空間もメトリックがその上で正準型 $\mathrm{diag}(-1,\cdots,-1,1,\cdots,1)$ となるような正規直交基底を選ぶことができる．これのトレース（trace）はメトリックの符号数（signature）という．
最初に 3 個の正の固有値と 1 個の負の固有値を持つようにメトリック（(4,4)対称行列）を選んでおくと，それを $(\eta) \equiv \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ となるように変換することができ，これは，ローレンツ基底の上でのミンコフスキー・メトリックとよばれる．
特殊相対論でも一般相対論でもつねにメトリックの符号数は+2 である．
【reference】
杉田／岡本／関根「理論物理のための微分幾何学」pp372-374（森北出版）
シュッツ「物理学おける幾何学的方法」pp77-82（吉岡書店）
【準備】正方な実対称行列 A には，実数の固有値と固有ベクトルがある．この固有ベクトルを単位ベクトル化して，それを列ベクトルとみなして並べた行列 H（直交行列である）を使って相似変換すると，

$$H^{-1}AH = H^T AH = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \bigcirc \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

where　$H^{-1} = H^T$　（H は直交行列だから）
というように対角化できる．$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ は固有値となる．
ここでは，固有値と固有ベクトルの求め方は省略する．

(a)　行列 H の固有ベクトルの並べる順は任意なので，対角化された行列での固有値の順も任意に並べることができる．したがって，行列 R がなくても固有ベクトルと固有値は任意の順にできる．

しかし，行列 H が与えられているときは，行列 R は行列 H を並び替えるだけのものであり，例えば次のようなものである（各行と各列で 1 が 1 回しか現れない）．

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行列 RH で相似変換しても固有値は変わらないので固有値の並べ替えができることになる．これは回転変換になる．

$$(HR)^T A(HR) = R^T H^T AHR$$

(b)　行列 N を

$$N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{|\lambda_1|} & & & \bigcirc \\ & 1/\sqrt{|\lambda_2|} & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & 1/\sqrt{|\lambda_n|} \end{pmatrix}$$

とすれば，行列 $N^T R^T H^T AHRN$ の対角要素が $-1, 0, +1$ のいずれかにすることができる．ただし，行列 N は一般には直交行列ではない．この変換では，$R^T H^T AHR$ の対角要素である固有値の符号を変えていない．
問題(a)で固有値の小さい順に並べておけば，この結果は，

$$\mathrm{diag}(-1,\cdots,-1,0,\cdots,0,1,\cdots,1)$$

となる．

(c)　行列 A が逆行列をもつとき，行列式が 0 でない，つまり，非特異を意味している．したがって，対角化された行列 $N^T R^T H^T AHRN$ も行列式が 0 でないことになる．

対角行列の行列式は対角成分の積であるから，対角成分の積が 0 でないことになり，その対角成分に 0 がないことになる．

(d)　(4, 4) 実対称行列 A を考える．最初に 3 個の正の固有値と 1 個の負の固有値を持つようにしておくとその行列式は 0 でなくなる．

問題(a) (b) (c)の規則に準じて，変換行列 $\Lambda = HRN$ をつくると，次の変換が可能になる．

$$(\eta) = (\Lambda)^T (A)(\Lambda)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 4

6.2 節の局所平坦性定理の証明に使われた次の結果を証明せよ．

(a)　$\partial^2 x^\alpha / \partial x^{\gamma'} \partial x^{\mu'}\big|_0$ の独立な値の数は 40 である．

(b)　$\partial^3 x^\alpha / \partial x^{\lambda'} \partial x^{\gamma'} \partial x^{\mu'}\big|_0$ の独立な値の数は 80 である．

(c)　$g_{\alpha\beta,\gamma'\mu'}\big|_0$ の独立な値の数は 100 である．

(a)　(γ', μ') の対称性は $\frac{1}{2}n(n+1) = 10$ 個の独立なペア (γ', μ') が存在することを意味する．α は 4 つの値を独立にとれるから，全部で 40 個の係数がある．

(b)　$(\lambda', \gamma', \mu')$ の対称手な組の数は $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) = 20$ であり，α に対する 4 つの値を掛け，80 個が得られる．

(c)　おのおのが 10 個の独立な組合せをもつ 2 つの対称的なペアがあるから，100 個となる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.32）

練習問題 5

(a)　曲ったリーマン空間の任意の座標系で$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$となることを証明せよ．

(b)　このことを使って，式（6.32）が平坦の空間の場合と同様に導かれることを示せ．

(a)　スカラー場ϕの１階微分$\nabla\phi$は，成分$\phi_{,\beta}$をもつ１形式である．２階共変微分$\nabla\nabla\phi$は，成分$\phi_{,\beta;\alpha}$をもつ（0,2）テンソルである．

$$(\nabla_{\beta}\tilde{p})_{\alpha}\equiv(\nabla\tilde{p})_{\alpha\beta}\equiv p_{\alpha;\beta}=p_{\alpha,\beta}-p_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \qquad (5.62)$$

を使って，

$$\phi_{,\beta;\alpha}=\phi_{,\beta,\alpha}-\phi_{,\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$$

局所慣性系では，

$$\phi_{,\beta,\alpha}=\frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{\beta}\partial x^{\alpha}}$$

が成り立ち，αとβについて対称である．１つの座標で対称性が成り立てば，すべての座標系で，αとβについて対称であるから，

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} \qquad (5.74)$$

(b)

◆ $$\nabla_{\beta}T_{\mu\nu}=T_{\mu\nu,\beta}-T_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}-T_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} \qquad (5.64)$$

を使って，

$$g_{\alpha\beta;\mu}=g_{\alpha\beta,\mu}-\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}-\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu} \qquad (5.72)$$

$g_{\alpha\mu;\beta}=0$を使って，式（5.72）の添字を置換した式を用意する．

$$g_{\alpha\beta,\mu}=\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}+\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}$$

$$g_{\alpha\mu,\beta}=\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}g_{\nu\mu}+\Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}$$

$$-g_{\beta\mu,\alpha}=\Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha}g_{\nu\mu}+\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}$$

$$g_{\alpha\beta,\mu}+g_{\alpha\mu,\beta}-g_{\beta\mu,\alpha}$$
$$=\left(\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}-\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}\right)g_{\nu\beta}+\left(\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha}\right)g_{\nu\mu}+\left(\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}+\Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta}\right)g_{\alpha\nu}$$

$$g_{\alpha\beta,\mu}+g_{\alpha\mu,\beta}-g_{\beta\mu,\alpha}=2g_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}$$

$g^{\alpha\gamma}$を掛け，$g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\nu}=\delta^{\gamma}{}_{\nu}$を使って，

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}\left(g_{\alpha\beta,\mu}+g_{\alpha\mu,\beta}-g_{\beta\mu,\alpha}\right)=\Gamma^{\gamma}{}_{\beta\mu} \qquad (5.75)$$

添字を入れ換えて，

局所慣性系の任意の基底でのクリストッフェル記号の定義式は，

◆ $$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(g_{\beta\mu,\nu}+g_{\beta\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\beta}\right) \qquad (6.32)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.36）〜（6.42）

練習問題 6
式（6.37）の第 1 項が消えることを示せ.

練習問題 7
(a)　余因子を使って行列 A の行列式の定義を示せ.
(b)　任意の 2×2 行列の行列式を微分して，式（6.39）を満たすことを示せ.
(c)　式（6.39）を（帰納法などを使って）任意の $n\times n$ 行列に一般化せよ.

練習問題 8
式（6.40）と式（6.42）を導く途中の計算を行ってみよ.

（練習問題 6 の解答）

デカルト座標でのベクトルの発散は，$V^{\alpha}{}_{,\alpha}$ である．任意の座標系でのベクトルの発散は，$V^{\beta}{}_{;\beta}$ である．次式が成り立つ.

$$V^{\alpha}{}_{,\alpha} \equiv V^{\beta}{}_{;\beta} \qquad (5.53)$$

したがって，任意のベクトル場の発散は，次式で定義される.

$$V^{\alpha}{}_{;\alpha} = V^{\alpha}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} V^{\mu} \qquad (6.36)$$

クリストッフェル記号の定義式

◆ $$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}\right) \qquad (6.32)$$

を使って,

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\beta\alpha,\mu} - g_{\mu\alpha,\beta})$$

$$= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\mu\alpha,\beta}) + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} \qquad (6.37)$$

第 1 項の括弧内第 1 項の計算を進める.

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\mu,\alpha} = g^{\beta\alpha} g_{\beta\mu,\alpha} = g^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu,\beta} = g^{\alpha\beta} g_{\mu\alpha,\beta}$$

第 2 辺と第 4 辺はメトリックの対称性から導け，第 3 辺はダミー添字の書き

換えである．これと括弧内第 2 項と打ち消せる．第 1 項は消えて,

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} \qquad (6.38)$$

（練習問題 7 の解答）

7(a)　行列 A の要素を a_{ij} とし，その余因子を Δ_{ij} とすると，行列 A の行列式の定義は，i を任意の行として,

$$\det(A) = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$

7(b)

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$$

$$(g_{\alpha\beta})^{-1} = (g^{\alpha\beta}) = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}$$

$$g^{11} = \frac{1}{g} g_{22},\quad g^{12} = -\frac{1}{g} g_{12},\quad g^{21} = -\frac{1}{g} g_{21},\quad g^{22} = \frac{1}{g} g_{11}$$

式（6.39）の左辺

$$= g_{,\mu} = \frac{\partial \det(g_{\alpha\beta})}{\partial x^{\mu}} = g_{11,\mu}g_{22} + g_{11}g_{22,\mu} - g_{12,\mu}g_{21} - g_{12}g_{21,\mu}$$

式（6.39）の右辺

$$= g g^{\alpha\beta} g_{\beta\alpha,\mu} = g^{11}g_{11,\mu} + g^{12}g_{21,\mu} + g^{21}g_{12,\mu} + g^{22}g_{22,\mu}$$

$$= g_{22}g_{11,\mu} - g_{12}g_{21,\mu} - g_{21}g_{12,\mu} + g_{11}g_{22,\mu}$$

与式が証明された.

7(c)　3×3 行列の行列式

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

について，式（6.39）は,

$$g_{,\mu} = g_{11,\mu}\Delta_{11} + g_{11}\Delta_{11,\mu} + g_{12,\mu}\Delta_{12} + g_{12}\Delta_{12,\mu} + g_{13,\mu}\Delta_{11} + g_{11}\Delta_{13,\mu}$$

上式の余因子は，2×2 行列だからさらに展開できる.

このようにして自然に $n\times n$ 行列に拡張できる.

（練習問題 8 の解答）

行列 A の成分を a_{ij} とし，その余因子を Δ_{ij} とすると，行列 A の行列式の定義は，

i を任意の行として，

$$\det(A)=a_{i1}\Delta_{i1}+a_{i2}\Delta_{i2}+\cdots+a_{in}\Delta_{in}=\sum_j a_{ij}\Delta_{ij}$$

定義より，Δ_{ij} に成分 a_{ij} は含まれないので，

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det(A)=\Delta_{ij}$$

これから，

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\det(A)=\sum_{ij}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det(A)=\sum_{ij}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^\mu}\Delta_{ij}$$

行列 A の逆行列 A^{-1} の成分を b_{ij} とすると，

$$b_{ij}=\frac{\Delta_{ji}}{\det(A)}$$

だから，

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\det(A)=\det(A)\sum_{ij}b_{ij}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^\mu}=\det(A)Tr\left(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x^\mu}\right)$$

where　Tr はトレース（対角成分の和）

したがって，

$$Tr\left(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x^\mu}\right)=\frac{1}{\det(A)}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\det(A)=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\ln\det(A)\right)$$

が得られる．

一方，成分が $g_{\alpha\beta}$ である行列を $(g_{\alpha\beta})$ と表記し，その行列式を $g=\det(g_{\alpha\beta})$ とすると，

クリストッフェル記号は次のように書ける．

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu} \tag{6.38}$$

$$=\frac{1}{2}Tr\left((g_{\alpha\beta})^{-1}\frac{\partial(g_{\alpha\beta})}{\partial x^\mu}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\ln(-g)\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\ln(-g)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\ln\sqrt{-g}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{-g} \tag{6.40}$$

これから，ベクトルの発散は次のように書ける．

$$\nabla\cdot\vec{V}=V^\alpha{}_{;\alpha}=V^\alpha{}_{,\alpha}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}V^\mu \tag{6.36}$$

$$=\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\alpha}+\frac{V^\mu}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{-g}=\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\alpha}+\frac{V^\alpha}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\sqrt{-g}$$

$$V^\alpha{}_{;\alpha}=\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\alpha}+\frac{V^\alpha}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\sqrt{-g} \tag{6.41}$$

◆ $$V^\alpha{}_{;\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g}V^\alpha\right)=\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}V^\alpha)_{,\alpha} \tag{6.42}$$

また，スカラーのラプラシアンは次のように書ける．

$$\nabla^2\phi=\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}\right)_{;\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}\right)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.42）

練習問題９
　式（6.42）から式（5.55）が導かれることを示せ．式（6.19）のメトリックについて発散公式を導け．

$$V^{\alpha}{}_{;\alpha}=\frac{\partial V^r}{\partial r}+\frac{\partial V^{\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}V^r$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV^r)+\frac{\partial}{\partial\theta}V^{\theta} \qquad (5.55)$$

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&r^2\sin^2\theta\end{pmatrix} \qquad (6.19)$$

5.9 練習問題 21 の式（5.31）から，２次元極座標のメトリックは，

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&r^2\end{pmatrix} \qquad (5.31)$$

$$g=r^2$$

発散は，

$$V^{\alpha}{}_{;\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}V^{\alpha})_{,\alpha} \qquad (6.42)$$

$$=\frac{1}{r}(rV^{\alpha})_{,\alpha}=\frac{1}{r}(rV^r)_{,r}+\frac{1}{r}(rV^{\theta})_{,\theta}$$

$$=\frac{1}{r}(rV^r)_{,r}+V^{\theta}{}_{,\theta} \qquad (5.55)$$

３次元球面座標のメトリックは，

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&r^2\sin^2\theta\end{pmatrix} \qquad (6.19)$$

$$g=r^4\sin^2\theta$$

発散は，

$$V^{\alpha}{}_{;\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}V^{\alpha})_{,\alpha} \qquad (6.42)$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}(r^2\sin\theta\cdot V^{\alpha})_{,\alpha}$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\{(r^2\sin\theta\cdot V^r)_{,r}+(r^2\sin\theta\cdot V^{\theta})_{,\theta}+(r^2\sin\theta\cdot V^{\phi})_{,\phi}\}$$

$$=\frac{1}{r^2}(r^2V^r)_{,r}+\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\cdot V^{\theta})_{,\theta}+V^{\phi}{}_{,\phi}$$

$$=\frac{2}{r}V^r+V^r{}_{,r}+\frac{1}{\tan\theta}V^{\theta}+V^{\theta}{}_{,\theta}+V^{\phi}{}_{,\phi}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 10

　球面上の“直線”は大円である．球面上にある大円の一部を三辺とする三角形の内角の和は 180°を越えることはよく知られている．ベクトルをそのような（図 6.3 のような）三角形に沿って平行移動していくとき，ベクトルの回転量は内角の和が 180°を越えた分に等しいことを示せ．

A 点から始め，時計回りに回るとする．便宜上，ベクトルの向きを進行方向から時計回りに角度 $\angle V$ とする．図の例では，A 点で，

$$\angle V(A) = 90$$

である．B 点を過ぎると，

$$\angle V(B) = \angle V(A) + \angle B - 180 \quad = 0$$

である．C 点を過ぎると，

$$\begin{aligned}\angle V(C) &= \angle V(B) + \angle C - 180 \\ &= \angle V(A) + \angle B + \angle C - 360 \\ &= -90^\circ\end{aligned}$$

である．再び A 点を過ぎると，

$$\begin{aligned}\angle V(A') &= \angle V(C) + \angle A - 180 \\ &= \angle V(A) + \angle B + \angle C + \angle A - 540 \\ &= -180\end{aligned}$$

である．

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ + \angle\alpha$$

だから，

$$\angle V(A') = \angle V(A) + \angle\alpha$$

となる．

したがって，最初の $\angle V(A)$ に対して，$\angle\alpha$ だけ余分に回転している．

【参考】ガウス・ボンネの定理

$$\angle\alpha = \angle A + \angle B + \angle C - 180 \quad = \int_\Delta K dA$$

where K；ガウス曲率，dA；面積要素，Δ；積分範囲は三角形

（例）A 点と C 点が赤道上，B 点を極として，A 点と C 点のなす角が 90° とすると，半径が 1，つまりガウス曲率が 1 の球の表面積は，4π であり，三角形の面積はそれの $\frac{1}{8}$，つまり，$\frac{\pi}{2}$ であるので，

$$\angle\alpha = \frac{\pi}{2}(rad) = 90$$

となる．A 点と C 点のなす角が $D(\ )$ とすると，

$$\angle\alpha = 4\pi \times \frac{D}{360} \times \frac{1}{2} = \pi\frac{D}{180}(rad) = D(\ )$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（）

練習問題 11

この問題ではベクトル場 $\vec{V}$ が多様体上で大域的に平行であると考えうるための条件を求める．より正確にいえば，ベクトル場 $\vec{V}$ が方程式

$$(\nabla\vec{V})^{\alpha}{}_{\beta} = V^{\alpha}{}_{;\beta} = V^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}V^{\mu} = 0$$

を満たすための条件は何かということである．

(a)　この式の，必要条件は偏微分の交換可能性から出てきて，積分可能条件といわれる．$V^{\alpha}{}_{,\beta\nu} = V^{\alpha}{}_{,\nu\beta}$ から，

$$\left(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\beta}\right)V^{\mu} = \left(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta}\right)V^{\sigma} = 0$$

が得られることを示せ．

(b)　添字をつけかえて，これを

$$\left(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}\right)V^{\mu} = 0$$

の形に変換せよ．この条件が十分条件でもある．

$$V^{\alpha}{}_{;\beta} = V^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}V^{\mu} \qquad (5.49)$$
$$= 0$$

から，

$$V^{\alpha}{}_{,\beta} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}V^{\mu}$$

微分して，

$$V^{\alpha}{}_{,\beta\nu} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu}V^{\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}V^{\mu}{}_{,\nu}$$
$$= -\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu}V^{\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu}V^{\sigma}$$

ダミー添字を書き換えて（$\mu \leftrightarrow \sigma$），

$$V^{\alpha}{}_{,\beta\nu} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu}V^{\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}V^{\mu}$$

偏微分を交換したもう一式をつくる（$\beta \leftrightarrow \nu$），

$$V^{\alpha}{}_{,\nu\beta} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\beta}V^{\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta}V^{\mu}$$

二式の差をとって，

$$V^{\alpha}{}_{,\nu\beta} - V^{\alpha}{}_{,\beta\nu} = \left(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}\right)V^{\mu}$$

上式で，

$$V^{\alpha}{}_{,\nu\beta} = V^{\alpha}{}_{,\beta\nu}$$

であるから，次の与式が得られる．

$$\left(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}\right)V^{\mu} = 0$$

上式の左辺の括弧内はリーマン・テンソルであり，曲率を与える．リーマン・テンソルが恒等的にゼロになるときのみ，多様体は大域的に平坦であり，平行性が保たれる．平行性とは，ベクトルをそれ自身に平行に任意の曲線に沿って一周させて，最初の点に戻ったときに変化していないことである．リーマン・テンソルは，積分可能条件を与えるガウスの基本方程式に現れる．

$V^{\mu} = \mathrm{Const.}$とすると，

$$V^{\alpha}{}_{,\beta\nu} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu}V^{\mu}$$

これから，問題(a)の式が得られる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.51）～（6.52）

練習問題 12

　式（6.52）が新しいアフィンパラメーターを定義することを示せ．

測地線方程式

◆ $$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = 0 \qquad (6.51)$$

に

$$\phi = a\lambda + b \qquad (6.52)$$

を代入すると，

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\phi^2} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\frac{dx^{\mu}}{d\phi}\frac{dx^{\beta}}{d\phi} = 0$$

となるので，測地線方程式の形は変えない．したがって，式（6.52）は新しいアフィンパラメーターを与える．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 13

(a)　$\vec{A}$ と $\vec{B}$ がある曲線に沿って平行移動されるとき，$\mathbf{g}(\vec{A},\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{B}$ は定数であることを示せ．

(b)　このことから，あるところで測地線が空間的（あるいは，時間的あるいはヌル的）であれば，全体で空間的（あるいは，時間的あるいはヌル的）であることをいえ．

練習問題 14

接ベクトルが $\vec{V}$ である曲線に沿った固有距離は式（6.8）で与えられる．曲線が測地線であれば，固有距離はアフィンパラメーターであることを示せ．（練習問題 13 の結果を使え．）

練習問題 15

練習問題 13 と 14 を使って，2 点間の測地線の固有距離は，端点を固定して曲線を微小変化させたとき，この変化の 1 次のオーダーまでは不変であることを示せ．

【ポイント】測地線の定義

メトリックが定義される空間においては，測地線は 2 つの離れた点を結ぶ（局所的に）最短な線である．

アフィン接続が定義される空間においては，測地線は，曲線のうち，その接ベクトルが曲線に沿って移動しても平行に保たれるような曲線（測地的曲率が常にゼロ）である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（練習問題 13 の解答）

(a)　平行移動で $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の成分は変わらないので，

$$\mathbf{g}(\vec{A},\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{B}=g_{\alpha\beta}A^{\alpha}B^{\beta}$$

したがって，平行移動で内積は変わらない．

(b)　ある測地線の接ベクトル $\vec{V}$ が空間的，つまり，

$$g_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta}>0$$

であれば，以後も平行移動なのでずっと空間的である．

接ベクトル $\vec{V}$ が時間的，つまり，

$$g_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta}<0$$

であれば，以後も平行移動なのでずっと時間的である．

接ベクトル $\vec{V}$ がヌル的，つまり，

$$g_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta}=0$$

であれば，以後も平行移動なのでずっとヌル的である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（練習問題 14 の解答）

練習問題 13 から，内積は次のように定数となる．

$$\left|\vec{V}\cdot\vec{V}\right|^{\frac{1}{2}}=\left|g_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta}\right|^{\frac{1}{2}}=\left|V\right|=Const.$$

とすると，

$$l=\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\left|\vec{V}\cdot\vec{V}\right|^{\frac{1}{2}}d\lambda=V(\lambda_1-\lambda_0)$$

上式は任意の範囲の曲線の長さである．

積分範囲を $[\lambda,\lambda_0]$ とすると，

$$l=V(\lambda-\lambda_0)=a\lambda+b$$

であるから，練習問題 12 から，l はアフィンパラメーターである．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（練習問題 15 の解答）

空間的曲線 $\{x^{\alpha}(\lambda)\}$ で，$x^{\alpha}(a)$ から $x^{\alpha}(b)$ までの長さは，

$$\int_a^b\left[g_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}d\lambda \qquad (6.7)$$

この曲線を $\delta x^{\alpha}(a)=\delta x^{\alpha}(b)=0$ であるような $\{x^{\alpha}(\lambda)+\delta x^{\alpha}(\lambda)\}$ へ変化させる．そ

のときの長さの 1 次の変化は，部分積分して，

$$\int_a^b \left[\frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\gamma} U^\alpha U^\beta - d\left(g_{\gamma\alpha} U^\alpha\right) d\lambda \right] \delta x^\gamma d\lambda$$

$$\text{where} \quad U^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$$

測地線に対して，角括弧中の項がゼロとなる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.58）～（6.61）

練習問題 16

(a)　式（6.58）から式（6.59），（6.60）を導け．

(b)　式（6.61）を導くまでの計算を行え．

点 A で定義されたベクトル $\vec{V}$ が点 B へ平行移動される．平行移動の法則により，$\nabla_{\vec{e}_1} \vec{V} = 0$ で，

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} = -\Gamma^\alpha{}_{\mu 1} V^\mu \tag{6.53}$$

が得られる．同様にして，点 B から点 C，D と順に平行移動され，点 A に戻る．$V^\alpha(A)$ の正味の変化は δV^α で，次式となる．

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha &= V^\alpha(A_{final}) - V^\alpha(A_{initial}) \\ &= \int_{x^1=a(D\to A)} \Gamma^\alpha{}_{\mu 2} V^\mu dx^2 - \int_{x^1=a+\delta a(B\to C)} \Gamma^\alpha{}_{\mu 2} V^\mu dx^2 \\ &\quad + \int_{x^2=b+\delta b(C\to D)} \Gamma^\alpha{}_{\mu 1} V^\mu dx^1 - \int_{x^2=b(A\to B)} \Gamma^\alpha{}_{\mu 1} V^\mu dx^1 \end{aligned} \tag{6.58}$$

最低次までとると，

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha &\cong -\int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^\alpha{}_{\mu 2} V^\mu\right) dx^2 \\ &\quad + \int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\Gamma^\alpha{}_{\mu 1} V^\mu\right) dx^1 \end{aligned} \tag{6.59}$$

$\int_b^{b+\delta b} dx^2 = \delta b$，$\int_a^{a+\delta a} dx^1 = \delta a$ として，次式が得られる．

$$\delta V^\alpha \approx \delta a \delta b \left[-\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^\alpha{}_{\mu 2} V^\mu\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\Gamma^\alpha{}_{\mu 1} V^\mu\right) \right] \tag{6.60}$$

(b)　微分は次のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^\alpha{}_{\mu 2} V^\mu\right) = \Gamma^\alpha{}_{\mu 2,1} V^\mu + \Gamma^\alpha{}_{\mu 2} V^\mu{}_{,1}$$

（ダミー添字を書き換えてから，式（6.53）を使って）

$$= \Gamma^{\alpha}{}_{\mu 2,1} V^{\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu 2} V^{\nu}{}_{,1}$$

$$= \Gamma^{\alpha}{}_{\mu 2,1} V^{\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu 2} \Gamma^{\nu}{}_{\mu 1} V^{\mu}$$

同様に，

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu 1} V^{\mu}\right) = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu 1,2} V^{\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu 1} \Gamma^{\nu}{}_{\mu 2} V^{\mu}$$

これらを，式（6.60）に代入して，次式が得られる．

$$\delta V^{\alpha} = \delta a \delta b \left[\Gamma^{\alpha}{}_{\mu 1,2} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu 2,1} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu 2} \Gamma^{\nu}{}_{\mu 1} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu 1} \Gamma^{\nu}{}_{\mu 2}\right] V^{\mu} \qquad (6.61)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.64）～（6.68）

練習問題 17

(a)　式（6.5）は $g^{\alpha\beta}{}_{,\mu}(P) = 0$ を意味することを示せ．

(b)　このことを使って，式（6.64）を確かめよ．

(c)　式（6.68）が得られるまでの途中の計算を行え．

(a)　メトリックの微分がゼロならば，メトリックの逆行列の微分もゼロである．次式が成り立てば，その次次式が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} g_{\alpha\beta}(P) = 0 \qquad (6.5)$$

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\mu}(P) = 0$$

(b)　クリストッフェルの定義式（6.32）を微分して，

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(g_{\beta\mu,\nu\sigma} + g_{\beta\nu,\mu\sigma} - g_{\mu\nu,\beta\sigma}\right)$$

問題(a)から， $g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} = 0$ であるから，

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(g_{\beta\mu,\nu\sigma} + g_{\beta\nu,\mu\sigma} - g_{\mu\nu,\beta\sigma}\right) \qquad (6.64)$$

(c)　練習問題 16 から，

$$\delta V^{\alpha} = \delta a \delta b \left[\Gamma^{\alpha}{}_{\mu 1,2} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu 2,1} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu 2} \Gamma^{\nu}{}_{\mu 1} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu 1} \Gamma^{\nu}{}_{\mu 2}\right] V^{\mu} \qquad (6.61)$$

x^1, x^2 の代わりに x^{σ}, x^{λ} を使うと，

$$\delta V^{\alpha} = \delta a \delta b \left[\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\sigma,\lambda} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda,\sigma} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda} \Gamma^{\nu}{}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma} \Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda}\right] V^{\mu} \qquad (6.62)$$

これから，リーマン･テンソルを次のように定義する．

◆ $$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu} \qquad (6.63)$$

$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0$ と式（6.64）を使って，

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\beta,\nu\mu} + g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu} - g_{\sigma\beta,\mu\nu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu})$$

（6.65）

となる．$g_{\alpha\beta}$ が対称であり，偏微分は常に交換可能だから，

$$g_{\alpha\beta,\mu\nu}=g_{\alpha\beta,\nu\mu} \tag{6.66}$$

となる．これを使って，

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\nu,\beta\mu}-g_{\beta\nu,\sigma\mu}-g_{\sigma\mu,\beta\nu}+g_{\beta\mu,\sigma\nu})$$

（添字の入れ替えを判りやすくするため，項の順を入れ替える）

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\nu,\beta\mu}-g_{\sigma\mu,\beta\nu}+g_{\beta\mu,\sigma\nu}-g_{\beta\nu,\sigma\mu}) \tag{6.67}$$

添字 α を下げると，

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta\mu\nu}&\equiv g_{\alpha\lambda}R^{\lambda}{}_{\beta\mu\nu}\\&=\frac{1}{2}g_{\alpha\lambda}g^{\lambda\sigma}(g_{\sigma\nu,\beta\mu}-g_{\sigma\mu,\beta\nu}+g_{\beta\mu,\sigma\nu}-g_{\beta\nu,\sigma\mu})\\&=\frac{1}{2}\delta^{\sigma}{}_{\alpha}(g_{\sigma\nu,\beta\mu}-g_{\sigma\mu,\beta\nu}+g_{\beta\mu,\sigma\nu}-g_{\beta\nu,\sigma\mu})\end{aligned}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}\left(g_{\alpha\nu,\beta\mu}-g_{\alpha\mu,\beta\nu}+g_{\beta\mu,\alpha\nu}-g_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) \tag{6.68}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.68）～（6.70）

練習問題 18

(a)　式（6.68）から式（6.69），（6.70）を導け．

(b)　式（6.69）によって $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ の独立な成分の数が $4\times4\times4\times4=256$ から $6\times7/2=21$ に減ることを示せ．（ヒント：添字をペアで扱え．$R_{\alpha\beta\mu\nu}$ の最初のペアと次のペアについて独立な組合せの数を計算せよ．）

(c)　式（6.70）は式（6.69）と独立なものとしては，一つだけの関係式を与え，したがって独立な成分の数を 20 に減らすことを示せ．

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}\equiv g_{\alpha\lambda}R^{\lambda}{}_{\beta\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(g_{\alpha\nu,\beta\mu}-g_{\alpha\mu,\beta\nu}+g_{\beta\mu,\alpha\nu}-g_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) \tag{6.68}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}=-R_{\beta\alpha\mu\nu}=-R_{\alpha\beta\nu\mu}=R_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{6.69}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}+R_{\alpha\nu\beta\mu}+R_{\alpha\mu\nu\beta}=0 \tag{6.70}$$

(a)　式（6.69）の意味するところは，最初の２つの添字の中での入れ替え（$\alpha\leftrightarrow\beta$）についてと，また次の２つの添字の中での入れ替え（$\mu\leftrightarrow\nu$）について反対称であり，最初の２つの添字と次の２つの添字の同時の入れ替え（$\alpha\leftrightarrow\mu$，$\phi\leftrightarrow\nu$）に対して対称である．これらは，式(6.68)の添字を入れ換えてみれば自明である．

$g_{\alpha\beta}$ は対称であり，偏微分は交換可能なので，

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}=R_{\beta\alpha\mu\nu}=R_{\alpha\beta\nu\mu}=R_{\beta\alpha\nu\mu}$$

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta\mu\nu}+R_{\alpha\nu\beta\mu}+R_{\alpha\mu\nu\beta}=\frac{1}{2}(&R_{\alpha\nu\beta\mu}-R_{\alpha\mu\beta\nu}+R_{\beta\mu\alpha\nu}-R_{\beta\nu\alpha\mu}\\&+R_{\alpha\mu\nu\beta}-R_{\alpha\beta\nu\mu}+R_{\nu\beta\alpha\mu}-R_{\nu\mu\alpha\beta}\\&+R_{\alpha\beta\mu\nu}-R_{\alpha\nu\mu}\beta+R_{\mu\nu\alpha\beta}-R_{\mu\beta\alpha\nu})\\=0&\end{aligned}$$

(b)　おのおののペア $\alpha\beta$，$\mu\nu$ は反対称なので，ゼロでない成分はおのおの

$\frac{1}{2}n(n-1)=6$ 個の独立なペアがある．おのおののペアはそれらの 6 個の中から独立に選べるが，ペアどうしの交換に関して対称でなければならない．したがって，$\frac{1}{2}n(n-1)=6$ 次元の空間での対称行列であり，すなわち，

$$\frac{1}{2}[n(n-1)/2][n(n-1)/2+1]=\frac{1}{8}n(n-1)((n^2-n+2)$$

$$=\frac{1}{2}\times 6\times 7=21\text{個}$$

の独立な成分をもつ．

(c)　式（6.69）から式（6.70）を

$$R_{\alpha[\beta\mu\nu]}=0$$

と書き換えることができる．反対称性より $\beta\mu\nu$ には $n(n-1)(n-2)/3!=4$ 個しか独立な組合せはない．原則的には α が β，μ，ν のどれか 1 つに等しいとすると，式（6.70）は式（6.69）の 1 つに帰着してしまう．したがって，式（6.70）は，たとえば α の値のみよって決定される 4 個の方程式である．式（6.69）から式（6.70）を $R_{\beta[\alpha\mu\nu]}=0$ と書き換えられるから，もし，以前にたとえば $\alpha=1, \beta=2$ を選んでいたとすると，その方程式は $\alpha=2, \beta=1$ としたものに同等となる．したがって α のすべての値に対して同じ方程式になってしまう．つまり，$n(n-1)(n-2)(n-3)/4!=1$ 個である．問題(b)の結果と合わせて，次式が得られる．

$$\frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n+2)-\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)=\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$$

$$=21-1=20\text{個}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.71）

練習問題 19

　ユークリッド平面での極座標では，$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}=0$ となることを示せ．式（5.44）またはそれに相当するものを使え．

$$\Gamma^\mu{}_{rr}=\Gamma^r{}_{r\theta}=\Gamma^r{}_{\theta r}=\Gamma^\theta{}_{\theta\theta}=0,\quad \Gamma^\theta{}_{r\theta}=\Gamma^\theta{}_{\theta r}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^r{}_{\theta\theta}=-r \tag{5.44}$$

【ポイント】平坦な多様体では，いたるところで $\Gamma^i{}_{jk}=0$ となるような座標系が存在するが，$\Gamma^i{}_{jk}=0$ とならない座標系を選ぶことも可能であるということをこの問題は示している．

平行性が大域的に定義されうるのが平坦な多様体である．つまりベクトルを任意の曲線に沿って，それ自身に平行に一周させて，最初の点に帰ってきたときに変化していないようにできる．これは次式と同義である．

◆　$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}=0 \Leftrightarrow$ 平坦な多様体　（6.71）

リーマン･テンソルの定義式は，

◆　$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\equiv\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu}-\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu}+\Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\nu}-\Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \tag{6.63}$$

$$=\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu}-\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu}+\Gamma^\alpha{}_{r\mu}\Gamma^r{}_{\beta\nu}+\Gamma^\alpha{}_{\theta\mu}\Gamma^\theta{}_{\beta\nu}-\Gamma^\alpha{}_{r\nu}\Gamma^r{}_{\beta\mu}-\Gamma^\alpha{}_{\theta\nu}\Gamma^\theta{}_{\beta\mu}$$

$\alpha=r$ のときは，次の添字の組合せがある．

$$R^r{}_{rrr},\quad R^r{}_{rr\theta},\quad R^r{}_{r\theta r},\quad R^r{}_{\theta rr},\quad R^r{}_{r\theta\theta},\quad R^r{}_{\theta r\theta},\quad R^r{}_{\theta\theta r},\quad R^r{}_{\theta\theta\theta}$$

式（5.44）から，$R^r{}_{\theta\theta r}=-R^r{}_{\theta r\theta}$ 以外は各項がゼロになる．

$$R^r{}_{\theta\theta r}=-\Gamma^r{}_{\theta\theta,r}+\Gamma^r{}_{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta r}=1-1=0$$

$$R^r{}_{\theta r\theta}=\Gamma^r{}_{\theta\theta,r}-\Gamma^r{}_{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta r}=-1+1=0$$

$\alpha=\theta$ のときは，$R^r{}_{???}=0$ と練習問題 18 から，$R^\theta{}_{\theta\theta r}=-R^\theta{}_{\theta r\theta}$ と $R^\theta{}_{\theta\theta\theta}$ 以外はゼロとなることが確認されている．また，式（5.44）から，$R^\theta{}_{\theta\theta r}=-R^\theta{}_{\theta r\theta}$ と $R^\theta{}_{\theta\theta\theta}$ は各項がゼロになる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.72）～（6.77）

練習問題 20

式（6.73）を確かめるためるのに必要な計算をせよ．

ベクトル場$\vec{V}$に共変微分を 2 度施す．

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu = \nabla_\alpha (V^\mu{}_{;\beta})$$

$$= (V^\mu{}_{;\beta})_{,\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\alpha} V^\sigma{}_{;\beta} - \Gamma^\sigma{}_{\beta\alpha} V^\mu{}_{;\sigma} \qquad (6.72)$$

点 P における局所慣性系ではΓはすべてゼロであるが, その偏微分はゼロではない．したがって，点 P で,

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu = (V^\mu{}_{;\beta})_{,\alpha}$$

$$= \left(V^\mu{}_{,\beta} + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} V^\nu\right)_{,\alpha}$$

$$= V^\mu{}_{,\beta\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} V^\nu + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} V^\mu{}_{,\alpha}$$

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu = V^\mu{}_{,\beta\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} V^\nu \qquad (6.73)$$

がこの座標のみで成り立つ．αとβを入れ換えると,

$$\nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu = V^\mu{}_{,\alpha\beta} + \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha,\beta} V^\nu \qquad (6.74)$$

この二式を引き算すると，量子力学の記号を使って,

$$\left[\nabla_\alpha, \nabla_\beta\right] V^\mu \equiv \nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu = \left(\Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha,\beta}\right) V^\nu$$

(6.75)

$$V^\mu{}_{,\alpha\beta} = V^\mu{}_{,\beta\alpha} \qquad (6.76)$$

この系（$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = 0$）で，式（6.75）とリーマン･テンソルの定義式

◆ $$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \equiv \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \qquad (6.63)$$

を比べて，点 P では,

◆ $$\left[\nabla_\alpha, \nabla_\beta\right] V^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} V^\nu \qquad (6.77)$$

である．これはテンソル方程式であり，任意の座標系で成り立つ．リーマン･テンソルは共変微分の交換関係を与える．共変微分は交換しないのである．つまり，共変微分の順序を入れ換えると別の式になる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.78）

練習問題 21

式（6.78）に続く文章について考えよ．括弧内の議論はなぜ

$$V^{\alpha}{}_{;\beta} = V^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} V^{\mu} \quad と \quad V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} V_{\mu}$$

の式の符号には適用できないのか？

（以下はシュッツ著本文）

曲った空間では，共変微分の順序に注意しなくてはならない.共変微分は交換しないのである．このことは高階テンソルについても同じである．たとえば，

$$[\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}] F^{\mu}{}_{\nu} = R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta} F^{\sigma}{}_{\nu} + R^{\sigma}{}_{\nu\alpha\beta} F^{\mu}{}_{\sigma} \qquad (6.78)$$

添字のおのおのにリーマン･テンソルがかかり，それぞれの符号はプラスである．（$\boldsymbol{g}$ を使った添字の上げ下げは，$\nabla \boldsymbol{g} = 0$ だから，∇_{α} の影響は受けないので，すべての項は同じ符号をもたなければならない．）

(1,1)テンソル $F^{\mu}{}_{\nu}$ に共変微分を 2 度施す.

$$\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} F^{\mu}{}_{\nu} = \nabla_{\alpha}(F^{\mu}{}_{\nu;\beta})$$
$$= (F^{\mu}{}_{\nu;\beta})_{,\alpha}$$

(1,1)テンソル $F^{\mu}{}_{\nu}$ の共変微分は,

$$\nabla_{\beta} F^{\mu}{}_{\nu} = F^{\mu}{}_{\nu;\beta} = F^{\mu}{}_{\nu,\beta} + F^{\alpha}{}_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - F^{\mu}{}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} \qquad (5.66)$$

であるので,

$$\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} F^{\mu}{}_{\nu} = \left(F^{\mu}{}_{\nu,\beta} + F^{\sigma}{}_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta} - F^{\mu}{}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta}\right)_{,\alpha}$$
$$= F^{\mu}{}_{\nu,\beta\alpha} + F^{\sigma}{}_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta,\alpha} - F^{\mu}{}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta,\alpha}$$

α と β を入れ換えた式と差をとると,

$$[\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}] F^{\mu}{}_{\nu} \equiv \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} F^{\mu}{}_{\nu} - \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha} F^{\mu}{}_{\nu}$$
$$= F^{\sigma}{}_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta,\alpha} - F^{\mu}{}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta,\alpha} - F^{\sigma}{}_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\alpha,\beta} + F^{\mu}{}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha,\beta}$$

リーマン･テンソルの定義式

◆ $$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu} \qquad (6.63)$$

を適用して，

$$\left[\nabla_{\alpha},\nabla_{\beta}\right]F^{\mu}{}_{\nu} = R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta}F^{\sigma}{}_{\nu} + R^{\sigma}{}_{\nu\alpha\beta}F^{\mu}{}_{\sigma} \qquad (6.78)$$

となる．

公式をまとめる．

$$\left[\nabla_{\alpha},\nabla_{\beta}\right]V^{\mu} = R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}V^{\nu} \qquad (6.77)$$

$$\left[\nabla_{\alpha},\nabla_{\beta}\right]F^{\mu}{}_{\nu} = R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta}F^{\sigma}{}_{\nu} + R^{\sigma}{}_{\nu\alpha\beta}F^{\mu}{}_{\sigma} \qquad (6.78)$$

$$\left[\nabla_{\alpha},\nabla_{\beta}\right]T^{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta}T^{\sigma\nu} + R^{\nu}{}_{\sigma\alpha\beta}T^{\mu\sigma}$$

$$\left[\nabla_{\alpha},\nabla_{\beta}\right]A^{\mu\nu}{}_{\lambda} = R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta}A^{\sigma\nu}{}_{\lambda} + R^{\nu}{}_{\sigma\alpha\beta}A^{\mu\sigma}{}_{\lambda} - R^{\sigma}{}_{\lambda\alpha\beta}A^{\mu\nu}{}_{\sigma}$$

$$\left[\nabla_{\alpha},\nabla_{\beta}\right]F_{\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\nu}$$

上式はメトリックで添字を上げ下げしているのでメトリック空間で成り立つ．

$$\left[\nabla_{\alpha},\nabla_{\beta}\right]F_{\mu} = -R^{\nu}{}_{\mu\alpha\beta}F_{\mu}$$

上式はメトリックを使っていないのでアフィン空間で成り立つ．

＋＋

（6.84）～（6.86）

練習問題 22

必要な計算を行って，式（6.84），（6.85），（6.86）を確かめよ．

点 A と点 A'において平行で互いに接近した（接ベクトル $\vec{V}$ と $\vec{V}'$ をもつ）２つの測地線を考える．測地線のアフィンパラメーターを λ とする．一方の測地線から他方へ達する連結ベクトル $\vec{\xi}$ を定義する．この $\vec{\xi}$ は λ で測って同じ間隔の点どうし（たとえば，A と A'，B と B'のように）を連結するものである．

点 A での局所慣性系をとり，その中で座標 x^0 と測地線の方向が一致しているとする．点 A では $V^{\alpha}=\delta^{\alpha}{}_0$ である．点 A での測地線方程式は，

$$\left.\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2}\right|_A = 0 \qquad (6.79)$$

となる．点 A ではすべてのクリストッフェル記号が消える．クリストッフェル記号は点 A'では消えないので，点 A'での測地線 $\vec{V}'$ の方程式は，点 A'でも $V^{\alpha}=\delta^{\alpha}{}_0$ となるように座標系を選んで，

$$\left.\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2}\right|_{A'} + \Gamma^{\alpha}{}_{00}(A') = 0 \qquad (6.80)$$

A と A'は $\vec{\xi}$ だけしか離れていないので，

$$\Gamma^{\alpha}{}_{00}(A') \cong \Gamma^{\alpha}{}_{00,\beta}\xi^{\beta} \qquad (6.81)$$

が得られる．右辺は点 A で評価する．式（6.80）と式（6.81）から，

$$\left.\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2}\right|_{A'} = -\Gamma^{\alpha}{}_{00,\beta}\xi^{\beta} \qquad (6.82)$$

となる．$x^{\alpha}(\lambda,\text{測地線}\vec{V}') - x^{\alpha}(\lambda,\text{測地線}\vec{V})$ という差はベクトル の成分 ξ^{α} を与える．したがって，点 A で，

$$\frac{d^2\xi^{\alpha}}{d\lambda^2} = \left.\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2}\right|_{A'} - \left.\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2}\right|_{A'} = -\Gamma^{\alpha}{}_{00,\beta}\xi^{\beta} \qquad (6.83)$$

が得られる．座標系は任意なので$\nabla_V \nabla_V \vec{\xi}$を求める．次式を使って，

◆
$$U^{\beta} V^{\alpha}{}_{;\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda}\vec{V} = \nabla_{\vec{U}} \vec{V} = 0 \tag{6.48}$$

$$\nabla_V \nabla_V \xi^{\alpha} = \nabla_V (\nabla_V \xi^{\alpha}) = \frac{d}{d\lambda}(\nabla_V \xi^{\alpha}) + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0}(\nabla_V \xi^{\beta}) \tag{6.84}$$

が得られる．点 A で$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0$を使って，

$$\nabla_V \nabla_V \xi^{\alpha} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\lambda}\xi^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0}\xi^{\beta}\right) + 0 = \frac{d^2}{d\lambda^2}\xi^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0,0}\xi^{\beta} \tag{6.85}$$

が点 A で成り立つ．こうして，

$$\nabla_V \nabla_V \xi^{\alpha} = \left(\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0,0} - \Gamma^{\alpha}{}_{00,\beta}\right)\xi^{\beta} = R^{\alpha}{}_{00\beta}\xi^{\beta} = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta} V^{\mu} V^{\nu} \xi^{\beta} \tag{6.86}$$

が得られる．ここで２辺から３辺を導くには次式を使う．

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu} \tag{6.63}$$

最終的な結果は系に依存せず，したがって，任意の基底で，

◆
$$\nabla_V \nabla_V \xi^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta} V^{\mu} V^{\nu} \xi^{\beta} \tag{6.87}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.67）～（6.89）

練習問題 23

　式（6.88）を証明せよ．［式（6.67）を単に微分するだけでは求まらないことに注意せよ．この式は点 P でのみ成り立ち，その近傍では成り立っていないからである．］

練習問題 24

　式（6.88）から式（6.89）を確かめよ．

（練習問題 23 の解答）

リーマン・テンソルの定義式

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}) \tag{6.67}$$

の添字を下げた式

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\lambda} R^{\lambda}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) \tag{6.68}$$

をx^{λ}で微分すると，

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}) \tag{6.88}$$

が得られる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（練習問題 24 の解答）

添字μ, ν, λを入れ換えた３つの式を用意する．

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}) \tag{6.88a}$$

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu,\beta\lambda\nu} - g_{\alpha\lambda,\beta\mu\nu} + g_{\beta\lambda,\alpha\mu\nu} - g_{\beta\mu,\alpha\lambda\nu}) \tag{6.88b}$$

$$R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\lambda,\beta\nu\mu} - g_{\alpha\nu,\beta\lambda\mu} + g_{\beta\nu,\alpha\lambda\mu} - g_{\beta\lambda,\alpha\nu\mu}) \tag{6.88c}$$

上の 3 つの式の和をとり，メトリックの対称性 $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$，および偏微分は交換可能であることから，

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda}+R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu}+R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu}=0 \qquad (6.89)$$

が得られる．考えている座標系ではこの点で，$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}=0$ だから，

◆ $$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda}+R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu}+R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}=0 \qquad (6.90)$$

と同等である．上式は，ビアンキの恒等式である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.91）

練習問題 25

(a)　リッチ・テンソルだけが，$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ を縮約して得られるもののなかで独立であって，ほかのすべてはリッチ・テンソルの倍数でしかないことを示せ．

(b)　リッチ・テンソルは対称であることを示せ．

(a)　次の３つの既出式を使う．

リーマン・テンソルの定義式

◆ $$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\equiv\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu}-\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu}+\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu}-\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu} \qquad (6.63)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}=-R_{\beta\alpha\mu\nu}=-R_{\alpha\beta\nu\mu}=R_{\mu\nu\alpha\beta} \qquad (6.69)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}+R_{\alpha\nu\beta\mu}+R_{\alpha\mu\nu\beta}=0 \qquad (6.70)$$

リッチ・テンソルの定義式は，（リーマン・テンソルの第 1 添字と第 3 添字の縮約）

◆ $$R_{\alpha\beta}\equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \qquad (6.91)$$

第 1 添字と第 4 添字の縮約は，式（6.69）から，第 1 添字と第 3 添字の縮約の符号反転である．

$$R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}=-R^{\mu}{}_{\alpha\beta\mu}$$

式（6.63）から，リッチ・テンソルの構造は，

$$R^{\tau}{}_{\beta\tau\nu}=\Gamma^{\tau}{}_{\beta\nu,\tau}-\Gamma^{\tau}{}_{\beta\tau,\nu}+\Gamma^{\tau}{}_{\sigma\tau}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu}-\Gamma^{\tau}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\tau}$$

$\beta\to\alpha,\nu\to\beta$ として，

$$R_{\alpha\beta}\equiv R^{\tau}{}_{\alpha\tau\beta}=\Gamma^{\tau}{}_{\alpha\beta,\tau}-\Gamma^{\tau}{}_{\alpha\tau,\beta}+\Gamma^{\tau}{}_{\sigma\tau}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\tau}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\tau}$$

式（6.63）から，第 1 添字と第 2 添字を縮約すると，

$$R^{\tau}{}_{\tau\mu\nu}\equiv\Gamma^{\tau}{}_{\tau\nu,\mu}-\Gamma^{\tau}{}_{\tau\mu,\nu}+\Gamma^{\tau}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\tau\nu}-\Gamma^{\tau}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\tau\mu}=0$$

(b)　式（6.69）から，

$$g^{\mu\alpha}R_{\alpha\beta\mu\nu}=g^{\mu\alpha}R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

$$R^{\mu}{}_{\beta\mu\nu}=R^{\alpha}{}_{\nu\alpha\beta}$$

ダミーを μ に統一して， $\beta \to \alpha, \nu \to \beta$ とすれば，

$$R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} = R^{\mu}{}_{\beta\mu\alpha}$$

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$$

【参考】リッチ・スカラーの定義式は，

◆ $$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} \qquad (6.92)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.94）～（6.99）

練習問題 26

練習問題 17(a)を使って式（6.94）を証明せよ．

練習問題 27

必要な計算を行い，式（6.95），（6.97），（6.99）を確かめよ．

（練習問題 26 の解答）

練習問題 5 と 17 から，

◆ $$g_{\alpha\mu;\beta} = 0 \text{（任意の基底）} \qquad (6.31)$$

であり， $g^{\alpha\mu}$ は $g_{\alpha\beta}$ のみの関数なので，

$$g^{\alpha\beta}{}_{;\mu} = 0 \qquad (6.94)$$

がいえる．

（練習問題 27 の解答）

ビアンキの恒等式

◆ $$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \qquad (6.90)$$

に対して，リッチの縮約を施すと，

$$g^{\alpha\mu}\left[R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}\right] = 0$$

練習問題 26 から， $g^{\alpha\mu}$ は $g_{\beta\nu}$ は自由に共変微分が出し入れができ，添字の上げ下げは共変微分と可換である．

$$R^{\mu}{}_{\beta\mu\nu;\lambda} + R^{\mu}{}_{\beta\lambda\mu;\nu} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0$$

μ と λ の反対称性を使って，

$$R^{\mu}{}_{\beta\mu\nu;\lambda} - R^{\mu}{}_{\beta\mu\lambda;\nu} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0$$

つまり，

$$g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} = -g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\lambda;\nu} - R^{\mu}{}_{\beta\mu\lambda;\nu} = -R_{\beta\lambda;\nu} \qquad (6.95)$$

を使って，

$$R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \tag{6.93}$$

となる．上式は縮約したビアンキの恒等式という．
式（6.93）を β と ν について縮約すると，

$$g^{\beta\nu}\left[R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu}\right] = 0$$

$$R^{\nu}{}_{\nu;\lambda} - R^{\nu}{}_{\lambda;\nu} + R^{\mu\nu}{}_{\nu\lambda;\mu} = 0$$

R の反対称性を使って，また，ダミーを書き換えて，

$$R_{;\lambda} - R^{\nu}{}_{\lambda;\nu} + (-R^{\mu}{}_{\lambda;\mu}) = R_{;\lambda} - 2R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} = 0 \tag{6.96}$$

$R_{;\lambda} = g^{\mu}{}_{\lambda} R_{;\mu}$ から，

$$\left[R^{\mu}{}_{\lambda} - \frac{1}{2} g^{\mu}{}_{\lambda} R\right]_{;\mu} = 0 \tag{6.97}$$

λ を $g^{\lambda\nu}$ で上げて，

$$\left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right]_{;\mu} = 0 \tag{6.97}$$

となる．上式は（２度縮約した）ビアンキの恒等式という． R はスカラーなので，すべての座標系で $R_{;\lambda} \equiv R_{,\lambda}$ である．

対称テンソルを

◆ $$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R = G^{\beta\alpha} \tag{6.98}$$

で定義する．上式をアインシュタイン・テンソルという．これはリーマン・テンソルとメトリックだけでつくられていて，その発散は恒等式から自動的にゼロである．式（6.97）は，

◆ $$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \tag{6.99}$$

となる．　一般相対論でのアインシュタインの場の方程式は，

$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta} \tag{8.10}$$

である．ここで $T^{\alpha\beta}$ はストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）である．
ビアンキの恒等式から，

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \equiv 0 \tag{8.11}$$

であり，これは，エネルギーと運動量の局所的保存の式となる．
＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.19）

練習問題 28

(a)　デカルト座標から球座標への座標変換を使って，式（6.19）を導け．

(b)　式（6.19）から半径 r の球面上のメトリックの成分が，普通の球座標で（$g_{\theta\theta}=r^2,\ g_{\phi\phi}=r^2\sin^2\theta,\ g_{\theta\phi}=0$）となることを導け．

(c)　球に対して成分 $g^{\alpha\beta}$ を求めよ．

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix} \quad (6.19)$$

(a)　座標変換式は，

$x=r\sin\theta\cos\phi$

$y=r\sin\theta\sin\phi$

$z=r\cos\theta$

微分変換式は，

$$\begin{pmatrix}dx\\ dy\\ dz\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta & \partial x/\partial\phi\\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta & \partial y/\partial\phi\\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial\theta & \partial z/\partial\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dr\\ d\theta\\ d\phi\end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$$\begin{pmatrix}dx\\ dy\\ dz\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi dr+r\cos\theta\cos\phi d\theta-r\sin\theta\sin\phi d\phi\\ \sin\theta\cos\phi dr+r\cos\theta\sin\phi d\theta+r\sin\theta\cos\phi d\phi\\ \cos\theta dr-r\sin\theta d\theta\end{pmatrix}$$

線要素は，

$$\begin{pmatrix}dx^2\\ dy^2\\ dz^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin^2\theta\cos^2\phi dr^2+r^2\cos^2\theta\cos^2\phi d\theta^2+r^2\sin^2\theta\sin^2\phi d\phi^2\\ \sin^2\theta\cos^2\phi dr^2+r^2\cos^2\theta\sin^2\phi d\theta^2+r^2\sin^2\theta\cos^2\phi d\phi^2\\ \cos^2\theta dr^2+r^2\sin^2\theta d\theta^2\end{pmatrix}$$

where $drd\theta,\ drd\phi,\ d\theta d\phi$ の係数は和が 0 になるので省略した．

$$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

したがって，メトリックは，次式となる．

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\phi}\\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi}\\ g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix} \quad (6.19)$$

(b)　極座標 (r,θ,ϕ) で，半径 r の２次元球面上の線要素は，

$$dl^2=r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

メトリックは，

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi}\\ g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r^2 & 0\\ 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

(c)　メトリックの逆行列は，

$$\left(g^{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix}g^{\theta\theta} & g^{\theta\phi}\\ g^{\phi\theta} & g^{\phi\phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\end{pmatrix}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.63）

練習問題 29
　極座標で単位球のリーマンの曲率テンソルを計算せよ．メトリックは練習問題 28 に与えられている．［練習問題 18(b)と同じ議論で２次元では独立な成分はただ一つであることに注意せよ．したがって，$R_{\theta\phi\theta\phi}$ を計算し，ほかの成分はそれを使って求めよ．］

練習問題 30
　円柱表面のリーマンの曲率テンソルを計算せよ．（円柱表面は平坦なので，ゼロになるはずである．好みの座標系を使いメトリックを正しく表現したことを確かめよ．）

（練習問題 29 の解答）

◆ $$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \qquad (6.32)$$

を使って，

$$\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} g_{\phi\phi,\theta} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} g_{\phi\phi,\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

◆ $$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu} \qquad (6.63)$$

$$= \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{r\mu}\Gamma^{r}{}_{\beta\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\tau\mu}\Gamma^{\tau}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{r\nu}\Gamma^{r}{}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\tau\nu}\Gamma^{\tau}{}_{\beta\mu}$$

を使って，

$$R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi}$$

$$= \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi,\theta} - \Gamma^{\theta}{}_{\phi\theta,\phi} + \Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} + \Gamma^{\theta}{}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi} - \Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\theta}{}_{\phi\theta} - \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}$$

$$= \sin^2\theta - \cos^2\theta + \cos^2\theta = \sin^2\theta$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（練習問題 30 の解答）

座標変換式は，

$$x = r\cos\phi,$$

$$y = r\sin\phi$$

$$z = z$$

微分変換式は，

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi dr - r\sin\phi d\phi \\ \cos\phi dr + r\cos\phi d\phi \\ dz \end{pmatrix}$$

線要素は，

$$\begin{pmatrix} dx^2 \\ dy^2 \\ dz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\phi dr^2 + r^2\sin^2\phi d\phi^2 - 2r\cos\phi\sin\phi dr d\phi \\ \sin^2\phi dr^2 + r^2\cos^2\phi d\phi^2 + 2r\cos\phi\sin\phi dr d\phi \\ dz^2 \end{pmatrix}$$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$$

したがって，メトリックは，次式となる．

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{rr} & & \bigcirc \\ & g_{\phi\phi} & \\ \bigcirc & & g_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

メトリックの逆行列は，

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} g^{rr} & & \bigcirc \\ & g^{\phi\phi} & \\ \bigcirc & & g^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

クリストッフェル記号の定義式（6.32）を使って，

$$\Gamma^{1}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{11}(g_{1\mu,\nu} + g_{1\nu,\mu} - g_{\mu\nu,1}) = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu,1}$$

$$\Gamma^{1}{}_{22} = -\frac{1}{2} g_{22,1} = -r$$

$$\Gamma^{2}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{22}(g_{2\mu,\nu} + g_{2\nu,\mu} - g_{\mu\nu,2}) = \frac{1}{2r^2}(g_{2\mu,\nu} + g_{2\nu,\mu})$$

$$\Gamma^{2}{}_{12} = \frac{1}{2r^2} g_{22,1} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{3}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{33}(g_{3\mu,\nu} + g_{3\nu,\mu} - g_{\mu\nu,3}) = 0$$

◆ $$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \equiv \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \quad (6.63)$$

$$= \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{r\mu}\Gamma^r{}_{\beta\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\tau\mu}\Gamma^\tau{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{r\nu}\Gamma^r{}_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\tau\nu}\Gamma^\tau{}_{\beta\mu}$$

を使って,

$$R^1{}_{212}$$

$$= \Gamma^1{}_{22,1} - \Gamma^1{}_{21,2} + \Gamma^1{}_{11}\Gamma^1{}_{22} + \Gamma^1{}_{21}\Gamma^2{}_{22} - \Gamma^1{}_{12}\Gamma^1{}_{21} - \Gamma^1{}_{22}\Gamma^2{}_{21}$$

$$= (-r)_{,r} - (-r)\frac{1}{r} = 0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.35）

練習問題 31

共変微分は通常のライプニッツの法則

$$\left(V^{\alpha\beta}W_{\beta\gamma}\right)_{;\mu} = V^{\alpha\beta}{}_{;\mu}W_{\beta\gamma} + V^{\alpha\beta}W_{\beta\gamma;\mu}$$

に従うことを示せ．（ヒント：局所慣性系を使え．）

左辺の括弧内は縮約されて(1,1)テンソルとなる．

(1,1)テンソルの共変微分は,

$$T^\alpha{}_{\gamma;\mu} = T^\alpha{}_{\gamma,\mu} + T^\sigma{}_\gamma\Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} - T^\alpha{}_\sigma\Gamma^\sigma{}_{\gamma\mu} \quad (5.66)$$

左辺は,

$$\left(V^{\alpha\beta}W_{\beta\gamma}\right)_{;\mu} = \left(V^{\alpha\beta}W_{\beta\gamma}\right)_{,\mu} + \left(V^{\sigma\beta}W_{\beta\gamma}\right)\Gamma^\mu{}_{\sigma\mu} - \left(V^{\alpha\beta}W_{\beta\sigma}\right)\Gamma^\sigma{}_{\gamma\mu}$$

(2, 0)テンソルの共変微分は,

$$V^{\alpha\beta}{}_{;\mu} = V^{\alpha\beta}{}_{,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}V^{\sigma\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}V^{\alpha\sigma} \quad (6.35)$$

これを使って,

$$V^{\alpha\beta}{}_{;\mu}W_{\beta\gamma} = V^{\alpha\beta}{}_{,\mu}W_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}V^{\sigma\beta}W_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}V^{\alpha\sigma}W_{\beta\gamma}$$

(0, 2)テンソルの共変微分は,

$$W_{\beta\gamma;\mu} = W_{\beta\gamma,\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu}W_{\sigma\beta} + \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu}W_{\alpha\sigma}$$

これを使って,

$$V^{\alpha\beta}W_{\beta\gamma;\mu} = V^{\alpha\beta}W_{\beta\gamma,\mu} + V^{\alpha\beta}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu}W_{\sigma\beta} + V^{\alpha\beta}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu}W_{\alpha\sigma}$$

右辺は,

$$V^{\alpha\beta}{}_{;\mu}W_{\beta\gamma} + V^{\alpha\beta}W_{\beta\gamma;\mu} = V^{\alpha\beta}{}_{,\mu}W_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}V^{\sigma\beta}W_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}V^{\alpha\sigma}W_{\beta\gamma}$$
$$+ V^{\alpha\beta}W_{\beta\gamma,\mu} + V^{\alpha\beta}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu}W_{\sigma\beta} + V^{\alpha\beta}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu}W_{\alpha\sigma}$$

局所慣性系では，クリストッフェル記号がすべて 0 となり，次式が得られる．

$$\left(V^{\alpha\beta}W_{\beta\gamma}\right)_{,\mu} = V^{\alpha\beta}{}_{,\mu}W_{\beta\gamma} + V^{\alpha\beta}W_{\beta\gamma,\mu}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.32）

> 練習問題 32
>
> 4 次元多様体の座標が (u, v, w, p) であり，メトリックは $g_{uv} = g_{ww} = g_{pp} = 1$，そのほかはゼロである．
>
> (a)　多様体は平坦で，その符号数は+2 であることを示せ．
>
> (b)　(a)の結果は多様体がミンコフスキー時空であることを示している．通常の座標 (ct, x, y, z) への座標変換を求めよ．（ヒントとしては $\vec{e}_v \cdot \vec{e}_v$，$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_u$ を計算してみること．）

(a)　メトリックの成分がすべて定数なので，クリストッフェル定義式

◆ $$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \qquad (6.32)$$

から，すべてのクリストッフェル記号が

$$\Gamma = 0$$

になるので，大域的に平坦な多様体である．また，メトリックの対角成分の和である符号数が+2 であるので，ミンコフスキー時空である．

(b)　3.10 練習問題 34 の類推から，変換行列 (Λ) を次式と仮定する．

$$(\Lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

変換後のメトリックを検証してみると，

$$(g) = (\Lambda)(\eta)(\Lambda)^T \qquad (6.11)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

メトリック (g) が与式であるので変換行列は正しい．(g) が (η) に一致しなかったので，これはローレンツ変換ではない．

変換行列が判っているので，基底変換式は次式となる．

$$(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w, \vec{e}_p) = (\vec{e}_t, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_u = -\frac{1}{2}\vec{e}_t + \frac{1}{2}\vec{e}_x$$

$$\vec{e}_v = \frac{1}{2}\vec{e}_t + \frac{1}{2}\vec{e}_x$$

念のため $\vec{e}_v \cdot \vec{e}_v$，$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_u$ を計算する．

$$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_u = -\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\vec{e}_v \cdot \vec{e}_v = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

座標変換式は次式となる．

$$u = -t + x, \quad v = t + x, \quad w = y, \quad p = z$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 33
　３次元球面は４次元ユークリッド空間（座標が x, y, z, w）の３次元曲面で球の半径を r として，$x^2+y^2+z^2+w^2=r^2$ で与えられる．
　(a)　新しい座標 (r, θ, ϕ, χ) を
$w = r\cos\chi$，$z = r\sin\chi\cos\theta$，$x = r\sin\chi\sin\theta\cos\phi$，$y = r\sin\chi\sin\theta\sin\phi$
で定義する．(θ, ϕ, χ) が球に対する座標であることを示せ．これはおなじみの極座標の拡張である．
　(b)　半径 r の３次元球面のメトリックはこの座標系で，成分が $g_{\chi\chi}=r^2$，$g_{\theta\theta}=r^2\sin^2\chi$，$g_{\phi\phi}=r^2\sin^2\chi\sin^2\theta$，それ以外はゼロとなることを示せ．（練習問題 28 と同様な方法を使え．）

　(a)　想像は難しいが４次元空間からみた３次元球面は面ではなく体積があるものである．

$$x^2+y^2+z^2+w^2$$
$$=r^2\sin^2\chi\sin^2\theta\cos^2\phi+r^2\sin^2\chi\sin^2\theta\sin^2\phi+r^2\sin^2\chi\cos^2\theta+r^2\cos\chi^2$$
$$=r^2$$

χ は w 座標と半径のなす角度，θ は z 座標と半径のなす角度，ϕ は y 座標と半径のなす角度であるである．ϕ は経度に相当し，θ は緯度に相当する．χ には名前が無く仮に超緯度と呼べばよい．ϕ のみが－180 度から+180 度の一周で，θ と χ は 0 度から 180 度の半周を指定する．
　(b)　線要素は,

$$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2+dw^2$$
$$=dr^2+r^2d\chi^2+r^2\sin^2\chi d\theta^2+r^2\sin^2\chi\sin^2\theta d\phi^2$$

４次元空間の３次元球面のメトリックを問われているので，上式の dr^2 は厳密には不要である．
メトリックの成分は,

$$g_{\chi\chi}=r^2,\quad g_{\theta\theta}=r^2\sin^2\chi,\quad g_{\phi\phi}=r^2\sin^2\chi\sin^2\theta,$$
$$g_{\alpha\beta}=0,\ \text{when}\ \alpha\neq\beta$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.31）～（6.40）

練習問題 34

一般の座標系で一般のテンソルについて次の等式を証明せよ．

(a)　$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\ln|g|\right)_{,\nu}$

(b)　$g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = -\left(g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\right)_{,\beta}/\sqrt{-g}$

(c)　反対称テンソル $F^{\mu\nu}$ に対し，$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right)_{,\nu}/\sqrt{-g}$

(d)　$g^{\alpha\beta}g_{\beta\mu,\nu} = -g^{\alpha\beta}{}_{,\nu}g_{\beta\mu}$（ヒント：$g^{\alpha\beta}g_{\beta\mu}$ は何を表すか？）

(e)　$g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = -\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}g^{\beta\nu} - \Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha}g^{\mu\beta}$［ヒント：式（6.31）を使え．］

(a)　練習問題 5 から, 曲ったリーマン空間の任意の座標系で $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$ となるから，練習問題 8 の式（6.40）を導出する過程は正しい．第 3 式が問題(a)の解である（添字は元のまま）．

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu} \tag{6.38}$$

$$= \frac{1}{2}Tr\left((g_{\alpha\beta})^{-1}\frac{\partial(g_{\alpha\beta})}{\partial x^{\mu}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\ln|g|)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\ln|g|^{\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\ln\sqrt{|g|}\,)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\sqrt{-g} \tag{6.40}$$

(b)　クリストッフェル記号の定義式

◆　$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \tag{6.32}$$

を使って,

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$$

$$= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g_{\beta\mu,\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g_{\beta\nu,\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu,\beta}$$

$$= g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g_{\beta\mu,\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu,\beta}$$

第 1 項$= g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g_{\beta\mu,\nu} = g^{\mu\nu}g^{\alpha}{}_{\mu,\nu} = g^{\alpha\nu}{}_{,\nu} = g^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$

問題(a)の式（6.40）を使って，

第 2 項$= -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\beta} = -g^{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\right)_{,\beta}$

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - g^{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\right)_{,\beta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(g^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\sqrt{-g}\right) - \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(g^{\alpha\beta}\left(\sqrt{-g}\right)_{,\beta}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\right)_{,\beta}$$

(c)　(2, 0)テンソルの共変微分の定義式

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = T^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}T^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\mu\gamma}T^{\alpha\mu} \tag{6.35}$$

を使って，

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = F^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu}F^{\sigma\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\sigma\nu}F^{\mu\sigma}$$

第 2 項は反対称性からゼロであり，第 3 項のダミーを書き換えて，

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = F^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\alpha}F^{\mu\nu}$$

問題(a)の式（6.40）を使って，

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = F^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\right)_{,\beta}F^{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}{}_{,\nu}\right) - \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\left(\sqrt{-g}\right)_{,\beta}F^{\mu\nu}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right)_{,\nu}$$

(d)　$g^{\alpha\beta}$ は $g_{\alpha\beta}$ の逆行列だから

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\mu} = \delta^{\alpha}{}_{\mu} = diag(1,1,1,1)$$

したがって，

$$\left(g^{\alpha\beta} g_{\beta\mu}\right)_{,\nu} = g^{\alpha\beta} g_{\beta\mu,\nu} + g^{\alpha\beta}{}_{,\nu} g_{\beta\mu} = 0$$

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\mu,\nu} = -g^{\alpha\beta}{}_{,\nu} g_{\beta\mu}$$

(e)　(2, 0)テンソルの共変微分の定義式

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = T^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma} T^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\mu\gamma} T^{\alpha\mu} \qquad (6.35)$$

と

◆　$g_{\alpha\mu;\beta} = 0$（任意の基底）　(6.31)

から，添字を書き換えて，

$$g^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} g^{\beta\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha} g^{\mu\beta} = 0$$

$$g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = -\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} g^{\beta\nu} - \Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha} g^{\mu\beta}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.63）

練習問題 35

線要素が $ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$ である多様体について，$R_{\alpha\beta\mu\nu}$ の 20 個の独立な成分を計算せよ．ここで，Φ と Λ は座標 r のみの任意関数である．（最初に，座標と成分 $g_{\alpha\beta}$ を確認し，$g^{\alpha\beta}$ とクリストッフェル記号を計算する．次に計算しようとする $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ の 20 個を成分の添字を決め，それを計算する．それらの 20 個を使って，残りの 236 個は求められることを思い出そう．）

メトリックとその逆行列は，

$$\left(g_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} g_{tt} & & & \ddots \\ & g_{rr} & & \\ & & g_{\theta\theta} & \\ \ddots & & & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2\Phi} & & & \bigcirc \\ & e^{2\Lambda} & & \\ & & r^2 & \\ \bigcirc & & & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\left(g^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} g^{tt} & & & \ddots \\ & g^{rr} & & \\ & & g^{\theta\theta} & \\ \ddots & & & g^{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{e^{2\Phi}} & & & \bigcirc \\ & \dfrac{1}{e^{2\Lambda}} & & \\ & & \dfrac{1}{r^2} & \\ \bigcirc & & & \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

クリストッフェル記号の定義式

◆　$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}\right)$　(6.32)

を使って，

$$\Gamma^{t}{}_{tr} = \frac{1}{2} g^{tt}\left(g_{tt,r} + g_{tr,t} - g_{tr,t}\right) = \frac{1}{2} e^{-2\Phi} \frac{d}{dr} e^{2\Phi} = \frac{d}{dr}\Phi$$

$$\Gamma^{r}{}_{tt} = \frac{1}{2} g^{rr}\left(g_{r\mu t,t} + g_{rt,t} - g_{tt,r}\right) = \frac{1}{2} e^{-2\Lambda} \frac{d}{dr} e^{2\Phi} = \exp(2\Phi - 2\Lambda)\frac{d}{dr}\Phi$$

$$\Gamma^{r}{}_{rr} = \frac{1}{2} g^{rr}\left(g_{rr,r} + g_{rr,r} - g_{rr,r}\right) = \frac{1}{2} e^{-2\Lambda} \frac{d}{dr} e^{2\Lambda} = \frac{d}{dr}\Lambda$$

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{rr}\left(g_{r\theta,\theta} + g_{r\theta,\theta} - g_{\theta\theta,r}\right) = \frac{1}{2} e^{-2\Lambda} \frac{d}{dr} r^2 = r\exp(-2\Lambda)$$

$$\Gamma^r{}_{\phi\phi} = \frac{1}{2} g^{rr}\left(g_{r\phi,\phi} + g_{r\phi,\phi} - g_{\phi\phi,r}\right) = \frac{1}{2} e^{-2\Lambda} \frac{d}{dr} r^2 \sin^2\theta$$

$$= r\sin^2\theta\exp(-2\Lambda)$$

$$\Gamma^\theta{}_{r\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta}\left(g_{\theta r,\theta} + g_{\theta\theta,r} - g_{r\theta,\theta}\right) = \frac{1}{2} r^{-2} \frac{d}{dr} r^2 = r^{-1}$$

$$\Gamma^\phi{}_{r\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi}\left(g_{\phi r,\phi} + g_{\phi\phi,r} - g_{r\phi,\phi}\right) = \frac{1}{2} r^{-2}\sin^{-2}\theta \frac{d}{dr}\left(r^2\sin^2\theta\right) = r^{-1}$$

$$\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta}\left(g_{\theta\phi,\phi} + g_{\theta\phi,\phi} - g_{\phi\phi,\theta}\right) = -\frac{1}{2} r^{-2} \frac{d}{d\theta}\left(r^2\sin^2\theta\right) = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi}\left(g_{\phi\theta,\phi} + g_{\phi\phi,\theta} - g_{\theta\phi,\phi}\right) = \frac{1}{2} r^{-2}\sin^{-2}\theta \frac{d}{d\theta}\left(r^2\sin^2\theta\right) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

リーマン・テンソルの定義式

◆ $$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \equiv \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \qquad (6.63)$$

を使って,

$$R^t{}_{rtr} = \Gamma^t{}_{rr,t} - \Gamma^t{}_{rt,r} + \Gamma^t{}_{\sigma t}\Gamma^\sigma{}_{rr} - \Gamma^t{}_{\sigma r}\Gamma^\sigma{}_{rt}$$

$$= -\Gamma^t{}_{rt,r} + \Gamma^t{}_{rt}\Gamma^r{}_{rr} - \Gamma^t{}_{tr}\Gamma^t{}_{rt} = -\frac{d^2}{dr^2}\Phi + \frac{d}{dr}\Phi\frac{d}{dr}\Lambda + \left(\frac{d}{dr}\Phi\right)^2$$

$$R_{trtr} = g_{tt}R^t{}_{rtr} = \exp(2\Phi)\left(\frac{d^2}{dr^2}\Phi - \frac{d}{dr}\Phi\frac{d}{dr}\Lambda - \left(\frac{d}{dr}\Phi\right)^2\right)$$

$$R^t{}_{\theta t\theta} = \Gamma^t{}_{\theta\theta,t} - \Gamma^t{}_{\theta t,\theta} + \Gamma^t{}_{\sigma t}\Gamma^\sigma{}_{\theta\theta} - \Gamma^t{}_{\sigma\theta}\Gamma^\sigma{}_{\theta t} = \Gamma^t{}_{rt}\Gamma^r{}_{\theta\theta}$$

$$= r\exp(-2\Lambda)\frac{d}{dr}\Phi$$

$$R_{t\theta t\theta} = g_{tt}R^t{}_{\theta t\theta} = -r\exp(2\Phi - 2\Lambda)\frac{d}{dr}\Phi$$

$$R^t{}_{\phi t\phi} = \Gamma^t{}_{\phi\phi,t} - \Gamma^t{}_{\phi t,\phi} + \Gamma^t{}_{\sigma t}\Gamma^\sigma{}_{\phi\phi} - \Gamma^t{}_{\sigma\phi}\Gamma^\sigma{}_{\phi t} = \Gamma^t{}_{rt}\Gamma^r{}_{\phi\phi}$$

$$= r\sin^2\theta\exp(-2\Lambda)\frac{d}{dr}\Phi$$

$$R_{t\phi t\phi} = g_{tt}R^t{}_{\phi t\phi} = -r\sin^2\theta\exp(2\Phi - 2\Lambda)\frac{d}{dr}\Phi$$

$$R^r{}_{\theta r\theta} = \Gamma^r{}_{\theta\theta,r} - \Gamma^r{}_{\theta r,\theta} + \Gamma^r{}_{\sigma r}\Gamma^\sigma{}_{\theta\theta} - \Gamma^r{}_{\sigma\theta}\Gamma^\sigma{}_{\theta r}$$

$$= \Gamma^r{}_{\theta\theta,r} + \Gamma^r{}_{rr}\Gamma^r{}_{\theta\theta} - \Gamma^r{}_{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta r}$$

$$= \frac{d}{dr}\left(r\exp(-2\Lambda)\right) + r\exp(-2\Lambda)\frac{d}{dr}\Lambda - r\exp(-2\Lambda)\frac{1}{r}$$

$$= r\exp(-2\Lambda)\frac{d}{dr}\Lambda$$

$$R_{r\theta r\theta} = g_{rr}R^r{}_{\theta r\theta} = r\exp(2\Lambda)\exp(-2\Lambda)\frac{d}{dr}\Lambda = r\frac{d}{dr}\Lambda$$

$$R^r{}_{\phi r\phi} = \Gamma^r{}_{\phi\phi,r} - \Gamma^r{}_{\phi r,\phi} + \Gamma^r{}_{\sigma r}\Gamma^\sigma{}_{\phi\phi} - \Gamma^r{}_{\sigma\phi}\Gamma^\sigma{}_{\phi r}$$

$$= \Gamma^r{}_{\phi\phi,r} - \Gamma^r{}_{\phi\phi}\Gamma^\phi{}_{\phi r} = \frac{d}{dr}\left(r\sin^2\theta\exp(-2\Lambda)\right) - r\sin^2\theta\exp(-2\Lambda)\frac{1}{r}$$

$$= \sin^2\theta\exp(-2\Lambda) - 2r\sin^2\theta\exp(-2\Lambda)\frac{d}{dr}\Lambda - \sin^2\theta\exp(-2\Lambda)$$

$$R_{r\phi r\phi} = g_{rr}R^r{}_{\phi r\phi} = \exp(2\Lambda)\left(-2r\sin^2\theta\exp(-2\Lambda)\frac{d}{dr}\Lambda\right)$$

$$= -2r\sin^2\theta\frac{d}{dr}\Lambda$$

$$R^\theta{}_{\phi\theta\phi} = \Gamma^\theta{}_{\phi\phi,\theta} - \Gamma^\theta{}_{\phi\theta,\phi} + \Gamma^\theta{}_{\sigma\theta}\Gamma^\sigma{}_{\phi\phi} - \Gamma^\theta{}_{\sigma\phi}\Gamma^\sigma{}_{\phi\theta}$$

$$= \Gamma^\theta{}_{\phi\phi,\theta} - \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}\Gamma^\phi{}_{\phi\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\cos\theta\right) - \sin\theta\cos\theta\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta = -\sin^2\theta$$

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = g_{\theta\theta}R^\theta{}_{\phi\theta\phi} = -r^2\sin^2\theta$$

$$R_{trt\theta} = R_{trt\phi} = R_{trr\theta} = R_{trr\phi} = 0$$

$$R_{t\theta t\phi} = R_{t\theta r\theta} = R_{t\theta r\phi} = R_{t\theta\theta\phi} = 0$$

$$R_{t\phi r\theta} = R_{t\phi r\phi} = R_{t\theta r\phi} = R_{t\phi\theta\phi} = 0$$

$$R_{r\theta r\phi} = R_{r\theta\theta\phi} = 0$$

$$R_{r\phi\theta\phi} = 0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（7.8）（8.50）

練習問題 36

4 次元多様体の座標が(ct, x, y, z)であり，その線要素が

$$ds^2 = -(1+2\phi/c^2)c^2dt^2 + (1-2\phi/c^2)(dx^2+dy^2+dz^2) \quad (7.8)\quad (8.50)$$

で，あらゆる場所で$|\phi(ct, x, y, z)| << 1$が満たされている．座標が(ct_0, x_0, y_0, z_0)である任意の点 P において，ϕの 1 次まで局所慣性系となる座標変換を見出せ．その系は元の系に対してϕの 1 次までを考えると，どんな割合で加速度運動をしているか？

7 章，8 章で議論する．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.18）

練習問題 37

(a)　２次元多様体の“固有体積”をふつう“固有面積”という．練習問題 28 のメトリックを使って，式（6.18）を積分して半径rの球の固有面積を求めよ．

(b)　練習問題 33 の３次元球面についても同様な計算をせよ．

$$dx^0dx^1dx^2dx^3 = \left[-\det(g_{\alpha'\beta'})\right]^{1/2} dx^{0'}dx^{1'}dx^{2'}dx^{3'}$$

$$= (-g)^{1/2} dx^{0'}dx^{1'}dx^{2'}dx^{3'} \qquad (6.18)$$

(a)　練習問題 28 のメトリックは，

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

メトリックのトレースは，

$$g = r^4 \sin^2\theta$$

$$g^{1/2} = r^2 \sin\theta$$

積分は，

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cdot g^{1/2} = r^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= r^2 [-\cos\theta]_0^\pi 2\pi = 4\pi r^2$$

(b)　練習問題 33 の３次元球面のメトリックの成分は，

$$g_{\chi\chi} = r^2,\quad g_{\theta\theta} = r^2\sin^2\chi,\quad g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\chi\sin^2\theta,$$

$$g_{\alpha\beta} = 0, \textit{ when } \alpha \neq \beta$$

メトリックのトレースは，

$$g = r^6 \sin^4\chi \sin^2\theta$$

$$g^{1/2} = r^3 \sin^2\chi \sin\theta$$

積分範囲は，練習問題 33 の結果を使って，

$$\int_0^{\pi} d\chi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cdot g^{1/2} = r^3 \int_0^{\pi} \sin^2 \chi d\chi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= r^3 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin \chi \right]_0^{\pi} [-\cos\theta]_0^{\pi} 2\pi = 2\pi^2 r^3$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.8）

練習問題 38

式（6.8）を積分して，半径 r の球面上で θ 一定の円周の長さを求めよ．

$$l = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left| \vec{V} \cdot \vec{V} \right|^{\frac{1}{2}} d\lambda \qquad (6.8)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（6.100）～（6.104）

練習問題 39

(a)　任意の二つのベクトル場$\vec{U}$と$\vec{V}$に対し，そのリー括弧を成分が

$$[\vec{U},\vec{V}]^\alpha = U^\beta \nabla_\beta V^\alpha - V^\beta \nabla_\beta V^\alpha \tag{6.100}$$

であるベクトル場$[\vec{U},\vec{V}]$で定義する．このとき，

$$[\vec{U},\vec{V}] = -[\vec{V},\vec{U}]$$

$$[\vec{U},\vec{V}]^\alpha = U^\beta \partial V^\alpha / \partial x^\beta - V^\beta \partial U^\alpha / \partial x^\beta \tag{6.100b}$$

を示せ．これは偏微分にクリストッフェル記号が伴わないひとつのテンソル場である．

(b)　$[\vec{U},\vec{V}]$は$\vec{U}$に沿っての$\vec{V}$に対する微分作用素，つまり任意のスカラーに対して，

$$[\vec{U},\ f\vec{V}] = f[\vec{U},\vec{V}] + \vec{V}(\vec{U}\cdot\nabla f) \tag{6.101}$$

であることを示せ．これをときに$\vec{U}$に関してのリー微分といい，

$$[\vec{U},\vec{V}] \equiv L_{\vec{U}}\vec{V},\quad \vec{U}\cdot\nabla f \equiv L_{\vec{U}} f \tag{6.102}$$

のように表現する．このとき，式（6.101）は微分作用素$L_{\vec{U}}$に対する通常のライプニッツの規則を使って，

$$L_{\vec{U}}(f\vec{V}) = fL_{\vec{U}}\vec{V} + \vec{V}L_{\vec{U}} f \tag{6.103}$$

と表される．(a)の結果はこの微分作用素が接続やメトリックなしで定義でき，したがって，より基本的であることを示している．基本的なことについてはSchutz(1980b)をみよ．

(c)　1形式場$\tilde{\omega}$のリー微分の成分を計算せよ．このとき，任意のベクトル場$\vec{V}$に対し$\tilde{\omega}(\vec{V})$が上記のfのようにスカラーであること，および定義から$L_{\vec{U}}\tilde{\omega}$が1形式場であること，つまり

$$L_{\vec{U}}[\tilde{\omega}(\vec{V})] = (L_{\vec{U}}\tilde{\omega})(\vec{V}) + \tilde{\omega}(L_{\vec{U}}\vec{V}) \tag{6.104}$$

ということを使用する．この式は，式（6.103）と同様のものである．

【ポイント】リー微分とリー括弧は同じものであり，反対称である．座標によらない式と座標による成分式を区別してほしい．リー微分作用素$L_{\vec{U}}$の$\vec{U}$は接ベクトルであり，リー微分は曲線に沿っての微分である．共変微分とまったく関係ないことに注意．

(a)　ベクトルベクトル場$\vec{U}$と$\vec{V}$を次式とする．

$$\vec{U} = \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = U^\alpha \vec{e}_\alpha$$

$$\vec{V} = \frac{d}{d\mu} = \frac{dx^\beta}{d\mu}\frac{\partial}{\partial x^\beta} = U^\beta \vec{e}_\beta$$

リー括弧を定義する．

$$L_{\vec{U}}\vec{V} = [\vec{U},\vec{V}] = \left[\frac{d}{d\lambda},\frac{d}{d\mu}\right] = \frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu} - \frac{d}{d\mu}\frac{d}{d\lambda}$$

$$= U^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(V^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) - V^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(U^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$$

$$= U^\alpha V^\beta \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) + U^\alpha \frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta} - V^\beta \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

(( )内は可換だからゼロである．ダミー添字を書き換えて，)

$$= \left(U^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} - V^\beta \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(U^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} - V^\beta \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\vec{e}_\alpha$$

リー括弧の成分は，

◆ $$(L_{\vec{U}}\vec{V})^\alpha = [\vec{U},\vec{V}]^\alpha = U^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} - V^\beta \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} \tag{6.100b}$$

定義から当然，

$$[\vec{U},\vec{V}] = -[\vec{V},\vec{U}]$$

(b)　$$[\vec{U},\ f\vec{V}]^\alpha = U^\beta \frac{\partial(fV^\alpha)}{\partial x^\beta} - fV^\beta \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}$$

$$= U^\beta f \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + U^\beta V^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\beta} - fV^\beta \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}$$

$$= f\left(U^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} - V^\beta \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}\right) + U^\beta V^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\beta}$$

$$= f\left[\vec{U},\vec{V}\right]+\vec{V}\left(\vec{U}\cdot\nabla f\right)$$

(c)　ライプニッツの規則から次式が得られる．

$$L_{\vec{U}}\left[\tilde{\omega}\left(\vec{V}\right)\right]=\left(L_{\vec{U}}\tilde{\omega}\right)\left(\vec{V}\right)+\tilde{\omega}\left(L_{\vec{U}}\vec{V}\right) \qquad (6.104)$$

$\tilde{\omega}\left(\vec{V}\right)$はスカラーだから，

$$左辺=L_{\vec{U}}\left[\tilde{\omega}\left(\vec{V}\right)\right]=U^{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\omega_{\alpha}\vec{V}^{\alpha}\right)=U^{\beta}\frac{\partial\omega_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\vec{V}^{\alpha}+U^{\beta}\omega_{\alpha}\frac{\partial\vec{V}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$$

$$右辺=\left(L_{\vec{U}}\tilde{\omega}\right)_{\alpha}V^{\alpha}+\omega_{\alpha}\left(L_{\vec{U}}\vec{V}\right)^{\alpha}$$

（式（6.100b）を使って，）

$$=\left(L_{\vec{U}}\tilde{\omega}\right)_{\alpha}V^{\alpha}+\omega_{\alpha}\left(U^{\beta}\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}-V^{\beta}\frac{\partial U^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)$$

したがって，

$$U^{\beta}\frac{\partial\omega_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\vec{V}^{\alpha}+U^{\beta}\omega_{\alpha}\frac{\partial\vec{V}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}=\left(L_{\vec{U}}\tilde{\omega}\right)_{\alpha}V^{\alpha}+\omega_{\alpha}\left(U^{\beta}\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}-V^{\beta}\frac{\partial U^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)$$

$$\left(L_{\vec{U}}\tilde{\omega}\right)_{\alpha}V^{\alpha}=U^{\beta}\frac{\partial\omega_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\vec{V}^{\alpha}+\omega_{\alpha}V^{\beta}\frac{\partial U^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$$

ダミー添字を書き換えて，V^{α}で除して，

◆ $$\left(L_{\vec{U}}\tilde{\omega}\right)_{\alpha}=\left[\vec{U},\tilde{\omega}\right]_{\alpha}=U^{\beta}\frac{\partial\omega_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\omega_{\beta}\frac{\partial U^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \qquad (6.105)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

7　曲がった時空での物理

アインシュタイン・テンソル，重力ポテンシャル，測地線方程式，キリング方程式

7.1　微分幾何から重力へ　　（7.1）～（7.7）

特殊相対論での粒子の保存則

$$\left(nU^{\alpha}\right)_{,\alpha}=0 \qquad (7.1)$$

ここで，n は瞬時的共同座標系（MCR 系）での粒子密度であり，U^{α} は流体要素の 4 元速度である．上式は局所慣性系での粒子の保存則である．

上式を強い等価原理によって曲った時空へ一般化すると，

$$\left(nU^{\alpha}\right)_{;\alpha}=0 \qquad (7.2)$$

問題にあるように，粒子の生成，消滅がある場合は，

$$\left(nU^{\alpha}\right)_{;\alpha}=R \qquad (7.3)$$

R はリッチ・スカラーで次式で与えられる．

◆ $$R\equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} \qquad (6.92)$$

平坦な時空では，リーマン・テンソルは消えるから，式（7.3）は式（7.1）に帰着する．

練習問題 1　　（7.1）～（7.3）

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0 \qquad (7.6)$$

$$T^{\mu\nu}=(\rho+p/c^2)U^{\mu}U^{\nu}+pg^{\mu\nu} \qquad (7.7)$$

◆ $$ds^2=-\left(1+2\phi/c^2\right)c^2dt^2+\left(1-2\phi/c^2\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) \qquad (7.8)$$

練習問題 5　　（7.38）～（7.40）

7.2　少し曲った時空での物理　　（7.8）～（7.24）

弱い重力場に対して，通常のニュートン・ポテンシャル ϕ が完全にメトリックを決め，次の形をとる．

◆ $$ds^2=-\left(1+2\phi/c^2\right)c^2dt^2+\left(1-2\phi/c^2\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) \qquad (7.8)$$

where　$\phi=-GM/r$，$|m\phi|<<mc^2$，$|\phi|/c^2<<1$，ϕ は c^2 と同次元

自由落下粒子の運動を計算する．その 4 元速度を $\vec{U}$，4 元運動量を $\vec{p}$ とする．静止質量ゼロ以外のすべての粒子に対して，$\vec{p}=m\vec{U}$，$\vec{U}=d\vec{x}/d\tau$ である．粒子の経路は測地線であり，固有時間 τ はアフィンパラメータなので，$\vec{U}$ は測地線方程式を満たす．（$\vec{U}$ は接ベクトルである．）

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{U}=0 \qquad (7.9)$$

τ の代わりに τ/m を用いる．これもアフィンパラメータである．

$$d\vec{x}/d(\tau/m)=md\vec{x}/d\tau=\vec{p}$$

も測地線方程式を満たす．

$$\nabla_{\vec{p}}\vec{p}=0 \qquad (7.10)$$

光子は $m=0$ で $\vec{U}$ は存在しないが，きちんと定義できる $\vec{p}$ をもつから，この方程式は光子でも成り立つ．もし粒子が式（7.8）の座標で非相対論的な速度をもつなら，式（7.10）に対する近似的な式を見つけることができる．

練習問題 6 から式（7.10）は，

$$\left(\nabla_{\vec{p}}\vec{p}\right)^{\alpha}=p^{\beta}p^{\alpha}{}_{;\beta}=p^{\beta}p^{\alpha}{}_{,\beta}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}p^{\mu}p^{\beta}=0 \qquad (7.11')$$

この方程式の第 0 成分は，

$$p^{\alpha}p^{0}{}_{,\alpha}+\Gamma^{0}{}_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta}=0 \qquad (7.11)$$

粒子の速度は非相対論的で $p^0>>p^i$，$p^{\alpha}\partial_{\alpha}=mU^{\alpha}\partial_{\alpha}=md/d\tau$ だから，

$$m\frac{d}{d\tau}p^0+\Gamma^{0}{}_{00}\left(p^0\right)^2=0 \quad （次元は \mathrm{M}^2\cdot\mathrm{Accel}=\mathrm{M}\cdot\mathrm{Force}） \qquad (7.12)$$

$$\Gamma^{0}{}_{00}=\frac{1}{2}g^{0\alpha}\left(g_{\alpha0,0}+g_{\alpha0,0}-g_{00,\alpha}\right) \quad （次元は \mathrm{L}^{-1}） \qquad (7.13)$$

$\left[g_{\alpha\beta}\right]$ は対角的だから，$\left[g^{\alpha\beta}\right]$ も対角的でその要素は $\left[g_{\alpha\beta}\right]$ の対応する要素の逆

数である．したがって，$g^{0\alpha}$ は $\alpha=0$ の場合のみゼロでなく，

$$\Gamma^0{}_{00}=\frac{1}{2}g^{00}g_{00,0}=\frac{1}{2}\frac{1}{-(1+2\phi/c^2)}(-2\phi/c^2)_{,0}$$

$$=\phi_{,0}/c^2+\mathrm{O}\left(\phi^2/c^2\right) \qquad (7.14)$$

式（7.12）から，$p^0=mc$ と置き換えて，

$$m\frac{d}{d\tau}p^0=-\frac{\partial\phi/c^2}{c\partial\tau}m^2c^2$$

$$\frac{d}{d\tau}p^0=-m\frac{\partial\phi}{c\partial\tau} \qquad （次元は\mathrm{M}\cdot\mathrm{Accel}=\mathrm{Force}） \quad (7.15)$$

cp^0 はこの系での粒子のエネルギーだから，これは重力場が時間によらなければエネルギーは保存されることを意味する．cp^0 はこの系でのみ粒子のエネルギーになる．

測地線方程式の空間成分は，ニュートンの法則 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=d\boldsymbol{p}/dt$ に対応する．

$$p^\alpha p^i{}_{,\alpha}+\Gamma^i{}_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta=0 \qquad (7.16)$$

速度の最低次のオーダーで，$p^0>>p^i$ を使って，

$$m\frac{dp^i}{d\tau}+\Gamma^i{}_{00}\left(p^0\right)^2=0 \qquad （次元は\mathrm{M}^2\cdot\mathrm{Accel}） \quad (7.17)$$

$p^0=mc$ と置き換えて，

$$\frac{dp^i}{d\tau}=-mc^2\Gamma^i{}_{00} \qquad （次元は\mathrm{M}\cdot\mathrm{Accel}=\mathrm{Force}） \quad (7.18)$$

$$\Gamma^i{}_{00}=\frac{1}{2}g^{i\alpha}\left(g_{\alpha0,0}+g_{\alpha0,0}-g_{00,\alpha}\right) \qquad (7.19)$$

$\left[g^{\alpha\beta}\right]$ は対角的だから

$$g^{i\alpha}=\left(1-2\phi/c^2\right)^{-1}\delta^{i\alpha} \qquad (7.20)$$

$$\Gamma^i{}_{00}=\frac{1}{2}\left(1-2\phi/c^2\right)^{-1}\delta^{ij}\left(2g_{j0,0}-g_{00,j}\right) \qquad (7.21)$$

ここで，$\delta^{i\alpha}$ はゼロだから α を j に変えた．$g_{j0}=0$ であることから，

$$\Gamma^i{}_{00}=-\frac{1}{2}g_{00,j}\delta^{ij}+\mathrm{O}\left(\phi^2/c^2\right) \qquad (7.22)$$

$$\Gamma^i{}_{00}=-\frac{1}{2}\left(-2\phi/c^2\right)_{,j}\delta^{ij} \qquad (7.23)$$

これから式（7.17）の運動方程式は（7.18）から次のようになる．

$$\frac{dp^i}{d\tau}=-m\phi_{,j}\delta^{ij} \qquad （次元は\mathrm{M}\cdot\mathrm{Accel}=\mathrm{Force}） \quad (7.24)$$

重力場の力は $-m\nabla\phi$ だから，これはニュートン理論の通常の方程式である．

エネルギー保存の方程式と運動方程式の両方が，メトリックがほとんどミンコフスキー・メトリックである（$|\phi|/c^2<<1$）ことと粒子の速度が非相対論である（$p^0>>p^i$）ことの２つの仮定の下に導かれた．

（7.8）（7.15）（7.24）

練習問題 2　　（7.8）〜（7.24）

練習問題 3　　（7.8）〜（7.24）

練習問題 4　　（7.8）〜（7.24）

7.4　保存量　　（7.25）～（7.37）

一般的には，運動量 $\vec{p}$ の成分が粒子の軌跡に沿って一定であるような座標系は存在しないが，例外がある．

練習問題 6　　（7.10）～（7.25）

$$m\frac{dp_\beta}{d\tau}=\Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}p^\alpha p_\gamma \tag{7.26}$$

右辺は，

$$\begin{aligned}\Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}p^\alpha p_\gamma&=\frac{1}{2}g^{\gamma\nu}\left(g_{\nu\beta,\alpha}+g_{\nu\alpha,\beta}-g_{\alpha\beta,\nu}\right)p^\alpha p_\gamma\\&=\frac{1}{2}\left(g_{\nu\beta,\alpha}+g_{\nu\alpha,\beta}-g_{\alpha\beta,\nu}\right)g^{\gamma\nu}p_\gamma p^\alpha\\&=\frac{1}{2}\left(g_{\nu\beta,\alpha}+g_{\nu\alpha,\beta}-g_{\alpha\beta,\nu}\right)p^\nu p^\alpha\end{aligned} \tag{7.27}$$

$p^\nu p^\alpha$ は ν と α に関して対称であり，

$$\Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}p^\alpha p_\gamma=\frac{1}{2}g_{\nu\alpha,\beta}p^\nu p^\alpha \tag{7.28}$$

測地線方程式は一般的に

◆　$$m\frac{dp_\beta}{d\tau}=\frac{1}{2}g_{\nu\alpha,\beta}p^\nu p^\alpha$$　（次元は $\mathrm{M}^2\cdot\mathrm{Accel}=\mathrm{M}\cdot\mathrm{Force}$）（7.29）

もし $g_{\alpha\nu}$ のすべての成分がある固定された β に対して x^β によらないならば，p_β は粒子のどんな軌跡にそっても一定となる．

仮に，定常的な重力場があるとすると，メトリックの成分が時間によらない座標系を見つけることができ，p_0 が保存する．実際は，ほとんどの自由落下局所慣性系で時間に依存したメトリック成分をもつ．自由落下粒子はその位置つまり時間とともに変わっていく重力場を見るからである．

メトリック成分が定常的な系は特別であり，通常，地上の実験室である．この系では粒子の重力ポテンシャルエネルギーを含んでいる．

◆　$$ds^2=-\left(1+2\phi/c^2\right)c^2dt^2+\left(1-2\phi/c^2\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) \tag{7.8}$$

のメトリックを用いて，

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{p}&=-m^2c^2=g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta\\&=-\left(1+2\phi/c^2\right)\left(p^0\right)^2+\left(1-2\phi/c^2\right)\left[\left(p^x\right)^2+\left(p^y\right)^2+\left(p^z\right)^2\right]\end{aligned} \tag{7.30}$$

$\boldsymbol{p}^2\equiv\left(p^x\right)^2+\left(p^y\right)^2+\left(p^z\right)^2$ と書いて，

$$\left(p^0\right)^2=\left[m^2c^2+\left(1-2\phi/c^2\right)\left(\boldsymbol{p}^2\right)\right]\left(1+2\phi/c^2\right)^{-1} \tag{7.31}$$

$|\phi|/c^2<<1$，$|\boldsymbol{p}|<<mc$ の近似を続けると，

$$\left(p^0\right)^2\approx m^2c^2\left(1-2\phi/c^2+\boldsymbol{p}^2/m^2c^2\right) \tag{7.32a}$$

$$p^0\approx mc\left(1-\phi/c^2+\boldsymbol{p}^2/2m^2c^2\right) \tag{7.32b}$$

添字を下げると，

$$p_0=g_{0\alpha}p^\alpha=g_{00}p^0=-\left(1+2\phi/c^2\right)p^0 \tag{7.33}$$

◆　$$-p^0\approx mc\left(1+\phi/c^2+\boldsymbol{p}^2/2m^2c^2\right)=mc+m\phi/c+\boldsymbol{p}^2/2mc \tag{7.34}$$

第 1 項 m は粒子の静止質量，第 2 項 $m\phi$ は重力ポテンシャルエネルギー，第 3 項 $\boldsymbol{p}^2/2m$ は運動エネルギーである．この式は，粒子の軌跡に沿って，p_0 の一定を意味し，ニュートンの保存エネルギーの概念を一般化している．

一般の重力場は，どんな座標系でも定常的でなく，したがってどんな保存エネルギーも定義できない．

同様にメトリックが軸対称なら $g_{\alpha\beta}$ が対称軸のまわりの角 φ によらないような座標系を見つけることができる．そのとき p_φ が保存される．

練習問題 7　　（7.29）
練習問題 8　　（7.41）～（7.43）
練習問題 9　　（7.44）
練習問題 10　　（7.45）

節の中で使われている公式と問題

7.1　微分幾何から重力へ　（7.1）～（7.7）

問題 1

7.2　少し曲った時空での物理　（7.8）～（7.24）

問題 2，3，4，5

7.3　曲った時空での直観　()

7.4　保存量　（7.25）～（7.37）

問題 6，7，8，9，10

（7.1）～（7.3）

練習問題 1

　式（7.3）が式（7.1）の曲った時空への正しい一般化としたら，それをどのように解釈するか？

静止している流体を考えると，局所慣性系で$U^0 = c, U^i = 0$，すると$\partial n/\partial t = R$から式（7.3）は曲率による粒子の生成，消滅を意味する．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（7.8）～（7.24）

練習問題 2

式（7.8）に対し $g^{\alpha\beta}$ を ϕ の 1 次まで計算せよ．

練習問題 3

式（7.8）メトリックについて，すべてのクリストッフェル記号を ϕ の 1 次まで計算せよ． ϕ は (ct, x, y, z) の一般の関数とせよ．

練習問題 4

式 (7.15) と式 (7.24) が g_{00} のみによっていることを確かめよ． g_{xx} の形は，それが $1+\mathrm{O}(\phi)$ である限り影響を与えない．

（練習問題 2 の解答）

式（7.8）のメトリックは，

$$
(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -\left(1+\dfrac{2\phi}{c^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{2\phi}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\dfrac{2\phi}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\dfrac{2\phi}{c^2} \end{pmatrix}
$$

$$
-\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)^{-1} \approx -\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right),\quad \left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)^{-1} \approx 1+\frac{2\phi}{c^2}
$$

だから，メトリックの逆行列は，

$$
(g^{\alpha\beta}) \approx \begin{pmatrix} -\left(1-\dfrac{2\phi}{c^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\dfrac{2\phi}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\dfrac{2\phi}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\dfrac{2\phi}{c^2} \end{pmatrix}
$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（練習問題 3 の解答）

クリストッフェル記号の定義式

◆　$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}\right) \qquad (6.32)$$

を使って，

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{0}{}_{00} &= \frac{1}{2} g^{00}\left(g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}\right) = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,0} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\frac{d}{dt}\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right) = \phi_{,0}/c^2 = \dot{\phi}/c^2 \\
\Gamma^{0}{}_{0i} &= \frac{1}{2} g^{00}\left(g_{00,i} + g_{0i,0} - g_{0i,0}\right) = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,i} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\frac{d}{dx^i}\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right) = \phi_{,i}/c^2 \\
\Gamma^{0}{}_{ij} &= \frac{1}{2} g^{00}\left(g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}\right) = -\frac{1}{2} g^{00} g_{ij,0} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\frac{d}{dt}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ij} = -\dot{\phi}\delta_{ij}/c^2 \\
\Gamma^{i}{}_{00} &= \frac{1}{2} g^{ii}\left(g_{i0,0} + g_{i0,0} - g_{00,i}\right) = -\frac{1}{2} g^{ii} g_{00,i} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)\frac{d}{dx^i}\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right) = \phi_{,i}/c^2 \\
\Gamma^{i}{}_{0j} &= \frac{1}{2} g^{ii}\left(g_{i0,j} + g_{ij,0} - g_{0j,i}\right) = \frac{1}{2} g^{ii} g_{ij,0} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)\frac{d}{dt}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ij} = -\dot{\phi}\delta_{ij}/c^2
\end{aligned}
$$

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{ii}\left(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)\left[\frac{d}{dx^k}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ij} + \frac{d}{dx^j}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ik} - \frac{d}{dx^i}\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{jk}\right]$$
$$= \phi_{,i}\delta_{jk}/c^2 - \phi_{,j}\delta_{ik}/c^2 - \phi_{,k}\delta_{ij}/c^2$$

＋＋

（7.38）～（7.40）

練習問題 5

(a)　完全流体では，ニュートン極限での式（7.6）の空間部分が式（7.8）のメトリックに対して次の形に帰着することを確かめよ．

$$\boldsymbol{v}_{,t} + (\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{v} + \nabla p/\rho + \nabla\phi = 0 \qquad (7.38)$$

これは重力場内の非相対論的な流体運動に対するオイラーの式として知られている．

(b)　同じ仮定の下で式（7.6）の時間成分を検討し，その各項を解釈せよ．

(c)　式（7.38）は静的な重力場での静的流体（$v=0$）が静水力学平衡の式

$$\nabla p + \rho\nabla\phi = 0 \qquad (7.39)$$

に従うことを意味する．メトリックテンソルは，$\vec{e}_0$ が時間的で $g_{i0}=0$，$g_{\alpha\beta,0}=0$ のとき静的とよばれる．式（7.6）から静的な流体（$U^i=0$，$p_{,0}=0$ など）が相対論的静水力学平衡の式に従うことを示せ．

$$p_{,i} + \left(\rho c^2 + p\right)\left[\frac{1}{2}\ln\left(-g_{00}\right)\right]_{,i} = 0 \qquad (7.40)$$

(d)　以上から少なくとも静的な情況では g_{00} と $-\exp(2\phi)$ の間に密接な関係があることが示唆される．ϕ は同様な情況でのニュートン・ポテンシャルである．式（7.8）と練習問題 4 がこのことと矛盾していないことを示せ．

【ポイント】4.10 練習問題 12～18 の議論がほぼそのまま使うことができる．

平坦な空間の式から曲った空間の式にするには，次のものを置き換える．

偏微分カンマ $(,)(\partial_\beta)$ ⇒共変微分セミコロン $(;)(\nabla_\beta)$

ミンコフスキー・メトリック $(\eta_{\alpha\beta})$ ⇒リーマン・メトリック $(g_{\alpha\beta})$

(a)　エネルギー・運動量保存則は，

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \qquad (4.34) \Rightarrow (7.6)$$

ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）は，

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \qquad (4.37) \Rightarrow (7.7)$$

（$T^{\mu\nu}$, ρc^2, p の次元は $\mathrm{Energy}\cdot\mathrm{L}^{-3}=\mathrm{Froce}\cdot\mathrm{L}^{-2}$）

二式を合わせて，

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=\left[\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)U^{\mu}U^{\nu}+pg^{\mu\nu}\right]_{;\nu}=0 \qquad (4.39) \Rightarrow (7.7b)$$

練習問題 1 から，

$$\left(nU^{\beta}\right)_{;\beta}=0 \qquad (4.40) \Rightarrow (7.2)$$

も仮定して，

$$nU^{\beta}\left(\frac{\rho+p/c^2}{n}U^{\alpha}\right)_{;\beta}+p_{;\beta}g^{\alpha\beta}=0 \qquad (4.45) \Rightarrow (7.7c)$$

これから空間成分の次式が導出できる．

$$(\rho+p/c^2)a_i+p_{,i}=0 \qquad （次元は \mathrm{Froce}\cdot\mathrm{L}^{-3}） \qquad (4.54)$$

$$\text{where}\quad \boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v},\quad a_i=U_{i,\beta}U^{\beta} \qquad (4.56)$$

曲った空間で一般化すると，

$$\boldsymbol{v}_{,t}+\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}+\nabla p/\rho+\nabla\phi=0 \quad （次元は \mathrm{Accel}） \qquad (7.38)$$

$$\text{where}\quad v<<c,\quad p<<\rho c^2$$

(b)　4.10 練習問題 15 から，

時間成分は，

$$\frac{d\rho}{d\tau}-\frac{\rho+p/c^2}{n}\frac{dn}{d\tau}=0 \qquad (4.49)$$

(c)　4.10 練習問題 16 から，

$$\left(\rho+p/c^2\right)U^{i}{}_{;\beta}U^{\beta}+p_{;\beta}g^{i\beta}=0 \qquad (4.52) \Rightarrow (7.40b)$$

式（6.32）を使って，

$$U^{i}{}_{;\beta}U^{\beta}=U^{i}{}_{,\beta}U^{\beta}+U^{\sigma}\Gamma^{i}{}_{\sigma\beta}U^{\beta}=U^{\sigma}\Gamma^{i}{}_{\sigma\beta}U^{\beta}$$

$$=\frac{1}{2}g^{\alpha i}(g_{\alpha\beta,\sigma}+g_{\alpha\sigma,\beta}-g_{\beta\sigma,\alpha})U^{\sigma}U^{\beta}$$

（$\alpha=i\quad\sigma=\beta=0$ のときゼロでない）

$$=\frac{1}{2}g^{ii}(g_{i0,0}+g_{i0,0}-g_{00,i})U^{0}U^{0}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{g_{00}c^2}g_{00,i}c^2$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln\left|g_{00}\right|\right]_{,i}$$

スカラーの共変微分はただの偏微分であるから，

$$p_{;\beta}g^{i\beta}=p_{,\beta}g^{i\beta}=p_{,i}$$

式（7.40b）は，

$$p_{,i}+\left(\rho c^2+p\right)\left[\frac{1}{2}\ln\left(-g_{00}\right)\right]_{,i}=0 \qquad (7.40)$$

(d)　ニュートン・ポテンシャルは別に詳しくやる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（7.10）～（7.25）

練習問題 6
　式（7.10）から式（7.25）を導け．

【ポイント】練習問題 4 から判るように式（7.10）は自由落下粒子の運動方程式つまり測地線方程式である．したがって式（7.25）も測地線方程式である．実際に式（7.25）は次式からも導出できる．

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}=0 \qquad (6.51)$$

5 章で定義した共変微分は，基底ベクトルによる共変微分であり，次式で定義される．

$$\nabla_\beta\vec{V}=\left(V^\alpha{}_{,\beta}+V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\right)\vec{e}_\alpha \qquad (5.47)$$

$$=V^\alpha{}_{;\beta}\vec{e}_\alpha \qquad (5.50)$$

成分式は，次式となる．

$$\left(\nabla_\beta\vec{V}\right)^\alpha=V^\alpha{}_{;\beta}\equiv V^\alpha{}_{,\beta}+V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \qquad (5.49)$$

接ベクトルによる，または一般化して，ベクトルによるベクトルの共変微分を次式で定義する．

$$\nabla_{\vec{W}}\vec{V}=W^\beta\nabla_\beta\vec{V}$$

$$=W^\beta\left(V^\alpha{}_{,\beta}+V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\right)\vec{e}_\alpha$$

$$=W^\beta V^\alpha{}_{;\beta}\vec{e}_\alpha \qquad ①$$

成分式は，次式となる．

$$\left(\nabla_{\vec{W}}\vec{V}\right)^\alpha=W^\beta V^\alpha{}_{;\beta}=W^\beta\left(V^\alpha{}_{,\beta}+V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\right) \qquad ②$$

式（7.10）から，$\vec{V}=\vec{W}=\vec{p}$ とすれば，

$$\left(\nabla_{\vec{p}}\vec{p}\right)^\alpha=p^\beta p^\alpha{}_{;\beta}=p^\beta p^\alpha{}_{,\beta}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}p^\mu p^\beta=0 \qquad (7.11')$$

ここで添字は適当に調整してある．

2015.06.10
7　曲がった時空での物理　7.6　練習問題

式（7.10）から，次式が得られる．

$$\nabla_{\tilde{p}}\tilde{p}=0 \qquad (7.10')$$

$$(\nabla_\beta\tilde{p})_\alpha\equiv(\nabla\tilde{p})_{\alpha\beta}\equiv p_{\alpha;\beta}=p_{\alpha,\beta}-p_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \qquad (5.62)$$

を使って，ベクトルによる 1 形式の共変微分を次式で定義する．

$$\nabla_{\vec{W}}\tilde{V}=W^\beta\nabla_\beta\tilde{V}$$

$$=W^\beta\left(V_{\alpha,\beta}-V_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\right)\vec{e}_\alpha$$

$$=W^\beta V_{\alpha;\beta}\vec{e}_\alpha \qquad ③$$

成分式は，次式となる．

$$\left(\nabla_{\vec{W}}\tilde{V}\right)^\alpha=W^\beta V_{\alpha;\beta}=W^\beta\left(V_{\alpha,\beta}-V_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\right) \qquad ④$$

式（7.10’）から，$\tilde{V}=\tilde{p},\vec{W}=\vec{p}$ とすれば，次式が得られる．

$$p^\beta p_{\alpha;\beta}=0$$

$$p^\beta p_{\alpha,\beta}-\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}p^\beta p_\mu=0$$

添字は適当に調整して，

$$p^\alpha p_{\beta;\alpha}=0 \qquad (7.25)$$

$$p^\alpha p_{\beta,\alpha}-\Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}p^\alpha p_\gamma=0 \qquad ⑤$$

測地線方程式（6.51）から式（7.11’）導出する．式（6.51）のアフィンパラメーターを固有時間とする．

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0 \qquad (6.51)$$

4 元速度 $U^\alpha=\dfrac{dx^\alpha}{d\tau}$ を使って，

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}U^\mu U^\beta=0 \qquad ⑥$$

4 元運動量 $p^\alpha=mU^\alpha$ を使って，

$$m\frac{dp^\alpha}{d\tau}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}p^\mu p^\beta=0 \qquad ⑦$$

$$m\frac{dp^\alpha}{d\tau}=m\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dp^\alpha}{dx^\beta}=mU^\beta\frac{dp^\alpha}{dx^\beta}=p^\beta p^\alpha{}_{,\beta} \qquad ⑧$$

だから，

$$\left(\nabla_{\vec{p}}\vec{p}\right)^\alpha=p^\beta p^\alpha{}_{;\beta}=p^\beta p^\alpha{}_{,\beta}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}p^\mu p^\beta=0 \qquad (7.11')$$

前述により上式から式（7.25）が導出できる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（7.29）

練習問題 7

線要素によって与えられた次の四つのメトリックを考える．

(i)　$ds^2=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$

(ii)　$$ds^2=-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2+\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2\right)$$

ここでは M は定数である．

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2\right)$$

（幾何学単位）

(iii)　$$ds^2=-\frac{\Delta-a^2\sin^2\theta}{\rho^2}dt^2-2a\frac{2Mr\sin^2\theta}{\rho^2}dtd\phi+\frac{\left(r^2+a^2\right)^2-a^2\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\sin^2\theta\,d\phi^2+\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2+\rho^2d\theta^2$$

（幾何学単位）

ここで M と a は定数で，$\Delta=r^2-2Mr+a^2$，$\rho^2=r^2+a^2\cos^2\theta$ とする．

(iv)　$$ds^2=-c^2dt^2+R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2\right)\right]$$

ここで k は定数，$R(t)$ は時間 t のみに依存する関数である．

第 1 のメトリックはすでにおなじみである．その他は後の章に出てくる．それらの名前は，それぞれシュワルツシルト・メトリック，カー・メトリック，ロバートソン - ウォーカー・メトリックとよばれている．

【注記】Schwarzschild，Kerr，Robertson-Walker

(a)　おのおののメトリックに対して自由落下粒子の 4 元運動量の保存する成分 p_a をあるだけ見つけよ．

(b)　6.9 節の練習問題 28 を使って，(i)を次の形に直す．

(i')　$ds^2=-c^2dt^2+dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2\right)$

これから(ii)と(iv)が球対称であると議論せよ．このことは保存する成分 p_a の数を増やすか？

(c)　(i')と(ii)～(iv)に対して $\theta = \pi/2$ と $p^\theta = 0$ すなわち赤道面に接して始まった測地線は常に $\theta = \pi/2$ と $p^\theta = 0$ であることが示される．

(i')，(ii)，(iii)の場合について，方程式 $\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2$ を用いて， p^r を m と他の保存量と位置の既知関数で表せ．

(d)　(iv)について，対称性は，もし測地線が $p^\theta = p^\phi = 0$ で始まると，これらの量はゼロのままにとどまることを意味する．このことを用いて式（7.29）から， $k = 0$ のとき， p_r が保存量であることを示せ．

(a)

【ポイント】たとえば，定常的な重力場があるとする．すると，メトリックの成分が時間によらない座標系を見つけることができ，そのような系では p_0 が保存する．

同様にメトリックが軸対称なら $g_{\alpha\beta}$ が対称軸のまわりの角 φ によらないような座標系を見つけることができる．そのとき p_φ が保存される．

(ii)

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\alpha = (1 - 2M/r)^{1/2}$$

(iii)

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 + 2Mr/\rho^2 & 0 & 0 & -\omega\varpi^2 \\ 0 & \rho^2/\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\omega\varpi^2 & 0 & 0 & \varpi^2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = r^2 + \alpha^2 - 2Mr$$
$$\rho^2 = r^2 + \alpha^2 \cos^2\theta$$
$$\Sigma^2 = (r^2 + \alpha^2)^2 + \alpha^2 \Delta \sin^2\theta$$
$$\varpi = (\Sigma/\rho)\sin\theta$$
$$\omega = 2\alpha Mr/\Sigma^2$$

（問題(a)の解）

(i)は， p_0 と p_i が保存される．

(ii)，(iii)は， p_0 が保存される．

問題(b)から，(ii)，(iv)は，球対称であるから，角度によりメトリックが変化しないので， p_i が保存される．

(b)　6.9 節の練習問題 28 から，座標変換式は，

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

線要素は，

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

したがって，式(i)から式(i')が導ける．

(i)　$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

(i')　$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$

(c)　(i')から，

$$-m^2 = (p^0)^2 + (p^r)^2 + r^2\left((p^\theta)^2 + \sin^2\theta (p^\phi)^2\right)$$

$$-m^2 = (p^0)^2 + (p^r)^2 + r^2 (p^\phi)^2$$

$$(p^r)^2 = m^2 + (p^0)^2 + + r^2 (p^\phi)^2$$

(ii)から，

$$-m^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(p^0)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}(p^r)^2 + r^2\left((p^\theta)^2 + \sin^2\theta (p^\phi)^2\right)$$

$$-m^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(p^0\right)^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(p^r\right)^2+r^2\left(p^\phi\right)^2$$

$$\left(p^r\right)^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right)m^2-\left(p^0\right)^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)r^2\left(p^\phi\right)^2$$

(iii)から，

$$-m^2=-\frac{\Delta-a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\left(p^0\right)^2-2a\frac{2Mr\sin^2\theta}{\rho^2}p^0p^\phi+\frac{\left(r^2+a^2\right)^2-a^2\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\sin^2\theta\left(p^\phi\right)^2+\frac{\rho^2}{\Delta}\left(p^r\right)^2+\rho^2\left(p^\theta\right)^2$$

$$-m^2=-\frac{\Delta-a^2}{\rho^2}\left(p^0\right)^2-2a\frac{2Mr}{\rho^2}p^0p^\phi+\frac{\left(r^2+a^2\right)^2-a^2\Delta}{\rho^2}\left(p^\phi\right)^2+\frac{\rho^2}{\Delta}\left(p^r\right)^2$$

$$\left(p^r\right)^2=\frac{\Delta}{\rho^2}m^2-\Delta\frac{\Delta-a^2}{\rho^4}\left(p^0\right)^2-2a\Delta\frac{2Mr}{\rho^4}p^0p^\phi+\Delta\frac{\left(r^2+a^2\right)^2-a^2\Delta}{\rho^4}\left(p^\phi\right)^2$$

(d)　式（7.29）と(iv)から，

$$m\frac{dp_r}{d\tau}=\frac{1}{2}g_{\nu\alpha,r}p^\nu p^\alpha$$
$$=-(1)_{,r}\left(p^0\right)^2+\left(\frac{R^2(t)}{1-kr^2}\right)_{,r}\left(p^r\right)^2+\left(R^2(t)r^2\right)_{,r}\left(p^\theta\right)^2+\left(R^2(t)r^2\sin^2\theta\right)_{,r}\left(p^\phi\right)^2$$
$$=0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（7.41）～（7.43）

練習問題 8

ある座標系でメトリックの成分 $g_{\alpha\beta}$ がある座標 x^μ に依存しないとする．

(a)　任意のストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）に対して保存則 $T^\nu{}_{\mu;\nu}=0$ が次式となることを示せ．

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}T^\nu{}_\mu\right)_{,\nu}=0 \tag{7.41}$$

(b)　この座標系で各空間的超平面 $x^0=\text{Const.}$ のある有限領域だけ $T^{\mu\beta}\neq 0$ だとする．このとき式（7.41）が次のことを意味することを示せ． n_ν を超平面の単位垂直とすると，次の量は x^0 によらない．

$$\int_{x^0=\text{const}} T^\nu{}_\mu\sqrt{-g}\,n_\nu d^3x$$

これは式（7.29）の後で述べた保存則の連続体への一般化である．

7.4　保存量を参照のこと．

(c)　球面極座標 (ct, r, θ, ϕ) をもつ大域的慣性系で平坦なミンコフスキー空間を考える．(b)から次の量が t によらないことを示せ．

$$J=\int_{t=\text{const}} T^0{}_\phi r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \tag{7.42}$$

これは系の全角運動量である．

(d)　(c)の積分をデカルト座標 (ct, x, y, z) での $T^{\alpha\beta}$ の成分で表し，次の形になることを示せ．

$$J=\int\left(xT^{y0}-yT^{x0}\right)dxdydz \tag{7.43}$$

これは z 軸まわりの粒子の角運動量に対する非相対論的表現 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_z$ の連続体版である．

(a)

$$\nabla_\beta B^\mu{}_\nu=B^\mu{}_{\nu,\beta}+B^\alpha{}_\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}-B^\mu{}_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} \tag{5.66}$$

を使って，（添字を適当に書き換えて）

$$\left(T^{\nu}{}_{\mu}\right)_{;\nu}=T^{\nu}{}_{\mu,\nu}+T^{\alpha}{}_{\mu}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\nu}-T^{\nu}{}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$$

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\sqrt{-g} \qquad (6.40)$$

を使って，（ダミーを書き換えて）

$$\left(T^{\nu}{}_{\mu}\right)_{;\nu}=\frac{\partial T^{\nu}{}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{T^{\nu}{}_{\mu}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\sqrt{-g}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}T^{\nu}{}_{\mu}\right)$$

(b)　ガウスの発散定理

◆ $$\int V^{\alpha}{}_{,\alpha}d^4x=\oint V^{\alpha}n_{\alpha}d^3s \qquad (4.57)$$

または,

$$\int\left(\sqrt{-g}V^{\alpha}\right)_{,\alpha}d^4x=\oint V^{\alpha}n_{\alpha}\sqrt{-g}d^3S \qquad (6.44)$$

を応用すると,

$$\int\left(\sqrt{-g}T^{\nu}{}_{\mu}\right)_{,\nu}d^4x=\oint\sqrt{-g}T^{\nu}{}_{\mu}n_{\nu}d^3x$$

ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）の発散がゼロであるとは，局所的なエネルギー・運動量保存則と同義である.

(c)　球面極座標 (ct, r, θ, ϕ) でのミンコフスキー・メトリックは,

$$\left(g_{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&r^2&0\\0&0&0&r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

だから，トレースは,

$$g=r^4\sin^2\theta$$

したがって，ガウスの発散定理を応用して,

$$J=\int_{t=\mathrm{const}}T^{0}{}_{\phi}r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi=\int\left(\sqrt{-g}T^{0}{}_{\mu}\right)_{,0}d^4x$$

(d)　座標変換式は,

$$x=r\sin\theta\cos\phi$$

$$y=r\sin\theta\sin\phi$$

$$z=r\cos\theta$$

？？？

式（7.43）の被積分項は角運動量密度であり，全角運動量 J が t によらないことを，場の方程式の帰結として与える.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（7.44）

練習問題 9

(a)　式（7.8）のメトリックに対するリーマン・テンソルの成分 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ を ϕ の１次まで求めよ．

(b)　測地線偏移の方程式（6.87）が（ϕ と速度の最低次で）次式になることを示せ．

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -\phi_{,ij}\xi^i \qquad (7.44)$$

(c)　測地線がニュートン的な重力場の中の近傍の二点での静止状態から始まった自由粒子の世界線とするとき，(b)の方程式を解釈せよ．

◆
$$\nabla_V\nabla_V\xi^\alpha = R^\alpha{}_{\mu\nu\beta}V^\mu V^\nu\xi^\beta \qquad (6.87)$$

(a)

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) \qquad (6.68)$$

を使って，

$$R_{0i0j} = \frac{1}{2}\left(g_{0j,io} - g_{00,ij} + g_{i0,0j} - g_{ij,00}\right)$$

$$= \phi_{,ij}/c^2 + \delta_{ij}\phi_{,00}/c^2$$

$$R_{0ijk} = \frac{1}{2}\left(g_{0k,ij} - g_{0j,ik} + g_{ij,0k} - g_{ik,0j}\right)$$

$$= -\delta_{ij}\phi_{,0k}/c^2 + \delta_{ik}\phi_{,0j}/c^2$$

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(g_{il,jk} - g_{ik,jl} + g_{jk,il} - g_{jl,ik}\right)$$

$$= -\delta_{il}\phi_{,jk}/c^2 + \delta_{ik}\phi_{,jl}/c^2 - \delta_{jk}\phi_{,il}/c^2 + \delta_{jl}\phi_{,ik}/c^2$$

(b)　測地線偏移の方程式（6.87）は，6.9 練習問題 22 で導出した．

重力しかない場で自由粒子は，時間的またなヌル測地線に沿って行く．弱い場（$|\phi|/c^2 << 1$）では，ニュートンの法則

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{p}/dt = -m\nabla\phi$$

と等価である．

ニュートン物理での ξ^j だけ離れている近接した粒子の加速度は次式である．

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x})}{\partial x^i},\quad \frac{d^2(x^i+\xi^i)}{dt^2} = -\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})}{\partial x^i}$$

その差は次式となる．

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = \frac{\partial\phi(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} - \frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})}{\partial x^i}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\right)$$

$$\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi}) - \phi(\boldsymbol{x}) = \xi^j\frac{\partial\phi}{\partial x^j}$$

を使って，近接した粒子間の加速度の差は，

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}\xi^i = -\phi_{,ij}\xi^i \qquad (7.44)$$

上式は，測地線偏移の方程式

◆
$$\nabla_V\nabla_V\xi^\alpha = R^\alpha{}_{\mu\nu\beta}V^\mu V^\nu\xi^\beta \qquad (6.87)$$

と明らかに同じである．

(c)　真空では，$\nabla^2\phi = 0$ だから，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j} = 0$$

したがって，

$$R^\alpha{}_{\mu\nu\beta}V^\mu V^\nu = 0$$

$\vec{V}$ は任意であるから，次式が結論となる．

$$R_{\mu\nu} = 0$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（7.45）

練習問題 10

(a)　もしベクトル場 ξ^α がキリング方程式

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0 \qquad (7.45)$$

を満たすならば，測地線に沿って $p^\alpha \xi_\alpha = \text{Const.}$ であることを示せ．これは式（7.29）から導いた保存則の座標不変な表現である．メトリックがキリング場を許すかどうかだけを知ればよい．

(b)　ミンコフスキー時空の 10 個のキリング場を見つけよ．

(c)　$\vec{\xi}$ と $\vec{\eta}$ がキリング場なら，定数の α, β に対して $\alpha\vec{\xi} + \beta\vec{\eta}$ もそうなることを示せ．

(d)　(b)のキリング場のローレンツ変換は単に(c)におけるような線形結合をつくることを示せ．

(e)　練習問題 7(a)の結果から，メトリック(ii)〜(iv)のキリング場を見つけよ．

◆

$$m\frac{dp_\beta}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} p^\nu p^\alpha \qquad (7.29)$$

【reference】

冨田　憲二「相対性理論」丸善
http://members3.jcom.home.ne.jp/nososnd/grel/kil.pdf

【参考】キリング方程式（7.45）を導出する．

6.9 練習問題 39 のリー微分を応用する．

(0,2)テンソル $A_{\lambda\sigma}$ のリー微分は，

$$L_{\vec{\xi}} A_{\lambda\sigma} = -\xi^\alpha{}_{;\lambda} A_{\alpha\sigma} - \xi^\alpha{}_{;\sigma} A_{\lambda\alpha} - A_{\lambda\sigma;\varsigma}\xi^\varsigma$$

メトリックテンソル $g_{\lambda\sigma}$ のリー微分は， $g_{\lambda\sigma;\varsigma} = 0$ だから，

$$L_{\vec{\xi}} g_{\lambda\sigma} = -\xi^\alpha{}_{;\lambda} g_{\alpha\sigma} - \xi^\alpha{}_{;\sigma} g_{\lambda\alpha}$$
$$= -\left(\xi_{\sigma;\lambda} + \xi_{\lambda;\sigma}\right)$$

このメトリックテンソルのリー微分は， ξ^μ 方向の変位によるテンソルの関数形の変化率を表す．もし， ξ^μ 方向の変位に対して，メトリックテンソルの関数形の変らなければ，（添字を適当に書き換えて）

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = \xi_{\beta;\alpha} + \xi_{\alpha;\beta} = 0 \qquad (7.45)$$

(a)

(b)　ローレンツ基底では次のベクトル場がキリング場である．

$\vec{e}_t, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, x\vec{e}_y - y\vec{e}_x, y\vec{e}_z - z\vec{e}_y, z\vec{e}_x - x\vec{e}_z, t\vec{e}_x + x\vec{e}_t, t\vec{e}_y + y\vec{e}_t, t\vec{e}_z + z\vec{e}_t,$

式（7.45）の解の任意の定数係数の線形結合はまた式（7.45）の解だから，他のローレンツ系での同様のキリング場は上から得られる．

(c)　式（7.45）から，

$$\left(\alpha\xi_\mu + \beta\eta_\mu\right)_{;\nu} + \left(\alpha\xi_\nu + \beta\eta_\nu\right)_{;\mu} = \alpha\left(\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}\right) + \beta\left(\eta_{\mu;\nu} + \eta_{\nu;\mu}\right) = 0$$

(d)

(e)

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

8　アインシュタイン方程式

アインシュタイン方程式，重力場の方程式，ニュートン近似（極限），ゲージ変換，ローレンツ・ゲージ条件

8.1　重力場の方程式の目的と正当性　（8.1）～（8.9）

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \qquad \left(\left[\nabla^2\phi\right] = \mathrm{s}^{-2}\right) \tag{8.1}$$

$$\phi = -\frac{Gm}{r} \qquad \left(\left[\phi\right] = \mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\right) \tag{8.2}$$

式（8.1）はポアソン方程式（Poisson’s equation）で，真空中以外にも一般化された重力場の方程式である．

【表記法】$\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \nabla\cdot\nabla$（ナブラドットナブラ）

練習問題 1　（8.1）～（8.2）

$$G^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta} \tag{8.7}$$

練習問題 18　()

距離化単位

練習問題 2　()

練習問題 3　(8.2)

8.2　アインシュタイン方程式　（8.10）～（8.11）

$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta} \tag{8.10}$$

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \tag{8.11}$$

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R \tag{6.98}$$

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta} - \Lambda g^{\alpha\beta} \tag{8.10'}$$

where　$G^{\alpha\beta}$ ：アインシュタイン・テンソル（$\left[G^{\alpha\beta}\right] = \mathrm{m}^{-2}$）

$R^{\alpha\beta}$ ：リッチ・テンソル，R ：リッチ・スカラー

$T^{\alpha\beta}$ ：ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）（$\left[T^{\alpha\beta}\right] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$（圧力））

G ：万有引力定数（$G = 6.673\times10^{-11}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot s^{-2}$）

Λ ：宇宙定数

8.3　弱い重力場でのアインシュタイン方程式　（8.12）～（8.42）

近似的ローレンツ座標系　（8.12）～（8.13）

弱い重力場は時空がほぼ平坦なものである．近似的ローレンツ座標系は，

◆
$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \tag{8.12}$$

$$\left|h_{\alpha\beta}\right| << 1 \tag{8.13}$$

ひとつの近似的ローレンツ座標系を別の近似的ローレンツ座標系に移す座標変換には，バックグラウンドのローレンツ変換とゲージ変換の二つのタイプがある．

練習問題 6　（8.12）～（8.13）

バックグラウンドのローレンツ変換　（8.14）～（8.19）

特殊相対論でのローレンツ変換行列

$$\left(\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.14}$$

where　$\beta = \dfrac{v}{c} < 1,\quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$

弱い重力場に対し“バックグラウンドのローレンツ変換”を

$$x^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} x^{\beta} \quad (8.15)$$

メトリックテンソルの変換は，

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} \eta_{\mu\nu} + \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} h_{\mu\nu} \quad (8.16)$$

ローレンツ変換では，

$$\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (8.17)$$

であるから，

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (8.18)$$

ここで，

◆ $$h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} h_{\mu\nu} \quad (8.19)$$

ゲージ変換　　（8.20）～（8.24）

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}\left(x^{\beta}\right)$$

where　$\left|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right| << 1$

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \xi^{\alpha}{}_{,\beta} \quad (8.20)$$

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} - \xi^{\alpha}{}_{,\beta} + \mathrm{O}\left(\left|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right|^{2}\right) \quad (8.21)$$

練習問題 4　　（8.20）～（8.21）

メトリックの変換は，式（8.12），（8.21）を使って，

$$g_{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'} \Lambda^{\nu}{}_{\beta'} g_{\mu\nu} = \left(\delta^{\mu}{}_{\alpha} - \xi^{\mu}{}_{,\alpha}\right)\left(\delta^{\nu}{}_{\beta} - \xi^{\nu}{}_{,\beta}\right)\left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right)$$

微小量の 1 次までを考えると，

$$g_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \quad (8.22)$$

ここで，

$$\xi_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} \xi^{\beta} \quad (8.23)$$

この式から，座標変換の影響は $h_{\alpha\beta}$ を

◆ $$h_{\alpha\beta} \to h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \quad (8.24)$$

式（8.34）風に書くと，

◆ $$h^{(\mathrm{new})}_{\alpha\beta} = h^{(\mathrm{old})}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \quad (8.24\mathrm{b})$$

と定義し直すことである．$\left|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right|$ がすべて小さければ，新しく得られる $h_{\alpha\beta}$ もまた小さく，適切な座標系に留まっている．この変換をゲージ変換という．

リーマン・テンソル　　（8.25）

添字を下げたリーマン・テンソル定義式

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\lambda} R^{\lambda}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) \quad (6.68)$$

は，

◆ $$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (8.12)$$

を使うと，線形近似でのリーマン・テンソルは，

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) \quad (8.25)$$

と書ける．添字を下げないリーマン・テンソル定義式

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left(g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}\right) \quad (6.67)$$

に式（8.12）を使って，線形近似でのリーマン・テンソルは，

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}\left(h_{\sigma\nu,\beta\mu} - h_{\sigma\mu,\beta\nu} + h_{\beta\mu,\sigma\nu} - h_{\beta\nu,\sigma\mu}\right) \quad (8.25\mathrm{b})$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h^{\alpha}{}_{\nu,\beta\mu} - h^{\alpha}{}_{\mu,\beta\nu} + h_{\beta\mu}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} - h_{\beta\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\mu}\right) \quad (8.25\mathrm{b'})$$

と書ける．これらの成分はゲージ独立であって，式（8.24）で変化しない．ゲージ変換のような微小な座標変換では成分を微小にしか変化させない．しかし，成分自体がすでに微小量なので，その変化は 2 次のオーダーとなり，1 次の表現式（8.25）は変化しない．

練習問題 5　　（8.25）

弱い場でのアインシュタイン方程式　（8.26）～（8.42）

$$h^{\mu}{}_{\beta}=\eta^{\mu\alpha}h_{\alpha\beta} \tag{8.26}$$

$$h^{\mu\nu}=\eta^{\nu\beta}h^{\mu}{}_{\beta} \tag{8.27}$$

トレース

$$h\equiv h^{\alpha}{}_{\alpha} \tag{8.28}$$

練習問題 7　（8.29）～（8.31）

式（8.29）と（8.31）の両辺に $\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}$ を掛けて添字を下げる．

$$\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}h^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}\eta^{\alpha\beta}h$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{8.29b}$$

$$\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}h^{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}\eta^{\alpha\beta}\bar{h}$$

$$h_{\mu\nu}=\bar{h}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \tag{8.31b}$$

練習問題 8　（8.25）～（8.32）

$$f^{,\mu}=\eta^{\mu\nu}f_{,\nu}$$

ローレンツ・ゲージ条件

◆ $$\bar{h}^{\mu\nu(\mathrm{new})}{}_{,\nu}=0 \tag{8.33}$$

$$\bar{h}^{(\mathrm{old})\mu\nu}{}_{,\nu}\neq 0$$

練習問題 12　（8.34）

発散は,

$$\bar{h}^{(\mathrm{new})\mu\nu}{}_{,\nu}=\bar{h}^{(\mathrm{old})\mu\nu}{}_{,\nu}+\xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} \tag{8.35}$$

$$\bar{h}^{(\mathrm{new})\mu\nu}{}_{,\nu}=0$$

となるゲージを求める．

$$\Box\xi^{\mu}=\xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu}=\bar{h}^{(\mathrm{old})\mu\nu}{}_{,\nu} \tag{8.36}$$

ダランベルシャンの定義式

$$\Box f=f^{,\mu}{}_{,\mu}=\eta^{\mu\nu}f_{,\mu\nu}=\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)f \tag{8.37}$$

【注意】上式のカッコ内の符号はミンコフスキー・メトリックが $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ の場合である． $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ のときは符号が反転する．

３次元の非斉次の波動方程式

$$\Box f=g \tag{8.38}$$

斉次の波動方程式

$$\Box\eta^{\mu}=0 \tag{8.39}$$

ローレンツ・ゲージ

$$\Box\left(\xi^{\mu}+\eta^{\mu}\right)=\bar{h}^{(\mathrm{old})\mu\nu}{}_{,\nu} \tag{8.40}$$

練習問題 10　　（8.41）

弱い重力場でのアインシュタイン方程式（線形理論での場の方程式）

◆　$$\Box \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \qquad (8.42)$$

練習問題 9　　（8.32）

練習問題 11　　（8.33）

8.4　ニュートン重力場　　（8.43）～（8.60）

ニュートンの極限　　（8.43）～（8.50）

練習問題 13　　（）

練習問題 14　　（8.46）～（8.50）

練習問題 15　　（8.50）

練習問題 16　　（8.50）

練習問題 17　　（）

練習問題 19　　（8.45）

練習問題 20　　（8.61）～（8.62）

節の中で使われている公式と問題

8.1　重力場の方程式の目的と正当性　　（8.1）～（8.9）

問題 1

距離化単位　　（8.9）

問題 2，3

8.2　アインシュタイン方程式　　（8.10）～（8.11）

8.3　弱い重力場でのアインシュタイン方程式　　（8.12）～（8.42）

近似的ローレンツ座標系　　（8.12）～（8.13）

問題 6

バックグラウンドのローレンツ変換　　（8.14）～（8.19）

ゲージ変換　　（8.20）～（8.24）

問題 4，11

リーマン・テンソル　　（8.25）

問題 5

弱い場でのアインシュタイン方程式　　（8.26）～（8.42）

問題 7，8，9，10，12

8.4　ニュートン重力場　　（8.43）～（8.60）

ニュートンの極限　　（8.43）～（8.50）

問題 13，14，15，16，17，18，19

定常な相対論的重力源の遠距離場　　（8.51）～（8.60）

（8.1）～（8.2）

練習問題 1

次のようにして式 (8.2) が式 (8.1) の解であることを示せ．質点が原点 $r=0$ にあり，球対称な重力場をつくっているとする．次に，半径 r の球面にガウスの法則を適用して，

$$\frac{d\phi}{dr}=\frac{Gm}{r^2}$$

であることを導け．この式から式（8.2）を導け．（無限遠でのふるまいを考えよ．）

ガウスの発散定理

$$\int_S \nabla\phi\cdot dS=\int_V (\nabla\cdot\nabla\phi)dV$$

where　V　は S が囲む体積

から，式（8.1）を使って，

$$右辺=\int_V (\nabla\cdot\nabla\phi)dV=4\pi G\int_V \rho dV=4\pi Gm$$

半径 r での重力ポテンシャルは一定であるから， S を半径 r の球面として，

$$左辺=\int_S \nabla\phi\cdot dS=\nabla\phi\int_S dS=4\pi r^2\nabla\phi$$

したがって，

$$\nabla\phi=\frac{Gm}{r^2}$$

この問題の場合は，ポテンシャルの傾きは半径方向であるから，

$$\nabla\phi=\frac{d\phi}{dr}=\frac{Gm}{r^2}$$

これを積分して，

$$\phi=-\frac{Gm}{r} \tag{8.2}$$

【別解】

2015.06.10
8　アインシュタイン方程式　8.6　練習問題

重力場（ポテンシャルの傾き）を $\boldsymbol{f}=\nabla\phi$， B は物体に関する体積分， V は閉曲面 S 内に対する体積分として，ガウスの発散定理から，

$$\int_B\int_S d\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_B\int_V (\nabla\cdot d\boldsymbol{f})dV$$

$$右辺=\int_B\int_V (\nabla\cdot d\boldsymbol{f})dV=\int_B\int_V (\nabla\cdot\nabla d\phi)dV=\int_V (\nabla^2\phi)dV$$

$$左辺=\int_B\int_S d\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_B\int_S G\frac{\rho dV}{r^2}\cos\theta dS=G\int_B \rho dV\int_S \frac{\cos\theta dS}{r^2}=4\pi G\int_B \rho dV$$

したがって，次のポアソン方程式（Poisson’s equation）が得られる．

$$\nabla^2\phi=4\pi G\rho \tag{8.1}$$

【reference】

http://www.geol.sci.hiroshima-u.ac.jp/~nakakuki/naibutsu/resume2007/lec-05-20070621.pdf

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 2

(a)　SI 系での G と c の値を使って次の有用な変換の換算率を導け．

$$G/c^2 = 7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m\,kg^{-1}} = 1$$

$$c^5/G = 3.629\times10^{52}\,\mathrm{J\,s^{-1}} = 1$$

(b)　表 8.1 に掲げた定数の SI 単位の値から距離化単位の値を求めよ．

表 8.1　S I 単位と距離化単位による基本定数の値の比較

定数	S I 単位での値	距離化単位での値
c	$2.998\times10^{8}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$	1
G	$6.673\times10^{-11}\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$	1
$\hbar$	$1.055\times10^{-34}\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$	$2.612\times10^{-70}\mathrm{m^2}$
m_e	$9.110\times10^{-31}\mathrm{kg}$	$6.764\times10^{-58}\mathrm{m}$
m_p	$1.673\times10^{-27}\mathrm{kg}$	$1.242\times10^{-54}\mathrm{m}$
$M_\odot$	$1.989\times10^{30}\mathrm{kg}$	$1.477\times10^{3}\mathrm{m}$
$M_\oplus$	$5.973\times10^{24}\mathrm{kg}$	$4.435\times10^{-3}\mathrm{m}$
$L_\odot$	$3.90\times10^{26}\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-3}}$	1.07×10^{-26}

注意：m_e と m_p はそれぞれ電子と陽子の質量で、$M_\odot$ と $M_\oplus$ はそれぞれ太陽と地球の質量を表す．また $L_\odot$ は太陽の光度（ここの S I 単位はジュール/秒に等しい）である．

(c)　次の量を距離化単位で表せ．

(i)　密度（中性子量での典型的な値）$\rho = 10^{17}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

(ii)　圧力（中性子量での典型的な値）$p = 10^{33}\,\mathrm{kg\cdot s^{-2}\cdot m^{-1}}$

(iii)　地球表面での重力加速度 $g = 9.80\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

(iv)　超新星の光度 $L = 10^{41}\,\mathrm{J\cdot s^{-1}}$

(d)　自然界において，次元をもった３つの定数 c，G，$\hbar$ は基本的なものと考えられている．$c = G = 1$ とすることで，$\hbar$ は m^2 の単位をもつ．したがって，$\hbar^{1/2}$ が長さの基本的な単位を与えることになり，プランク長さという．表 8.1 から $\hbar^{1/2} = 1.616\times10^{-35}\mathrm{m}$ と求められる．この数値は相対論と重力と量子論の基本的定数を含んでいるので，物理学者はこの長さが量子重力において重要

な役割を果たすと考えている．SI 系での c，G，$\hbar$ の値を使ってこの長さを表現してみよ．同様にして変数の換算率を使って，c，G，$\hbar$ からつくられる質量と時間の単位をもった基本的な数値，プランク質量，プランク時間を計算せよ．これらの基本的な数値を素粒子論で知られている典型的な質量，長さ時間尺度と比較せよ．

(a)　$G/c^2 = 6.673\times10^{-11}\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}\cdot s^{-2} / \left(2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}\cdot s^{-1}\right)^2$

$= 7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m\,kg^{-1}}$

$c^5/G = \left(2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}\cdot s^{-1}\right)^5 / 6.673\times10^{-11}\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}\cdot s^{-2}$

$= 3.629\times10^{52}\,\mathrm{J\,s^{-1}}$

（注意）$\mathrm{N = kg\cdot m\cdot s^{-2}}$，$\mathrm{J = N\cdot m = kg\cdot m^2\cdot s^{-2}}$，$\mathrm{W = J\cdot s^{-1} = kg\cdot m^2\cdot s^{-3}}$

(b)　問題(a)から，次の二式で単位 kg と s を機械的に m に換算する．

$\mathrm{kg} = 7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}$

$\mathrm{s} = 2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}$

$\hbar = 1.055\times10^{-34}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$

$= 1.055\times10^{-34}\,\mathrm{m^2}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}\times\left(2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}\right)^{-1}$

$= 2.612\times10^{-70}\,\mathrm{m^2}$

$m_e = 9.110\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$

$= 9.110\times10^{-31}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}$

$= 6.764\times10^{-58}\,\mathrm{m}$

$m_p = 1.673\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$= 1.673\times10^{-27}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}$

$= 1.242\times10^{-54}\,\mathrm{m}$

$M_\Theta = 1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg}$

$= 1.989\times10^{30}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}$

$= 1.477\times10^{3}\,\mathrm{m}$

$$M_{\oplus} = 5.973\times10^{24}\,\mathrm{kg}$$

$$= 5.973\times10^{24}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}$$

$$= 4.435\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$L_{\Theta} = 3.90\times10^{26}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-3}$$

$$= 3.90\times10^{26}\,\mathrm{m}^2\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}\times\left(2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}\right)^{-3}$$

$$= 1.07\times10^{-26}$$

(c)

(i)　$\rho = 10^{17}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3} = 10^{17}\,\mathrm{m}^{-3}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m} = 7.425\times10^{-11}\,\mathrm{m}^{-2}$

(ii)　$p = 10^{33}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{m}^{-1} = 10^{33}\,\mathrm{m}^{-1}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}\times\left(2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}\right)^{-2}$

$$= 8.261\times10^{-12}\,\mathrm{m}^{-2}$$

(iii)　$g = 9.80\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} = 9.80\,\mathrm{m}\times\left(2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}\right)^{-2} = 1.090\times10^{-16}\,\mathrm{m}^{-1}$

(iv)　$L = 10^{41}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 10^{41}/3.629\times10^{52} = 2.756\times10^{-12}$

(d)　問題(b)から，

$$\hbar = 2.612\times10^{-70}\,\mathrm{m}^2$$

$$\hbar^{1/2} = 1.616\times10^{-35}\,\mathrm{m}$$

単位 m を機械的に kg に換算する．

$$m_{PL} = 1.616\times10^{-35}\times\left(7.425\times10^{-28}\right)^{-1}\mathrm{kg} = 2.176\times10^{-8}\,\mathrm{kg}$$

単位 m を機械的に s に換算する．

$$t_{PL} = 1.616\times10^{-35}\times\times\left(2.998\times10^{8}\right)^{-1}\mathrm{s} = 5.390\times10^{-44}\,\mathrm{s}$$

典型的な素粒子の寿命は，$10^{-24}\,\mathrm{s}$ 以上である．既知の最も重い粒子の質量は，$10^{-29}\,\mathrm{kg}$ 以下である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.2）

練習問題 3

距離化単位で計算せよ．

(a)　太陽のニュートン・ポテンシャルの太陽表面での値.

太陽半径は $6.960\times10^{8}\,\mathrm{m}$

(b)　太陽のニュートン・ポテンシャルの地球軌道での値.

$r = 1\mathrm{AU} = 1.496\times10^{11}\,\mathrm{m}$

(c)　地球のニュートン・ポテンシャルの地球表面での値.

地球半径は $6.371\times10^{6}\,\mathrm{m}$

(d)　太陽のまわりを軌道運動する地球の速度

(e)　(b)の値が(c)より大きいことに気づいたはずである．それでは，なぜ地球上では太陽より地球の引力を強く感じるのであろうか？

(f)　ニュートン理論では，質量 M の物体のまわりの円軌道において，ϕ をニュートン・ポテンシャルとすると，その速度が $v^2 = -\phi$ となることを示せ．

(a)　$G = 6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$，$m_{\Theta} = 1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg}$，$r = 6.960\times10^{8}\,\mathrm{m}$

$$\phi = -\frac{Gm}{r} \qquad (8.2)$$

$$= -6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}\times1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg}/6.960\times10^{8}\,\mathrm{m}$$

$$= -1.907\times10^{11}\,\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}$$

$$= -1.907\times10^{11}\,\mathrm{m}^2\times\left(2.998\times10^{8}\,\mathrm{m}\right)^{-2}$$

$$= -2.122\times10^{-6}$$

(b)　$G = 6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$，$m_{\Theta} = 1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg}$，$r = 1.496\times10^{11}\,\mathrm{m}$

$$\phi = -\frac{Gm}{r} \qquad (8.2)$$

$$= -6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}\times1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg}/1.496\times10^{11}\,\mathrm{m}$$

$$= -8.872\times10^{8}\,\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}$$

$$= -8.872\times10^8\,\mathrm{m}^2\times\left(2.998\times10^8\,\mathrm{m}\right)^{-2}$$
$$= -9.871\times10^{-9}$$

(c)　$G = 6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$，$m_\oplus = 5.973\times10^{24}\,\mathrm{kg}$，$r = 6.371\times10^6\,\mathrm{m}$

$$\phi = -\frac{Gm}{r} \qquad (8.2)$$
$$= -6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}\times5.973\times10^{24}\,\mathrm{kg}/6.371\times10^6\,\mathrm{m}$$
$$= -6.256\times10^7\,\mathrm{m^2s^{-2}}$$
$$= -6.256\times10^7\,\mathrm{m}^2\times\left(2.998\times10^8\,\mathrm{m}\right)^{-2}$$
$$= -6.961\times10^{-10}$$

(d)　$\dfrac{2\times\pi\times1.496\times10^{11}\,\mathrm{m}}{365.25\times24\times3600\mathrm{s}} = 2.979\times10^4\,\mathrm{m/s}$

$$= 2.979\times10^4\,\mathrm{m}\times\left(2.998\times10^8\,\mathrm{m}\right)^{-1} = 9.935\times10^{-5}$$

(e)　太陽の引力と地球の公転の遠心力がバランスしているので，地球上では，太陽の引力の影響は余り感じられない．

(f)　引力と遠心力がバランスするので，

$$f = G\frac{m_\Theta m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$
$$v^2 = G\frac{m_\Theta}{r} = -\phi$$

問題(b)　太陽のニュートン・ポテンシャルの地球軌道での値．
問題(d)　太陽のまわりを軌道運動する地球の速度
を使って，検証すると，

$$\left(2.979\times10^4\,\mathrm{m/s}\right)^2 = -8.872\times10^8\,\mathrm{m^2s^{-2}}$$
$$\left(9.935\times10^{-5}\right)^2 = -9.871\times10^{-9}$$

＋＋＋

（8.20）～（8.21）

練習問題 4
(a)　A を $n\times n$ 行列で，すべての要素が小さく $|A_{ij}| << 1/n$ であるとし，I を単位行列とする．このとき

$$(I+A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + A^4 - \cdots +$$

であることを，次のように証明せよ．(i)　右辺の級数が絶対収束することを，n^2 個の要素について証明し，また　(ii)　右辺に $(I+A)$ を掛けたものが I になることを証明する．
(b)　(a)を使って，式（8.20）から式（8.21）を確かめよ．

(a)　$|A_{ij}| << 1/n$ ならば，すべての固有値の絶対値が 1 未満になり，絶対収束するらしい？？？証明は略．
与式の左辺に $(I+A)$ を掛けると，

$$(I+A)^{-1}(I+A) = I$$

与式の右辺に $(I+A)$ を掛けると，

$$(I+A)\left(I - A + A^2 - A^3 + A^4 - \cdots +\right)$$
$$\left(I - A + A^2 - A^3 + A^4 - \cdots +\right) + \left(A - A^2 + A^3 - A^4 - \cdots +\right) = I$$

したがって，与式が証明された．

(b)　座標の微小変化で，成分が位置の関数であるベクトル ξ^α によって生成される座標変換式（微小ゲージ変換）を考える．

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta)$$

ξ^α が $|\xi^\alpha{}_{,\beta}| << 1$ という意味で微小であるとすると，

$$\Lambda^{\alpha'}{}_\beta = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha{}_\beta + \xi^\alpha{}_{,\beta} \qquad (8.20)$$

$\delta^\alpha{}_\beta$ は単位行列だから，

$$\left(\Lambda^{\alpha'}{}_\beta\right) = I + \left(\xi^\alpha{}_{,\beta}\right)$$

逆変換行列つまり逆行列を求める．

$$\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\right)=\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\right)^{-1}=\left(I+\left(\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right)\right)^{-1}$$

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}=\delta^{\alpha}{}_{\beta}-\xi^{\alpha}{}_{,\beta}+\left(\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right)^{2}-\left(\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right)^{3}+\left(\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right)^{4}+\cdots$$

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}=\delta^{\alpha}{}_{\beta}-\xi^{\alpha}{}_{,\beta}+\mathrm{O}\left(\left|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}\right|^{2}\right) \qquad (8.21)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.25）

練習問題 5

(a)　$h_{\alpha\beta}=\xi_{\alpha,\beta}+\xi_{\beta,\alpha}$ ならば，式（8.25）はゼロとなることを示せ．

(b)　このことから，式（8.25）がゲージ不変であることを議論せよ．

(c)　このことと 7.6 節の練習問題 10 との関係を述べよ．

(a)　$h_{\alpha\beta}=\xi_{\alpha,\beta}+\xi_{\beta,\alpha}$ を代入して，

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(h_{\alpha\nu,\beta\mu}+h_{\beta\mu,\alpha\nu}-h_{\alpha\mu,\beta\nu}-h_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) \qquad (8.25)$$

$$=\frac{1}{2}(\xi_{\alpha,\nu\beta\mu}+\xi_{\nu,\alpha\beta\mu}+\xi_{\beta,\mu\alpha\nu}+\xi_{\mu,\beta\alpha\nu}$$

$$-\xi_{\alpha,\mu\beta\nu}-\xi_{\mu,\alpha\beta\nu}-\xi_{\beta,\nu\alpha\mu}-\xi_{\nu,\beta\alpha\mu})$$

$$=0$$

(b)　$h_{\alpha\beta}=\xi_{\alpha,\beta}+\xi_{\beta,\alpha}$ を代入して，

$$g_{\alpha'\beta'}=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}-\xi_{\alpha,\beta}-\xi_{\beta,\alpha} \qquad (8.22)$$

$$=\eta_{\alpha\beta}$$

◆

$$h_{\alpha\beta}\to h'_{\alpha\beta}=h_{\alpha\beta}-\xi_{\alpha,\beta}-\xi_{\beta,\alpha} \qquad (8.24)$$

$$=\xi_{\alpha,\beta}+\xi_{\beta,\alpha}-\xi_{\alpha,\beta}-\xi_{\beta,\alpha}=0$$

つまり，ゲージ不変である．

(c)

$$\nabla_{\alpha}\xi_{\beta}+\nabla_{\beta}\xi_{\alpha}=0 \qquad (7.45)$$

7.6 練習問題 10 は共変微分を使っているので，曲った時空での場である．本問での式は偏微分を使っているので，ほぼ平坦な場である．

$$h_{\alpha\beta}=\xi_{\alpha,\beta}+\xi_{\beta,\alpha}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.12）～（8.13）

練習問題 6
　弱い重力場の理論では $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ で，$\left| h_{\mu\nu} \right| << 1$ を仮定する．同様に，$g^{\mu\nu}$ は $\eta^{\mu\nu}$ とあまり変わらず，たとえば $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ と書けるとする．練習問題 4(a)を使って，$\delta g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu} + \mathrm{O}\left(h^2\right)$ であることを示せ．したがって，$\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$ は $g^{\mu\nu}$ の平坦からのずれではないことを示せ．

曲った時空が平坦な時空からのずれが小さい場合，リーマン・メトリック $g_{\mu\nu}$ はミンコフスキー・メトリック $\eta_{\mu\nu}$ を使って次のように書ける．

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{8.12}$$

$$\left| h_{\mu\nu} \right| << 1 \tag{8.13}$$

上付添字メトリックは下付添字メトリックの逆行列だから，

$$\left(g^{\mu\nu}\right) = \left(g_{\mu\nu}\right)^{-1} = \left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right)^{-1}$$

練習問題 4(a)を使って，

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \left(h^{\mu\nu}\right)^2 - \left(h^{\mu\nu}\right)^3 + \left(h^{\mu\nu}\right)^4 - \cdots$$

ランダウの誤差項を使って，

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathrm{O}\left(h^2\right)$$

ここで，

$$\delta g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu} + \mathrm{O}\left(h^2\right)$$

とすれば，

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$$

と書ける．

上式から，$\delta g^{\mu\nu}$ が平坦からのずれであって，$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$ は平坦からのずれではない

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.29）～（8.31）

練習問題 7
(a)　$\bar{h} \equiv \bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = -h \equiv -h^{\alpha}{}_{\alpha}$ を証明せよ．
(b)　式（8.31）を証明せよ．

(a)　トレース反転テンソル

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h \tag{8.29}$$

の各項のトレースをとる．

$$\bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}\bar{h}^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}h$$

$$= h^{\alpha}{}_{\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}{}_{\alpha}h^{\alpha}{}_{\alpha} = h^{\alpha}{}_{\alpha} - 2h^{\alpha}{}_{\alpha} = -h^{\alpha}{}_{\alpha}$$

$$\bar{h} \equiv \bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = -h \equiv -h^{\alpha}{}_{\alpha} \qquad (8.28) \quad (8.30)$$

(b)　式（8.30）を式（8.29）に代入すると，

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h}$$

$$h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h} \tag{8.31}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.25）～（8.32）

練習問題 8

式（8.32）を次の順序で示せ.

(a)　$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \eta^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta\mu\nu} + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^2\right)$であることを示せ.

(b)　これから$R_{\alpha\beta}$を$h_{\mu\nu}$の 1 次まで計算せよ.

(c)　$g_{\alpha\beta} R = \eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^2\right)$であることを示せ.

(d)　これによって,

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} R$$

であること，つまり式 (8.29) の意味で，線形化された$G_{\alpha\beta}$は線形化された$R_{\alpha\beta}$のトレース反転であることをいえ.

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} h \qquad (8.29)$$

(e)　このことを使って，式（8.32）の計算をもう少し簡単化せよ.

(a)　次式を使って,

$$g^{\alpha\sigma} = \eta^{\alpha\sigma} + h^{\alpha\sigma} \qquad (8.12b)$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = g^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta\mu\nu}$$

$$= \eta^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta\mu\nu} + h^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta\mu\nu}$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \eta^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta\mu\nu} + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^2\right)$$

(b)　次式とリッチ・テンソルの定義式

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) \qquad (8.25)$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \eta^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta\mu\nu} + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^2\right)$$

◆ $$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \qquad (6.91)$$

を使って，線形近似でのリッチ・テンソルは,

$$R_{\alpha\beta} = \eta^{\mu\sigma} R_{\sigma\alpha\mu\beta} + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^2\right)$$

2015.06.10
8　アインシュタイン方程式　8.6　練習問題

$$= \eta^{\mu\sigma}\frac{1}{2}\left(h_{\sigma\beta,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu,\sigma\beta} - h_{\sigma\mu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\sigma\mu}\right) + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^2\right)$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(h^{\mu}{}_{\beta,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - h^{\mu}{}_{\mu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}\right) + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^2\right) \qquad (8.25c)$$

where $h^{\mu}{}_{\mu} = h$

(c)　リッチ・スカラーの定義式を使って,

◆ $$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} \qquad (6.92)$$

$$g_{\alpha\beta} R = g_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \left(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\right)\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$g_{\alpha\beta} R = \eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^2\right)$$

(d)　アインシュタイン・テンソルの定義式は,

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$$

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\right) R = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} R + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}\right)$$

(e)

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(h^{\mu}{}_{\beta,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - h^{\mu}{}_{\mu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}\right) + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^2\right) \qquad (8.25c)$$

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

を使って，線形近似でのリッチ・スカラーは,

$$R = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left(h^{\mu}{}_{\beta,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - h^{\mu}{}_{\mu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(h^{\mu\alpha}{}_{,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu}{}^{,\alpha\mu} - h^{\mu}{}_{\mu,\alpha}{}^{,\alpha} - h^{\beta}{}_{\beta,\mu}{}^{,\mu}\right)$$

$$R = h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} - h_{,\mu}{}^{,\mu} \qquad (8.25d)$$

where $h^{\mu}{}_{\mu} = h$，$h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} = h_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}$

もう一度

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(h^{\mu}{}_{\beta,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - h^{\mu}{}_{\mu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}\right) + \mathrm{O}\left(h_{\alpha\beta}{}^2\right) \qquad (8.25c)$$

$$\eta_{\alpha\beta} R = \eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

を使って,

$$G_{\alpha\beta}=R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R$$
$$=\frac{1}{2}\left[h^{\mu}{}_{\beta,\alpha\mu}+h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu}-h_{,\alpha\beta}-h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}-\eta_{\alpha\beta}\left(h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu}-h_{,\mu}{}^{,\mu}\right)\right]$$

（8.32’）

$$h^{\alpha\beta}=\bar{h}^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h} \qquad (8.31)$$

を使って，

$$G_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left[\left(\bar{h}^{\mu}{}_{\beta}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\beta}\bar{h}\right)_{,\alpha\mu}+\left(\bar{h}_{\alpha\mu}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}\bar{h}\right)_{,\beta}{}^{,\mu}+\bar{h}_{,\alpha\beta}\right.$$
$$\left.-\left(\bar{h}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}\right)_{,\mu}{}^{,\mu}-\eta_{\alpha\beta}\left(\bar{h}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}\right)^{,\mu\nu}-\eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{,\mu}{}^{,\mu}\right]$$

$$G_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left[\bar{h}^{\mu}{}_{\beta,\alpha\mu}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\beta}\bar{h}_{,\alpha\mu}+\bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}\bar{h}_{,\beta}{}^{,\mu}+\bar{h}_{,\alpha\beta}\right.$$
$$\left.-\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}+\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{,\mu}{}^{,\mu}-\eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}+\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\bar{h}^{,\mu\nu}-\eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{,\mu}{}^{,\mu}\right]$$

上式の第 2，4，5 項は打消しあう．上式の第 6，7，9，10 項は次式の第 1 項になる．上式の第 1 項は次式の第 4 項になる．

アインシュタイン・テンソルの中途形

$$G_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}+\eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}-\bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu}-\bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu}\right] \qquad (8.32)$$

where $\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}=\Box\bar{h}_{\alpha\beta}$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.32）

練習問題 9

(a)　式（8.32）から G_{00} と G_{0i} が $\bar{h}_{\alpha\beta}$ の時間について２階の微分を含まないことを示せ．したがって，６個の方程式 $G_{ij}=\dfrac{8\pi G}{c^4}T_{ij}$ のみが力学的な方程式である．方程式 $G_{0\alpha}=\dfrac{8\pi G}{c^4}T_{0\alpha}$ は束縛方程式とよばれる．それらの式は，ほかの６個の方程式の初期データの関係を与えており，それらのデータをまったく自由に選ぶことはできない．

(b)　式（8.42）は μ と ν がゼロであっても時間の 2 階微分を含んでいる．これは(a)と矛盾しないか？それはなぜか？

(a)

$$G_{00}=-\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{00,\mu}{}^{,\mu}+\eta_{00}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}-\bar{h}_{0\mu,0}{}^{,\mu}-\bar{h}_{0\mu,0}{}^{,\mu}\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{00,\mu}{}^{,\mu}-\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}-2\bar{h}_{0\mu,0}{}^{,\mu}\right]$$
$$G_{0i}=-\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{0i,\mu}{}^{,\mu}+\eta_{0i}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}-\bar{h}_{0\mu,i}{}^{,\mu}-\bar{h}_{i\mu,0}{}^{,\mu}\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{0i,\mu}{}^{,\mu}-\bar{h}_{0\mu,i}{}^{,\mu}-\bar{h}_{i\mu,0}{}^{,\mu}\right]$$
$$G_{ij}=-\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{ij,\mu}{}^{,\mu}+\eta_{ij}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}-\bar{h}_{i\mu,j}{}^{,\mu}-\bar{h}_{j\mu,i}{}^{,\mu}\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{ij,\mu}{}^{,\mu}+\delta_{ij}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}-2\bar{h}_{i\mu,j}{}^{,\mu}\right]$$

$G^{\alpha 0}$ は，$g^{\alpha\beta}$ の時間の１回と空間の１回の微分の関数であり，G^{ij} は，g^{ij} の時間の２回の微分と $g^{\alpha\beta}$ の時間の１回の微分の関数である．したがって，$g^{\alpha 0}$ の時間の２回微分はこの方程式に含まれていない．運動方程式は時間の２回微分の方程式であるので，運動方程式と束縛方程式の位置は次のとおりである．

$$\left(G^{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix} 束 & 束 & 束 & 束 \\ (束) & 運 & 運 & 運 \\ (束) & (運) & 運 & 運 \\ (束) & (運) & (運) & 運 \end{pmatrix}$$

where 運；運動方程式，束；束縛方程式，

( )；独立でない（対称テンソルのため）

(b)　ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）の成分 $T^{\mu 0}$ はエネルギーであり，T^{ij} は運動量であるから．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.41）

練習問題 10

ローレンツ条件式（8.33）を使って，$G_{\alpha\beta}$ を式（8.41）に簡単化せよ．

アインシュタイン・テンソルの中途形の式（8.32）をさらに変形していく．

式（8.33）を使うと，式（8.32）の第 2，3，4 項はゼロである．

$$G_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}$$

ダランベルシャンの定義式（8.37）から，

$$G^{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\Box\bar{h}^{\alpha\beta} \qquad (8.41)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.33）

練習問題 11
　マクスウェル方程式を特殊相対論的に書くと，スカラーポテンシャルϕと 3 次元ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}_i$（符号は$\boldsymbol{E}_i = -\phi_{,i} - \boldsymbol{A}_{i,0}$で定義する）を一形式の成分$\boldsymbol{A}_0 = -\phi$，$\boldsymbol{A}_i$(一形式)$= \boldsymbol{A}_i$(三次元ベクトル)として考えることになる．ゲージ変換は$\phi \to \phi - \partial f/\partial t$，$\boldsymbol{A}_i \to \boldsymbol{A}_i + f_{,i}$という置き換えである．この変換では電場と磁場は変化しない．ローレンツ・ゲージは$\partial\phi/c^2\partial t + \nabla_i \boldsymbol{A}^i = 0$となるゲージである．ゲージ変換とローレンツ・ゲージ条件を 4 次元テンソル記法で書け．線形化した重力理論での同様な方程式との類似点を示せ．

電磁ポテンシャル表現されたマクスウェル方程式は，

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \qquad ①$$

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad ②$$

$$\Box\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad ③$$

$$\Box\boldsymbol{A} - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \boldsymbol{j} \qquad ④$$

電磁ポテンシャル（スカラーポテンシャルϕとベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$）を次のものとする．これは 4 元テンソルである．

$$\vec{A} \to \left(\frac{1}{c}\phi \quad \boldsymbol{A}\right),\quad \tilde{A} \to \left(-\frac{1}{c}\phi \quad \boldsymbol{A}\right) \qquad ⑤$$

次式は②式を書き換えたものである．

$$\boldsymbol{E}_i = -\phi_{,i} - \boldsymbol{A}_{i,0} \qquad ⑥$$

③式と④式のカッコ内をゼロにするものをローレンツ・ゲージ条件という．

$$\partial\phi/c^2\partial t + \nabla_i \boldsymbol{A}^i = 0$$

与式のゲージ変換

$$\phi \to \phi - \partial f/\partial t \qquad ⑦$$

$$\boldsymbol{A}_i \to \boldsymbol{A}_i + f_{,i} \qquad ⑧$$

を①式と②式に代入しても，方程式の形は変わらず，ゲージ不変である．
ローレンツ・ゲージ条件を書き換えると，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A^\mu = 0 \qquad ⑨$$

ゲージ変換を書き換えると，

$$\phi \to \phi + f_{,t} \qquad ⑩$$

$$A^i \to A^i - \nabla_i f \qquad ⑪$$

電磁場と重力場を比較する．
マクスウェル方程式のローレンツ・ゲージ条件

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A^\mu = 0 \qquad \text{(mx7.3)}$$

重力場でのローレンツ・ゲージ条件

◆ $$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \qquad (8.33)$$

マクスウェル方程式から導かれる波動方程式

$$\partial^\nu\partial_\nu A^\mu = \Box A^\mu = -\mu_0 J^\mu \qquad \text{(mx7.6)}$$

弱い重力場でのアインシュタイン方程式（線形理論での場の方程式）

◆ $$\Box\bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \qquad (8.42)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.34）

練習問題 12
　式（8.34）を証明せよ．

◆　$h^{(\text{new})}_{\alpha\beta} = h^{(\text{old})}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}$　（8.24b）

$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$　（8.29b）

これらを使って，

$$\bar{h}^{(\text{new})}_{\mu\nu} = h^{(\text{new})}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{(\text{new})} = h^{(\text{old})}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(h^{\alpha}{}_{\alpha} - 2\xi^{\alpha}{}_{,\alpha}\right)$$

where　$h^{(\text{new})} = h^{\alpha}{}_{\alpha} - 2\xi^{\alpha}{}_{,\alpha}$

$$\bar{h}^{(\text{old})}_{\mu\nu} = h^{(\text{old})}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\alpha}{}_{\alpha}$$

として，

$$\bar{h}^{(\text{new})}_{\mu\nu} = \bar{h}^{(\text{old})}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha} \qquad (8.34)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（）

練習問題 13
　ニュートン的な系に対する不等式$\left|T^{00}\right| >> \left|T^{0i}\right| >> \left|T^{ij}\right|$は, 練習問題 2(c), 3(d)〜(e)で例が示されている．この関係が一般にも成り立つことを物理的に説明せよ．

$T^{\mu\nu}$は，ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）という．

T^{00}；エネルギー密度

T^{0j}；x^j方向へのエネルギーの流れ

T^{i0}；i成分の運動量密度

T^{ij}；x^j方向へのi成分の運動量の流れ

物質の平均自由行程が全体のスケールに比べて短いとき，流体近似が可能である.さらに流体の静止系で,圧力が等方的であり（応力テンソルが対角的であり），粘性のない場合，完全流体として考えることができる．このとき，

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + p/c^2\right)U^{\mu}U^{\nu} + g^{\mu\nu}p$$

非相対論的（ニュートン的）な場合，

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu},\quad \left|\beta^i\right| = \left|v^i/c\right| << 1,\quad \rho c^2 >> p$$

である．

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho\beta_x & \rho\beta_y & \rho\beta_z \\ \rho\beta_x & p+\rho{\beta_x}^2 & \rho\beta_x\beta_y & \rho\beta_z\beta_x \\ \rho\beta_y & \rho\beta_x\beta_y & p+\rho{\beta_y}^2 & \rho\beta_y\beta_z \\ \rho\beta_z & \rho\beta_z\beta_x & \rho\beta_y\beta_z & p+\rho{\beta_z}^2 \end{pmatrix}$$

したがって，

$$\left|\rho c^2\right| >> \left|\rho\beta_i\right| >> \left|p+\rho{\beta_i}^2\right|$$

$$\left|T^{00}\right| >> \left|T^{0i}\right| >> \left|T^{ij}\right|$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.46）～（8.50）

練習問題 14
　式（8.46）と成分 $h_{\alpha\beta}$ の間に成り立つ不等式を使って，式（8.47）～（8.50）を書け．

ニュートンの重力理論が成り立つのは，重力場が十分に弱くて光速度に近い速度まで加速しないとき，つまり，

$$|m\phi| << mc^2,\quad |\phi|/c^2 << 1$$

このとき，練習問題 13 の式

$$|T^{00}| >> |T^{0i}| >> |T^{ij}|$$

が成り立つ．さらに，
弱い重力場でのアインシュタイン方程式（線形理論での場の方程式）

◆ $$\Box \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \tag{8.42}$$

によって，

$$|\bar{h}^{00}| >> |\bar{h}^{0i}| >> |\bar{h}^{ij}|$$

となる．
$T^{00} = \rho c^2 + \mathrm{O}(\rho v^2)$ だから，

$$\Box \bar{h}^{00} = -\frac{16\pi G\rho}{c^2} \tag{8.43}$$

$$\Box = \nabla^2 + \mathrm{O}(v^2\nabla^2) \tag{8.44}$$

と書けるので，

$$\nabla^2 \bar{h}^{00} = -\frac{16\pi G\rho}{c^2} \tag{8.45}$$

これを

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho \tag{8.1}$$

と比べて，

$$\bar{h}^{00} = 4\phi / c^2 \qquad (8.46)$$

$\bar{h}^{\alpha\beta}$ のほかの成分はこのオーダーでは無視できるので，

$$h = h^{\alpha}{}_{\alpha} = -\bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = \bar{h}^{00} \qquad (8.47)$$

であって，このことから，

$$h^{00} = -2\phi / c^2 \qquad (8.48)$$

$$h^{xx} = h^{yy} = h^{zz} = -2\phi / c^2 \qquad (8.49)$$

メトリックを計算すると，

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 - 2\phi / c^2$$

$$g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = \eta_{xx} + h_{xx} = \eta_{yy} + h_{yy} = \eta_{zz} + h_{zz} = 1 - 2\phi / c^2$$

だから，線要素は，

$$ds^2 = -\left(1 + 2\phi / c^2\right)c^2 dt^2 + \left(1 - 2\phi / c^2\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \qquad (8.50)$$

where　$\phi = -GM / r$， $|m\phi| << mc^2$， $|\phi| / c^2 << 1$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.50）

練習問題 15

　弱い重力場の問題（あるいはほかの場合でも）を扱うには適切な座標系を使うべきであるが，物理的な結果は座標に依存しない言葉で表現すべきであることを議論した．この立場からすると，ニュートン極限を導いたやり方は不十分である．７章では，式（8.50）のメトリックがニュートンの法則 $d\boldsymbol{p} / dt = -m\nabla\phi$ を与えることを示したにすぎないからである．明らかにこの式は座標時間と位置座標を含んだ座標依存性のある方程式である．そして，明らかに４次元的な適切なテンソル方程式ではない．物理的な測定によって，相対論的な結果がニュートン的な結果に一致することを確かめることができることを示して，上記の議論の欠陥を補え.(たとえば，ある軌道上での固有時間とその固有な円周の長さの関係はどうなっているか？)

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.50）

練習問題 16

　式（8.10）で$8\pi G/c^4$をkで置き換え，この置き換えによって変化する以後の式をたどっていって，ニュートン極限を書き直せ．$k=8\pi G/c^4$のときのみ，式（8.50）が再現されることを確かめよ．

【Reference】
Peter Dunsby “Tensors and Relativity”
http://www.mth.uct.ac.za/omei/gr/
私のＨＰに PDF 版が用意されている．PDF の pp142-147 を参照のこと．

広江　克彦（通称 EMAN）「相対性理論」
http://eman-physics.net/relativity/contents.html
私のＨＰに PDF 版が用意されている．PDF の pp167-172 を参照のこと．
＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（）

練習問題 17

　(a)　静的な中性子星のまわりに，固有の円周の長さが6×10^{11}m の円軌道を描いている小さな惑星がある．その軌道周期は惑星の固有時間で 200 日である．中性子星の質量Mを求めよ．

　(b)　静的なブラックホールのまわりに，5 個の衛星が円軌道を描いている．固有の円周の長さと固有軌道周期は下の表に与えてある．(a)の方法によって，ブラックホールの質量を求めよ．各衛星から得られた結果の傾向を説明せよ．

固有の円周の長さ（m）	2.5×10^6	6.3×10^6	6.3×10^7	3.1×10^8	6.3×10^9
固有周期（秒）	8.4×10^{-3}	0.055	2.1	23	2.1×10^3

　(a)　引力と遠心力のバランス式は，

$$f=G\frac{Mm}{r^2}=\frac{mv^2}{r}$$

$$M=\frac{rv^2}{G}$$

$v=\dfrac{2\pi r}{P}$だから，

$$M=\frac{4\pi^2r^3}{P^2G}$$

$a=2\pi r$として，

$$M=\frac{a^3}{2\pi P^2G}$$

$$M=\frac{\left(6\times10^{11}\mathrm{m}\right)^3}{2\pi\times(200\times24\times3600\mathrm{s})^2\times6.67\times10^{-11}\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{kg}}$$

$$=1.73\times10^{30}\,\mathrm{kg}$$

（練習問題 2 から）

$$=1.73\times10^{30}\times7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}$$

$$=1280\mathrm{m}\sim 1M_{\Theta}$$

(b)

$$M=\frac{\left(2.5\times 10^{6}\,\mathrm{m}\right)^{3}}{2\pi\times\left(8.4\times 10^{-3}\,\mathrm{s}\right)^{2}\times 6.67\times 10^{-11}\,\mathrm{m}^{3}/\mathrm{s}^{2}\cdot\mathrm{kg}}$$
$$=5.3\times 10^{32}\,\mathrm{kg}$$
$$=3.9\times 10^{5}\,\mathrm{m}\sim 264M_{\Theta}$$

$$M=\frac{\left(6.3\times 10^{6}\,\mathrm{m}\right)^{3}}{2\pi\times(0.055\mathrm{s})^{2}\times 6.67\times 10^{-11}\,\mathrm{m}^{3}/\mathrm{s}^{2}\cdot\mathrm{kg}}$$
$$=1.8\times 10^{32}\,\mathrm{kg}$$
$$=1.5\times 10^{5}\,\mathrm{m}\sim 101M_{\Theta}$$

$$M=\frac{\left(6.3\times 10^{7}\,\mathrm{m}\right)^{3}}{2\pi\times(2.1\mathrm{s})^{2}\times 6.67\times 10^{-11}\,\mathrm{m}^{3}/\mathrm{s}^{2}\cdot\mathrm{kg}}$$
$$=1.4\times 10^{32}\,\mathrm{kg}$$
$$=1.0\times 10^{5}\,\mathrm{m}\sim 68M_{\Theta}$$

$$M=\frac{\left(3.1\times 10^{8}\,\mathrm{m}\right)^{3}}{2\pi\times(23\mathrm{s})^{2}\times 6.67\times 10^{-11}\,\mathrm{m}^{3}/\mathrm{s}^{2}\cdot\mathrm{kg}}$$
$$=1.3\times 10^{32}\,\mathrm{kg}$$
$$=0.99\times 10^{5}\,\mathrm{m}\sim 68M_{\Theta}$$

$$M=\frac{\left(6.3\times 10^{9}\,\mathrm{m}\right)^{3}}{2\pi\times\left(2.1\times 10^{3}\mathrm{s}\right)^{2}\times 6.67\times 10^{-11}\,\mathrm{m}^{3}/\mathrm{s}^{2}\cdot\mathrm{kg}}$$
$$=1.4\times 10^{32}\,\mathrm{kg}$$
$$=1.0\times 10^{5}\,\mathrm{m}\sim 68M_{\Theta}$$

算出式がニュートン的だから，円周が長いほど周期が長いほどニュートン的になるので，正しい質量を与える．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 18

Λ を適当にとり $k=8\pi G/c^4$ として，宇宙項のある場の方程式（8.7）を考える．

(a)　ニュートン極限を求め，$|\Lambda|$ が十分小さいときのみ，惑星の運動を正しく導くことができるとことを示せ. 冥王星の軌道半径が $5.9\times 10^{12}\,\mathrm{m}$ であるとすると，太陽系での測定によって，$|\Lambda|$ の上限はどうなるか？

(b)　Λ を式（8.7）の右辺に移項すると，$-\Lambda g^{\mu\nu}c^4/8\pi G$ を“からっぽの空間”のストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）と見なすことができる．宇宙のなかで，われわれの銀河の近傍の領域で観測される質量の密度は，一様分布を仮定すると，約 $10^{-27}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ である．(a)で求めた $|\Lambda|$ の上限値をとると，観測できる宇宙論的な影響が出てくると思うか？

(a)　冥王星の軌道半径での太陽の平均質量密度の影響を調べる．

$$\Lambda g^{00}=\frac{8\pi G}{c^4}T^{00}=\frac{8\pi G}{c^4}\rho c^2=\frac{8\pi G}{c^2}\rho$$
$$=\frac{8\pi\times 6.67\times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{kg}}{\left(2.998\times 10^{8}\,\mathrm{m/s}\right)^2}\frac{1.989\times 10^{30}\,\mathrm{kg}}{\frac{4}{3}\pi\left(5.9\times 10^{12}\,\mathrm{m}\right)^3}$$
$$=4.3\times 10^{-35}\,\mathrm{m}^{-2}$$
$$|\Lambda|\le 4.3\times 10^{-35}\,\mathrm{m}^{-2}$$

(b)　式（8.7）から，

$$G^{\alpha\beta}=\frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}-\Lambda g^{\alpha\beta}$$
$$G^{\alpha\beta}=\frac{8\pi G}{c^4}\left(T^{\alpha\beta}-\frac{c^4}{8\pi G}\Lambda g^{\alpha\beta}\right)$$

右辺の各項を比較する．

$$第1項 = \frac{8\pi G}{c^4}T^{00} = \frac{8\pi G}{c^4}\rho c^2 = \frac{8\pi G}{c^2}\rho$$

$$= \frac{8\pi \times 6.67\times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{kg}}{\left(2.998\times 10^8\,\mathrm{m/s}\right)^2}\times 10^{-27}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$$

$$= 1.9\times 10^{-53}\,\mathrm{m}^{-2}$$

$$第2項 = -\Lambda g^{00} = 4.3\times 10^{-35}\,\mathrm{m}^{-2}$$

＋＋＋

（8.45）

練習問題 19

この問題では，回転している重力源がニュートン的な解に対して，及ぼす１次の補正を計算する．ニュートンの重力理論では，重力源の角運動量は場に影響しない．つまり同じ $\rho\left(x^i\right)$ 分布で異なる角運動量をもつ二つの重力源は同じ場を与える．相対論では $T^{\mu\nu}$ のすべての成分が場をつくるので影響が現れる．

(a)　一様密度 ρ で半径 R の球が一定角速度 Ω で x^3 軸のまわりに回転しているとする．ρ，Ω，R が時間的に一定であるとして，球の重心が静止しているようなローレンツ系をとって，成分 $T^{0\nu}$ を書き下せ．各成分に対して，ΩR に関して最低次の項を計算せよ．

(b)　$\nabla^2 f = g$ の一般解で，無限遠でゼロになるものは，式（8.2）を一般化したもので，

$$f(x) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{g(y)}{|x-y|}d^3y$$

と書け，g が小領域でゼロでないとき式（8.2）に移行する．(a)で示された重力源について，このことを使って式（8.42）を $\bar{h}^{00}$ と $\bar{h}^{0j}$ について解け．物体の外部についての解を，r^{-1} のゼロでない最低次の項まで計算せよ．ここで，r は球の中心からの距離である．$\bar{h}^{0j}$ についての結果を物体の角運動量を使って表せ．この近似の範囲で，メトリックテンソルを求め，それを球座標に変換せよ．

(c)　メトリックは t にも角度 ϕ にも依存しないので，この物体のまわりで軌道運動する粒子では，軌道に沿って p_0 と p_ϕ が一定になる（7.4 節参照）．赤道面上で半径 r の円軌道を描く質量がゼロでない粒子を考える．正の方向（中心の天体の回転と同じ方向の回転）と負の方向での軌道周期の差を最低次まで計算せよ．（周期を軌道を一周して $\Delta\phi = 2\pi$ 変化するのにかかる座標時間として定義せよ．）

(d)　このことから，中心天体の角運動量$\boldsymbol{J}$を求めるための実験法を考えよ．中心天体として太陽（$M=2\times10^{30}\,\mathrm{kg}$，$R=7\times10^{8}\,\mathrm{m}$，$\Omega=3\times10^{-6}\,\mathrm{s}^{-1}$をとり，軌道運動する物体として地球（$r=1.5\times10^{11}\,\mathrm{m}$）をとろう．正の方向と負の方向で一年の差はいくらか？

(a)

$$T^{00}=\rho$$

$$T^{01}=-\rho\Omega x^2$$

$$T^{02}=\rho\Omega x^1$$

$$T^{03}=0$$

T^{ij}成分は与えられている情報からは完全に決定されないが，それらは，$\rho v^i v^j$，すなわち，$\rho\Omega^2R^2$のオーダーである．

(b)

$$\nabla^2\bar{h}^{00}=-\frac{16\pi G\rho}{c^2} \qquad (8.45)$$

$$\nabla^2\phi=4\pi G\rho \qquad (8.1)$$

から，

$$\bar{h}^{00}=-\frac{4\phi}{c^2}=\frac{4GM}{r}$$

$\bar{h}^{0i}$に対しては，

$$\bar{h}^{0i}=-4\rho\Omega\int y^2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{-1}d^3y$$

二項展開

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{-1}=r^{-1}\left[1+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}/r^2+\mathrm{O}(R/r)^2\right]$$

を求める．対称性より，

$$\int y^i d^3y=0$$

$$\int y^i y^j d^3y=0 \quad (i\neq j)$$

$$\int y^1y^1d^3y=\int y^2y^2d^3y=\int y^3y^3d^3y=(4\pi/15)R^2$$

これから，

$$\bar{h}^{01}=-(16\pi/15)\rho R^5\Omega x^2/r^3$$

角運動量Jを用いると，

$$\bar{h}^{01}=-2Jx^2/r^3$$

$$\bar{h}^{02}=2Jx^1/r^3$$

$$\bar{h}^{03}=0$$

これらはすべてr^{-2}のように小さくなり，r^{-3}のオーダーまで正しい．$\nabla^2 f=g$という方程式の研究によれば，上式は厳密に成り立つ．すなわち，すべての高次の項はゼロである．

T^{ij}が小さいので，$\bar{h}^{ij}$成分は，$\bar{h}^{00}$，$\bar{h}^{0i}$に比べて小さい．したがって，

$$h^{\alpha\beta}=\bar{h}^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h} \qquad (8.31)$$

が$h^{\mu\nu}$を与え，メトリックは，

$$g_{00}=-1+\frac{2GM}{r}+\mathrm{O}(\Omega^2R^2)$$

$$g_{01}=\frac{2Jx^2}{r^3}+\mathrm{O}(\Omega^3R^3)$$

$$g_{02}=-\frac{2Jx^1}{r^3}+\mathrm{O}(\Omega^3R^3)$$

$$g_{03}=0$$

$$g_{ij}=\delta_{ij}\left(1+\frac{2GM}{r}\right)+\mathrm{O}(\Omega^2R^2)$$

◆ $$ds^2=-(1+2\phi/c^2)c^2dt^2+(1-2\phi/c^2)(dx^2+dy^2+dz^2) \qquad (7.8)$$

where　$\phi=-GM/r$，$|m\phi|<<mc^2$，$|\phi|/c^2<<1$

と比較する．

標準的な球座標では，g_{00}は同じ，$g_{0r}=g_{0\theta}=0$，$g_{0\phi}=-2J/r$

線要素の空間部分は，

$$dl^2=\left[1+2GM/r-\mathrm{O}(\Omega^2R^2)\right](dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2)$$

(c)　そのような粒子は，$p_0 \equiv -E$，$p_\phi \equiv L$　$(E, L = \mathrm{Const.})$，$p^r = p^\theta = 0$ とした測地線の方程式に従う．このオーダーまでで，規格化条件

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2$$

から，

$$E = m\left(1 - GM / r + L^2 / 2m^2 r\right)$$

が導かれ，これはニュートン理論と（静止質量を除いて）一致する．最低次までの測地線の方程式の r 成分から，

$$L = m(Mr)^{1/2}$$

が導かれるが，これもニュートン理論と一致する．一周期 $\Delta\phi = 2\pi$ は時間

$$\Delta t = (dt / d\phi)\Delta\phi$$

を要する．

$$dt / d\phi = (dt / d\tau)/(d\phi / d\tau) = U^0 U^\phi = p^0 p^\phi$$

であり，これは，E，L とメトリックで表される．直接的な計算から，

$$(\Delta t)\mathrm{prograde} - (\Delta t)\mathrm{retrograde} = -8\pi J/M$$

という r に依存しない答えが導かれる．原理的にはこれから物体の角運動量を，そのまわりを回る粒子の軌道をしらべることによって測定することができる．

(d)　太陽の慣性モーメント

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5} \times 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg} \times \left(7 \times 10^8\,\mathrm{m}\right)^2 = 4 \times 10^{47}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$$

太陽の角運動量

$$J = I\omega = 4 \times 10^{47}\,\mathrm{kg \cdot m^2} \times 3 \times 10^{-6}\,\mathrm{s^{-1}} = 1 \times 10^{42}\,\mathrm{kg \cdot m^2 / s}$$

問題(c)から，

$$8\pi J/M = \frac{8\pi \times 1 \times 10^{42}\,\mathrm{kg \cdot m^2 / s}}{2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}} = 1.3 \times 10^{13}\,\mathrm{m^2 / s}$$

$$\phi = -\frac{GM}{r} = -\frac{6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 / s^2 \cdot kg} \times 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}}{1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}}$$

$$= -9 \times 10^8\,\mathrm{m^2 / s^2}$$

$$v = \frac{2\pi \times 1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}}{365.24 \times 24 \times 3600\mathrm{s}} = 9 \times 10^8\,\mathrm{m^2 / s^2}$$

？？？

0.16ms

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（8.61）～（8.62）

練習問題 20

この問題では能動重力質量密度という概念を導入する．式（8.42）で弱い場におけるアインシュタイン方程式を導いた後，速度の遅いニュートン極限の場合のみに限定して扱った．ここでは，速度が遅いとか圧力が密度よりも十分に小さいといった仮定ができない状況を扱ってみよう．

(a)　式（8.42）においてトレース反転操作を行い次式を導け．

$$\Box k^{\mu\nu} = -16\pi\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^{\alpha}{}_{\alpha}\eta^{\mu\nu}\right) \tag{8.61}$$

(b)　考える系が孤立しており定常状態にあるとすると，その系から遠く離れた場所では，式（8･50）を導く際に議論したように，重力場としては，h^{00} が一番大きな成分を与える･その系では内部の重力は弱いが圧力は強い場合，$h^{00} = -2\phi$ となることを示せ．ここで ϕ はニュートン的なポアソン方程式

$$\nabla^2\phi = 4\pi\left(\rho + T^{k}{}_{k}\right) \tag{8.62}$$

を満たす量である．完全流体の場合，この式の右辺は $4\pi(\rho+3p)$ となり,それを一般相対論では能動重力質量密度という．系がニュートン的であると，$p \ll \rho$ なので,過常のニュートン極限になる．これはポスト･ニュートン効果の第二の例である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

【Referencies】

Petros Souvatzis “The linearized theory of gravitational radiation and the detection of gravitational waves”
http://www.teorfys.uu.se/courses/exjobb/
http://www.teorfys.uu.se/courses/exjobb/gravwavs.doc
Carl Philip Dettmann “General Relativity”
http://www.maths.bris.ac.uk/~macpd/
http://www.geol.sci.hiroshima-u.ac.jp/~nakakuki/naibutsu/resume2007/lec-05-20070621.pdf

9　重力波

トランスバース - トレースレスゲージ，波動方程式，重力波の発生，重力波の検出

9.1　重力波の伝播　　（9.1）～（9.12）

【表記法】ダランベルシャン（４次元ラプラシアン）の定義式.

$$\Box \equiv -\frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2}+\frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2}+\frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2}+\frac{\partial^2}{\partial (x^3)^2}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Box \equiv -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2=-\frac{1}{c^2}(\partial_t)^2+\Delta=\partial_\mu\partial^\mu$$

$$\Box f=\partial_\mu\partial^\mu f=f^{,\mu}{}_{,\mu}=\eta^{\mu\nu}f_{,\mu\nu}=\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)f \qquad (8.37)$$

弱い重力場でのアインシュタイン方程式（線形理論での場の方程式）

◆ $$\Box \bar{h}^{\mu\nu}=-\frac{16\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \qquad (8.42)$$

where　$\bar{h}^{\mu\nu}$ ：trace reverse of the metric perturbation（無次元）

$T^{\mu\nu}$ ：ストレス - エネルギーテンソル（エネルギー・運動量テンソル）（圧力 $\mathrm{kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-2}}$ の次元をもつ）

G ：万有引力定数 $G=6.673\times10^{-11}\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}\cdot s^{-2}$

両辺は m^{-2} の次元をもつ

は真空中（$T^{\mu\nu}=0$）で次の形をとり，３次元波動方程式とよばれる.

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\bar{h}^{\alpha\beta}=0,\quad \Box\bar{h}^{\alpha\beta}=0,\quad \bar{h}^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu}=0 \qquad (9.1)$$

練習問題 1　　　（9.4）

これは次の場合に限って消える.

$$\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu=k^\nu k_\nu=0 \qquad (9.5)$$

したがって，式（9.2）は k_α がヌル一形式，それに付随する４元ベクトル k^α がヌル，すなわち光子の世界線に接する場合，式（9.1）の解となる.

式（9.2）は波動的な解を表す．$\bar{h}^{\alpha\beta}$ の値は，$k_\alpha x^\alpha$ が一定となる超平面上で一定である.

$$k_\alpha x^\alpha=k_0ct+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=\mathrm{Const.} \qquad (9.6)$$

$\omega=k^0c$ とし，波の振動数とよばれる.

$$\vec{k}\to(\omega/c,\boldsymbol{k}) \qquad (9.7)$$

は，$\vec{k}$ の時間 - 空間分解である．あるヌルベクトル $\vec{k}$ の方向に動いている光子を考える．それは次の曲線上を動く.

$$x^\mu(\lambda)=k^\mu\lambda+l^\mu \qquad (9.8)$$

where　λ はパラメーター，

l^μ は定数ベクトル（$\lambda=0$ での光子の位置）

式（9.8）と（9.5）から，

$$k_\mu x^\mu(\lambda)=k_\mu l^\mu=\mathrm{Const.} \qquad (9.9)$$

これを式（9.6）と比べると，光子は重力波とともに走り，永久に同じ位相にとどまっている．$\vec{k}$ がヌルベクトルであることは，次式を意味する.

$$\omega^2/c^2=|\boldsymbol{k}|^2=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=(k_1)^2+(k_2)^2+(k_3)^2 \qquad (9.10)$$

これは波動に対する分散係数とよばれる．波の位相速度が，その群速度と同様に c である.

アインシュタイン方程式は，次のゲージ条件

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0 \qquad (9.11)$$

のときにのみ，式（9.1）の簡単な形をとる．式（9.4）から，

◇ $$A^{\alpha\beta}k_\beta=0 \qquad (9.12)$$

これが $A^{\alpha\beta}$ に対する制限である．$A^{\alpha\beta}$ と $\vec{k}$ は直交している.

解 $A^{\alpha\beta}\exp(ik_\mu x^\mu)$ は平面波とよばれる．フーリエ解析の定理から，式(9.1)と式(9.11)のどんな解も平面波解の重ね合わせで表される.

練習問題 2　　　(9.2)
練習問題 3　　　(9.10)

トランスバース - トレースレスゲージ　　　(9.13) ～ (9.21)

振幅 $A^{\alpha\beta}$ に対しての制限である式 (9.12) 以外にも，ゲージの自由度を用いるとさらに制限をつけることができる．

$$\Box f = g \tag{8.38}$$

式 (8.38) から次の方程式

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\xi_\alpha = 0 \tag{9.13}$$

を満たす任意のベクトル ξ^α を用いるとローレンツ・ゲージ

◆ $$\bar{h}^{\mu\nu(\mathrm{new})}{}_{,\nu} = 0 \tag{8.33}$$

$$\Box\left(\xi^\mu + \eta^\mu\right) = \bar{h}^{(\mathrm{old})\mu\nu}{}_{,\nu} \tag{8.40}$$

の範囲内でゲージを変えることができる．
次の解を選ぶ．

$$\xi_\alpha = B_\alpha \exp\left(ik_\mu x^\mu\right) \tag{9.14}$$

where B_α は定数，k^μ は波動解と同じヌルベクトル

この解は式 (8.24) で与えられる変化を引き起こす．

◆ $$h_{\alpha\beta}^{(\mathrm{new})} = h_{\alpha\beta}^{(\mathrm{old})} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \tag{8.24b}$$

$$h_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})} = h_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \tag{9.15}$$

練習問題 4　　　(9.16) ～ (9.17)

次の二つの制限を $A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})}$ に課すように，B_α が選ぶことができる．

◇ $$A^\alpha{}_\alpha = 0 \tag{9.18}$$

この条件をトレースレスという．

◇ $$A_{\alpha\beta}U^\beta = 0 \tag{9.19}$$

where U^β は任意に選べる時間的な定数ベクトル

この条件をトランスバースという．

◇ $$A^{\alpha\beta}k_\beta = 0 \tag{9.12}$$

式 (9.12)，(9.18)，(9.19) の全体を，トランスバース - トレースレス (TT) ゲージ条件という．

練習問題 5　　　(9.15) ～ (9.19)

トレースレス条件 (9.18) は次を意味する．

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{TT} = h_{\alpha\beta}^{TT} \tag{9.20}$$

練習問題 6　　　(9.21)

自由粒子に対する波の影響　　　(9.22) ～ (9.24)

はじめは波のない時空領域にいた粒子が，重力波と出会う．粒子がはじめに静止しているようなローレンツ系を選び，この系に対する TT ゲージをとる．
自由粒子は測地線方程式に従う．

$$\frac{d}{d\tau}U^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0 \tag{9.22}$$

最初，粒子は静止しているから，その加速度の初期値は，

$$\left(\frac{dU^\alpha}{d\tau}\right)_0 = -\Gamma^\alpha{}_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left(h_{\beta 0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}\right) \tag{9.23}$$

式 (9.21) から $h_{\beta 0} = 0$ だから初期加速度は 0 になる．

練習問題 7　　　(9.22) ～ (9.23)
練習問題 8　　　(9.23)

近傍にある 2 つの粒子の間の固有距離

$$\Delta l = \int \left| ds^2 \right|^{1/2} = \int \left| g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \right|^{1/2}$$

$$= \int_0^\varepsilon \left| g_{xx} \right|^{1/2} dx \approx \left| g_{xx}(x=0) \right|^{1/2} \varepsilon$$

$$\approx \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(x=0) \right] \varepsilon \qquad (9.24)$$

練習問題 9　　　（9.23）～（9.24）

練習問題 10　　　()

最初に x 方向に ε だけ離れていた粒子が次式に従う連結ベクトルをもつ.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^x = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{TT}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^y = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}^{TT} \qquad (9.28a)$$

最初に y 方向に ε だけ離れていた粒子が次式に従う連結ベクトルをもつ.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^y = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{yy}^{TT} \; \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{TT}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^x = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}^{TT} \qquad (9.28b)$$

重力波の偏光

練習問題 11　　（9.27）～（9.28）
練習問題 12　　（9.27）～（9.28）
練習問題 13　　（9.27）～（9.28）
練習問題 14　　（9.27）～（9.28）
練習問題 15　　（9.27）～（9.28）
練習問題 16　　（9.27）～（9.28）

節の中で使われている公式と問題

9.1　重力波の伝播　　（9.1）～（9.32）
　問題 1，2，3
トランスバース - トレースレスゲージ　　（9.13）～（9.21）
　問題 4，5，6
自由粒子に対する波の影響　　（9.22）～（9.24）
　問題 7，8，9
潮汐加速度：重力波による力　　（9.25）～（9.28）
　問題 10
空間ののびを測る　　（9.29）～（9.31）

重力波の偏光　　()
　問題 11，12，13，14，15，16
平面波の厳密解　　（9.32）

幾何光学：曲った時空中の波動　　()

9.2　重力波の検出　　（9.33）～（9.63）

共鳴型検出器　　（9.33）～（9.57）

現在観測に使用されているバー型検出器　　()

光を使って距離を測る　　（9.58）～（9.63）

ビーム検出器　　()

干渉計による観測　　()

9.3　重力波の発生　　（9.64）～（9.106）

遅い運動による波動の発生	（9.64）～（9.99）
大きさのオーダーの評価	（9.100）
波動方程式の厳密解	（9.101）～（9.106）
9.4　重力波によって運ばれるエネルギー	（9.107）～（9.146）
重力波のエネルギー流速	（9.107）～（9.122）
輻射している系から失われるエネルギー	（9.123）～（9.146）
9.5　天体物理的な重力波源	（9.147）～（9.148）
自転する中性子星	()
重力崩壊	()
ビックバンからの重力波	()

2011.06.10

（9.4）

練習問題 1

関数 $f(s)$ が微分 $f'(s)=df/ds$ をもつ．$\partial f\left(k_\mu x^\mu\right)/\partial x^\nu = k_\nu f'(k_\mu x^\mu)$ を示せ．これを用いて式（9.4）とその次の式を示せ．

問題の式は，

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} f\left(k_\mu x^\mu\right) = \frac{\partial\left(k_\mu x^\mu\right)}{\partial x^\nu}\frac{\partial f\left(k_\mu x^\mu\right)}{\partial\left(k_\mu x^\mu\right)} = k_\nu f'(k_\mu x^\mu)$$

式（9.1）の解

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}\exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right) \qquad (9.2)$$

where $\{k_\alpha\}$はある一形式の定数成分，

$\{A^{\alpha\beta}\}$はあるテンソルの定数成分

から，

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu} = A^{\alpha\beta}\frac{d}{dx^\mu}\exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right) = ik_\mu A^{\alpha\beta}\exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right) = ik_\mu \bar{h}^{\alpha\beta}$$

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu} = ik_\mu \bar{h}^{\alpha\beta} \qquad (9.4)$$

となる．

ダランベルシャンの定義式（8.37）から，式（9.1）は次のように書ける．

$$\eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = 0 \qquad (9.3)$$

上式の左辺は，

$$\eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}A^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right) = i^2 k_\mu k_\nu \eta^{\mu\nu}A^{\alpha\beta}\exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right)$$

$$\eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \qquad (9.3’)$$

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = -k_\mu k_\nu \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \qquad ；式（9.4）の次の式 \qquad (9.3’’)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.2）

練習問題 2

　ある固定した空間点$\{x^i\}$で式（9.2）の実部と虚部は振動数$\omega = k^0 c$で時間的に正弦振動することを示せ.

$$k_\alpha x^\alpha = k_0 ct + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = \text{Const.} \tag{9.6}$$

から,

$$k_\alpha x^\alpha = k_0 ct + k_i x^i = \omega t + \theta$$

式（9.2）から，オイラーの公式を使って,

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}\exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right) = A^{\alpha\beta}\exp\left(i(\omega t+\theta)\right)$$

$$= A^{\alpha\beta}\cos(\omega t+\theta) + iA^{\alpha\beta}\sin(\omega t+\theta)$$

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}\cos(\omega t+\theta) + iA^{\alpha\beta}\sin(\omega t+\theta)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.10）

練習問題 3

　$\bar{h}^{\alpha\beta}\left(ct, x^i\right)$を$\int dx^\alpha \left|\bar{h}^{\mu\nu}\right|^2 < \infty$の性質をもつ式（9.1）の解とする．ここで積分は他の座標を固定して，x^αにわたってとる．次のように，$\bar{h}^{\alpha\beta}\left(ct, x^i\right)$のフーリエ変換を定義する.

$$\bar{H}^{\alpha\beta}\left(\omega/c, k^i\right) = \int \bar{h}^{\alpha\beta}\left(ct, x^i\right)\exp\left(i\omega t - ik_j x^j\right) c\,dt\,d^3x \tag{9.201}$$

式（9.1）を変換することによって，$\bar{H}^{\alpha\beta}\left(\omega/c, k^i\right)$は式（9.10）を満たす$\omega$と$k^i$の値以外でゼロとなることを示せ．逆変換を適用することによって，$\bar{h}^{\alpha\beta}\left(ct, x^i\right)$を平面波の重ね合せとして書け.

【ポイント】上の公式は多次元フーリエ変換の定義である.

$$\int \bar{h}^{\alpha\beta}\left(x^\mu\right)\exp\left(-ik_\mu x^\mu\right) d^4 x^\mu \tag{9.202}$$

を，$\mu = 0, 1, 2, 3$について 4 回積分する.

$$x^0 = ct\,,\quad k^0 = \omega/c\,,\quad k_0 x^0 = \omega t$$

であることに注意.

？？？

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.16）～（9.17）

練習問題 4
式（9.16）と式（9.17）を導け．

8.6 練習問題 12 を参照のこと．
トレース反転テンソルの式は，

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h \qquad (8.29b)$$

上式と式（9.15）を使って，

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})} = h_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h^{(\mathrm{NEW})}$$

$$= h_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left(h^{\mu}{}_{\mu} - 2\xi^{\mu}{}_{,\mu}\right)$$

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} = h_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h^{\alpha}{}_{\alpha}$$

として，

◇ $$\bar{h}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})} = \bar{h}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta}\xi^{\mu}{}_{,\mu} \qquad (9.16)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(\mathrm{new})} = \bar{h}_{\mu\nu}^{(\mathrm{old})} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha} \qquad (8.34)$$

練習問題 1 から，

$$\frac{d}{dx^{\mu}}\exp\left(ik_{\alpha}x^{\alpha}\right) = ik_{\mu}\exp\left(ik_{\alpha}x^{\alpha}\right)$$

だから，

$$\xi_{\alpha} = B_{\alpha}\exp\left(ik_{\mu}x^{\mu}\right) \qquad (9.14)$$

を微分すると，

$$\xi_{\alpha,\beta} = iB_{\alpha}k_{\beta}\exp\left(ik_{\mu}x^{\mu}\right)$$

同様に，

$$\xi_{\beta,\alpha} = iB_{\beta}k_{\alpha}\exp\left(ik_{\mu}x^{\mu}\right)$$

$$\xi^{\mu}{}_{,\mu} = \eta^{\mu\sigma}\xi_{\sigma,\mu} = \eta^{\mu\sigma}iB_{\sigma}k_{\mu}\exp\left(ik_{\mu}x^{\mu}\right) = iB^{\mu}k_{\mu}\exp\left(ik_{\mu}x^{\mu}\right)$$

上式と次式を式（9.16）に代入して，

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}\exp\left(ik_{\alpha}x^{\alpha}\right) \qquad (9.2)$$

$$A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})}\exp\left(ik_{\mu}x^{\mu}\right) = A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})}\exp\left(ik_{\mu}x^{\mu}\right) - iB_{\alpha}k_{\beta}\exp\left(ik_{\mu}x^{\mu}\right)$$
$$- iB_{\beta}k_{\alpha}\exp\left(ik_{\mu}x^{\mu}\right) + i\eta_{\alpha\beta}B^{\mu}k_{\mu}\exp\left(ik_{\mu}x^{\mu}\right)$$

両辺を共通因子で除して，

◇ $$A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})} = A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} - iB_{\alpha}k_{\beta} - iB_{\beta}k_{\alpha} + i\eta_{\alpha\beta}B^{\mu}k_{\mu} \qquad (9.17)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.15）～（9.19）

練習問題 5

(a)　$A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})}$ がゲージ条件 $A^{\alpha\beta}k_\beta = 0$ を満たすなら，式（9.17）で与えられる $A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})}$ もそれを満たすことを示せ．

(b)　$A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})}$ に対して式（9.18）を使い，B^μ を制限せよ．

(c)　$A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})}$ に対する式（9.19）は自由な添字 α が 0 から 3 までの任意の値をとれるので，B^μ に 4 つの条件を課すようにみえるが，実際には 3 つの制限しか与えないことを示せ．特別の線形結合 $k^\alpha\left(A_{\alpha\beta}U^\beta\right)$ が任意の B^μ に対して消えることから，これを示せ．

(d)　(b)と(c)を用いて，B^μ を k^μ，$A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})}$，$U^\mu$ の関数として解け．これらが B^μ を決め，これ以上のゲージ自由度はない．

(e)　平面波の重ね合せが式（9.18），（9.19）を満たすように式（9.15）で ξ^β を適当に選べることを示せ．したがって，これらの条件はどんな種類の重力波にも適用することができる．

(f)　静的な解，すなわち $\omega = 0$ の場合，式（9.18），（9.19）は達成できないことを示せ．

(a)　式（9.17）の両辺に $\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}k_\nu$ を掛けると，

右辺の第 1 項は，

$$\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}k_\nu A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} = A^{(\mathrm{OLD})\mu\nu}k_\nu = 0$$

右辺の残りの項も，

$$\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = k^\nu k_\nu = 0 \tag{9.5}$$

を使って，ゼロになる．したがって，

$$\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}k_\nu A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})} = A^{(\mathrm{NEW})\mu\nu}k_\nu = 0$$

(b)

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}\exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right) \tag{9.2}$$

であるから，

◇　$$A^\alpha{}_\alpha = 0 \tag{9.18}$$

は，

$$\bar{h}^\alpha{}_\alpha = 0 \tag{9.203}$$

を意味する．式（9.17）の両辺に $\eta^{\alpha\beta}$ を掛けて，

$$\eta^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})} = \eta^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} - i\eta^{\alpha\beta}B_\alpha k_\beta - i\eta^{\alpha\beta}B_\beta k_\alpha + i\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}B^\mu k_\mu$$

$$A^{(\mathrm{NEW})\alpha}{}_\alpha = A^{(\mathrm{OLD})\alpha}{}_\alpha - iB^\beta k_\beta - iB^\alpha k_\alpha + i4^\mu k_\mu = 0$$

$$A^{(\mathrm{OLD})\alpha}{}_\alpha + 2iB^\alpha k_\alpha = 0$$

$$B^\alpha k_\alpha = \frac{i}{2}A^{(\mathrm{OLD})\alpha}{}_\alpha \tag{9.204}$$

(c)　式（9.17）の両辺に $k^\alpha U^\beta$ を掛けて，

$$k^\alpha U^\beta A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})} = k^\alpha U^\beta A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})}$$
$$- ik^\alpha U^\beta B_\alpha k_\beta - ik^\alpha U^\beta B_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta}k^\alpha U^\beta B^\mu k_\mu$$

$$k^\alpha U^\beta A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{NEW})} = 0 \tag{9.205}$$

(d)　式（9.17）で $\beta = 0$ として，

$$0 = A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} - 2iB_0 k_0 - iB^\mu k_\mu = A_{\alpha\beta}^{(\mathrm{OLD})} - 2iB_0 k_0 + \frac{1}{2}A^{(\mathrm{OLD})\alpha}{}_\alpha$$

$$B_0 = -\frac{i}{2k_0}\left(A_{00}^{(\mathrm{OLD})} + \frac{1}{2}A^{(\mathrm{OLD})\alpha}{}_\alpha\right) \tag{9.206a}$$

式（9.17）で $\beta = j$ として，

$$0 = A_{0j}^{(\mathrm{OLD})} - iB_0 k_j - iB_j k_0$$
$$= A_{0j}^{(\mathrm{OLD})} - i\frac{-i}{2k_0}\left(A_{00}^{(\mathrm{OLD})} + \frac{1}{2}A^{(\mathrm{OLD})\alpha}{}_\alpha\right)k_j - iB_j k_0$$

$$B_i = \frac{i}{2(k_0)^2}\left(-2k_0 A_{0j}^{(\mathrm{OLD})} + k_j\left(A_{00}^{(\mathrm{OLD})} + \frac{1}{2}A^{(\mathrm{OLD})\alpha}{}_\alpha\right)\right) \tag{9.206b}$$

(e)

アインシュタイン方程式が座標系に制限を付けないことから，式（9.15）において任意の微小なベクトル ξ^{β} を自由に選んでよいことになる．

(f)

$\omega=0$ ならば，トレースレス条件式（9.18）から $\vec{k}$ の空間部分は 0 としなければならなくなる．また，式（9.2）から，正弦振動しなくなるので，トランスバース条件式（9.19）も成り立たない．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.21）

練習問題 6

　式（9.21）を導いている段落で，省略されているすべての計算を補え．

$\vec{U}$ を $U^{\beta}=c\delta^{\beta}{}_{0}$（$\vec{U}\to(c,0,0,0)$）となるようなバックグラウンドのローレンツ変換をする．トランスバース条件

◇ $$A_{\alpha\beta}U^{\beta}=0 \tag{9.19}$$

から，

$$A_{\alpha 0}U^{0}=0$$

であるから，すべての α に対して

$$A_{\alpha 0}=0$$

とならなければならない．

この系で波が z 方向に伝わり，

$$\vec{k}\to(\omega/c,0,0,-\omega/c)$$

となるような空間軸を選ぶ．

◇ $$A^{\alpha\beta}k_{\beta}=0 \tag{9.12}$$

から，

$$A^{\alpha 0}k_{0}=0,\quad A^{\alpha 3}k_{3}=0$$

であるから，すべての α に対して

$$A_{\alpha 3}=0$$

とならなければならない． $A_{\mu\nu}$ は波の伝播方向 $\vec{e}_{z}$ に直交する（トランスバース）． A_{xx}， A_{yy}， $A_{xy}=A_{yx}$ だけがゼロでない．さらにトレース条件

◇ $$A^{\alpha}{}_{\alpha}=0 \tag{9.18}$$

から

$$A_{11}+A_{22}=0,\quad A_{xx}=-A_{yy}$$

となる．

$$\left(A_{\alpha\beta}^{TT}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0\\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{9.21}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.22）～（9.23）

練習問題 7

式（9.22），（9.23）から TT ゲージで始めに静止していた自由粒子は静止し続けることが示されるが，そのより厳密な証明を与えよ．

式（9.22）の解は初期位置と U^{α} によって一意的に決定される．関数

$$U^{\alpha}=c\delta^{\alpha}{}_{0},\quad U\to(c,0,0,0)$$

はすべての時間において，式（9.23）のおかげで式（9.22）を満足し，したがって，それは上式なる初期データに対する一意的な解である．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.23）

練習問題 8
　式（9.23）の後の議論で，自由粒子は加速度を感じるか？たとえば，カップの中のスープ（カップの直径は波の波長に比べてはるかに短いとする）は，波が通りすぎるとき，はね回るか？

感じない

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.23）～（9.24）

練習問題 9
　式（9.23）の後の議論で自由粒子は加速度をみるか？これに答えるため，その相対固有距離が式（9.24）で計算される２つの粒子を考える．そのうちの１つを原点とし，それからもう一つの粒子に向って光のビームを送る．そのビームは，跳ね返ってもとの原点に戻るとする．光を出してから受け取りまでに経過する固有時間を計算せよ．（粒子間隔は重力波の波長に比べてはるかに小さいと仮定してよい．）この時間の変化を追うことによって，原点の粒子は２つの粒子の相対加速を“みる”ことができる．

光のビームに対して，

$$ds^2 = 0$$

だから，

$$\frac{cdt}{dx} = \left(\frac{g_{xx}}{|g_{tt}|}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t)$$

したがって，

$$c\Delta t \approx \left(2 + \left\langle h_{xx}^{TT} \right\rangle\right)\varepsilon$$

ここで $\left\langle h_{xx}^{TT} \right\rangle$ は光子の飛行時間にわたる h_{xx}^{TT} の何らかの平均値．$\left\langle h_{xx}^{TT} \right\rangle$ は時間とともに変わり，ε は変わらないから，自由粒子はその直線の粒子に相対的な加速度をみることができる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 10

(a)　$A\left(|A|<<1\right)$ と ω を定数とすると

$$h_{yz}=A\sin\omega(t-x/c)=A\sin k_0(ct-x)\text{，他のすべての}h_{\mu\nu}=0$$

は，式 (9.1) と式 (9.11) の解である．このメトリックテンソルに対して，$R_{\alpha\beta\mu\nu}$ のすべての成分を計算し，そのいくつかはゼロでなく，したがって時空は平坦ではないことを示せ．

(b)　次式で与えられる別のメトリックを考える．

$$h_{yz}=A\sin\omega(t-x/c)=A\sin k_0(ct-x)\text{，}\quad h_{tt}=2B(x-ct)$$

$$h_{tx}=-B(x-ct)\text{，他のすべての}h_{\mu\nu}=0$$

これが場の方程式とゲージ条件を満たすことを示せ．

(c)　(b)のメトリックについて，$R_{\alpha\beta\mu\nu}$ を計算せよ．それが(a)と同じになることを示せ．

(d)　(c)から２つの幾何学は同じであり，メトリックの違いは座標の小さな違いによる．次式を満たす座標変換 ξ^μ を見つけよ．

$$h_{\mu\nu}(a)-h_{\mu\nu}(b)=-\xi_{\mu,\nu}-\xi_{\nu,\mu}$$

(a)　線形近似でのリーマン・テンソルは，

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(h_{\alpha\nu,\beta\mu}+h_{\beta\mu,\alpha\nu}-h_{\alpha\mu,\beta\nu}-h_{\beta\nu,\alpha\mu}\right)\qquad(8.25)$$

問題の式

$$h_{23}=h_{yz}=A\sin k_0(ct-x)$$

から，$\alpha\nu$, $\beta\mu$, $\alpha\mu$, $\beta\nu$ に 23 が入り，その他に 01 が入るものだけ 0 にならない．しかも４つとも符号を除いて同じになる．

$$R_{2013}=\frac{1}{2}h_{23,01}=\frac{1}{2}A\sin k_0(ct-x)_{,tx}=\frac{1}{2}k_0A\cos k_0(ct-x)_{,x}$$

$$=\frac{1}{2}k_0{}^2A\sin k_0(ct-x)=\frac{1}{2}k_0{}^2h_{23}=\frac{1}{2}k_0{}^2h_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2h_{yz}$$

ここで，時間よる微分は $x^0=ct$ よる微分を意味する．

$$R_{2013}=R_{0231}=-R_{2031}=-R_{0213}$$

(b)　場の方程式（9.1）

$$\bar{h}^{23}=h^{23}-\frac{1}{2}\eta^{23}h=\eta^{22}\eta^{33}h_{23}=h_{23}=h_{yz}=A\sin k_0(ct-x)$$

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)A\sin k_0(ct-x)$$

$$=k_0{}^2A\sin k_0(ct-x)-k_0{}^2A\sin k_0(ct-x)=0$$

$$\bar{h}^{00}=h^{00}-\frac{1}{2}\eta^{00}h=\eta^{00}\eta^{00}h_{00}-\frac{1}{2}\eta^{00}\eta^{00}h_{00}=\frac{1}{2}h_{00}=\frac{1}{2}h_{tt}=B(x-ct)$$

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)B(x-ct)=0$$

$$\bar{h}^{01}=h^{01}-\frac{1}{2}\eta^{01}h=\eta^{00}\eta^{11}h_{01}=-h_{01}=-h_{tx}=B(x-ct)$$

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)B(x-ct)=0$$

ゲージ条件式（9.11）

$$\bar{h}^{23}{}_{,3}=\frac{d}{dz}A\sin k_0(ct-x)=0$$

$$\bar{h}^{00}{}_{,0}=\frac{d}{cdt}B(x-ct)=-B$$

$$\bar{h}^{01}{}_{,1}=\frac{d}{dx}B(x-ct)=B$$

$\xi_0=-\frac{1}{2}(x-ct)^2$，$\xi_i=0$ とする．

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\xi^0=\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\frac{1}{2}B(x-ct)^2=-B+B=0$$

？？？

(c)　$h_{yz}=A\sin k_0(ct-x)$ については，(a)と同じ．

$$h_{00,01}=2B(x-ct)_{,01}=-2B_{,1}=0$$

$$h_{01,01}=-B(x-ct)_{,01}=B_{,1}=0$$

(d)

$$\bar{h}^{00}{}_{,0} = \frac{d}{cdt}B(x-ct) = -B$$

であるから，

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\xi^0 = -B$$

となるものをみつける．それは，

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\xi^0 = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\frac{1}{2}B(ct)^2 = -B$$

$$\xi_t = -\frac{1}{2}(ct)^2$$

？？？

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.27）～（9.28）

練習問題 11

(a)　式（9.27）を導け．

(b)　図 9.1 に示された円上のテスト粒子に対して式（9.28a），（9.28b）を解け．

練習問題 12

式（9.28）と式（9.29）を導いた計算と同様な計算を行い，z 方向（波の進行方向）には粒子間隔は影響を受けないことを示せ．

練習問題 13

バックグラウンドのローレンツ変換の一つは，x-y 面での x，y 軸の 45 度の回転である．(x, y) から (x', y') へのそのような回転で，$h^{TT}_{x'y'} = h^{TT}_{xx}$，$h^{TT}_{x'x'} = -h^{TT}_{xy}$ となることを示せ．これは図 9.1 にかなっている．

練習問題 14

(a)　式（9.21）で $A_{xy}=0$ とした平面彼のメトリックが

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (1+h_+)dx^2 + (1-h_+)dy^2 + dz^2 \qquad (9.149)$$

になることを示せ．ここで $h_+ = A_{xx}\sin[\omega(t-z/c)]$ である．

(b)　この波は，自由粒子が x 軸と y 軸を 2 等分する直線上に並んでいる場合には，その粒子間の固有距離を変えないことを示せ．

(c)　式（9.21）で $A_{xx}=0$ とした平面彼のメトリックが

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + 2h_\times dxdy + dy^2 + dz^2 \qquad (9.150)$$

になることを示せ．ここで $h_\times = A_{xy}\sin[\omega(t-z/c)]$ である．

(d)　(c)の波は，自由粒子が座標軸上に並んでいる場合には，その粒子間の固有距離を変えないことを示せ．

(e)　(c)の波は(a)の波の変動を 45 度回転させた楕円的な変形をもたらすことを示せ．

練習問題 15

(a)　$h_{yy}^{TT}=-h_{xx}^{TT}$，$h_{xy}^{TT}=\pm i h_{xx}^{TT}$ のとき，波は x-y 面内で円偏光であるという．そのような波に対して，図 9.1 の楕円はその形を変えることなく，回転することを示せ．

(b)　a をある実数として，$h_{xy}^{TT}=-iah_{xx}^{TT}$，$h_{yy}^{TT}=-h_{xx}^{TT}$ のとき，波は x 軸と y 軸を主軸にもつ楕円偏光であるという．a をある複素数として $h_{xy}^{TT}=ah_{xx}^{TT}$（平面波の一般の場合）のとき，波が軸 x，y を主軸にもつ楕円偏光となるように新しい軸 x，y を見つけることができることを示せ．円偏光と線形偏光は楕円偏光の特別な場合であることを示せ．

練習問題 16

TT ゲージで振幅 $A^{\mu\nu}$ と $B^{\mu\nu}$ をもつ２つの平面は，$(A^{\mu\nu})^{*}B_{\mu\nu}=0$ のとき，直交する偏光をもつという．ここで $(A^{\mu\nu})^{*}$ は $A^{\mu\nu}$ の複素共役である．$A^{\mu\nu}$ と $B^{\mu\nu}$ が直交する偏光をもつとき，$B^{\mu\nu}$ を 45 度回転すると $A^{\mu\nu}$ に比例することを示せ．

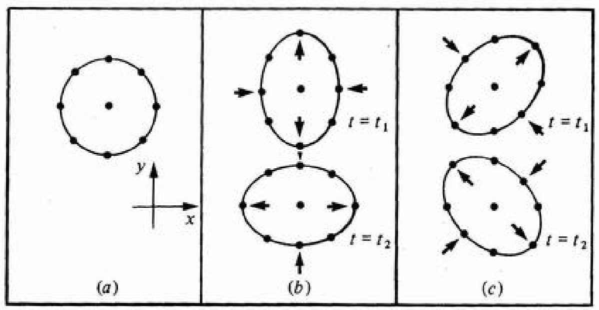


図 9.1　(a) z 方向に進んでいる波がとどく前の自由粒子のつくる円．(b) "+" 偏りをもった波によってつくられた円のひずみ．二つの図は，位相が 180° 違う同じ波を表す．粒子はお互いからの固有距離によって位置づけられている．(c) "×" 偏りに対する (b) と同じ図．

練習問題 11 の解

(a)　8.6 練習問題 11 より，

マクスウェル方程式のローレンツ・ゲージ条件

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}}=\partial_{\mu}A^{\mu}=A^{\mu}{}_{,\mu}=0 \qquad \text{(mx7.3)}$$

重力場でのローレンツ・ゲージ条件

◆ $$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0 \qquad (8.33)$$

マクスウェル方程式から導かれる波動方程式

$$\partial^{\nu}\partial_{\nu}A^{\mu}=A^{\mu,\nu}{}_{,\nu}=\Box A^{\mu}=-\mu_0 J^{\mu} \qquad \text{(mx7.6)}$$

弱い重力場でのアインシュタイン方程式（線形理論での場の方程式）

◆ $$\Box\bar{h}^{\mu\nu}=-\frac{16\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \qquad (8.42)$$

であるから，$h^{\mu\nu}$ versus A^{μ}，$T^{\mu\nu}$ versus J^{μ} がアナロジーである．

電磁波の平面波は，

$$A^{x}=A^{x}(ct-z),\quad A^{y}=A^{y}(ct-z),\quad A^{z}=0,\quad A^{0}=0$$

重力波の平面波は，

$$\bar{h}^{xx}=\bar{h}^{xx}(ct-z),\quad \bar{h}^{xy}=\bar{h}^{xy}(ct-z),\quad \bar{h}^{yy}=\bar{h}^{yy}(ct-z)$$

$$\bar{h}^{\mu0}=\bar{h}^{\mu3}=0,\ \text{for all}\ \mu$$

これらについて，

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(h_{\alpha\nu,\beta\mu}+h_{\beta\mu,\alpha\nu}-h_{\alpha\mu,\beta\nu}-h_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) \qquad (8.25)$$

を使って，リーマン・テンソルは，

$$R_{x0x0}=-R_{y0y0}=-R_{x0xz}=R_{y0yz}=R_{xzxz}=-R_{yzyz}=-\frac{1}{4}\left(\bar{h}_{xx}-\bar{h}_{yy}\right)_{,tt}$$

$$R_{x0y0}=-R_{x0yz}=R_{xzyz}=-R_{xzy0}=-\frac{1}{2}\bar{h}_{xy,tt}$$

上式以外は次式の対称を除いて 0 になる．

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}=R_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

これから，TT ゲージにおいては，

$$R_{j0k0}=R_{0j0k}=-R_{j00k}=-R_{0jk0}=-\frac{1}{2}h^{TT}_{jk\ ,00} \qquad (9.27')$$

したがって,

$$R^{x}{}_{0x0}=R_{x0x0}=-\frac{1}{2}h^{TT}_{xx\ ,00} \qquad (9.27)$$

$$R^{y}{}_{0x0}=R_{y0x0}=-\frac{1}{2}h^{TT}_{xy\ ,00}$$

$$R^{y}{}_{0y0}=R_{y0y0}=-\frac{1}{2}h^{TT}_{yy\ ,00}=-R^{x}{}_{0x0}$$

(b)　測地線方程式

◆ $$\nabla_V\nabla_V\xi^{\alpha}=R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta}V^{\mu}V^{\nu}\xi^{\beta} \qquad (6.87)$$

より，２粒子間の連結ベクトルは次式を満たす．

$$\frac{d^2}{c^2d\tau^2}\xi^{\alpha}=R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta}U^{\mu}U^{\nu}\xi^{\beta} \qquad (9.25)$$

$$\frac{d^2}{c^2d\tau^2}\xi^{\alpha}=\frac{d^2}{c^2dt^2}\xi^{\alpha}=\varepsilon R^{\alpha}{}_{00x}=-\varepsilon R^{\alpha}{}_{0x0} \qquad (9.26)$$

where　$\vec{U}\to(c,0,0,0)$，$\vec{\xi}\to(0,\varepsilon,0,0)$ 初期値

上式から，その実効的な力による加速度は,

$$\frac{d^2}{c^2d\tau^2}\xi^{i}=\frac{d^2}{c^2dt^2}\xi^{i}=-R^{i}{}_{0j0}\xi^{j} \qquad (9.29)$$

$$=\frac{1}{2}h^{TT}_{ij\ ,00}\xi^{j}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{c^2dt^2}h^{TT}_{ij\ ,00}\xi^{j} \qquad (9.28c)$$

光の進行方向の単位ベクトル $\vec{e}_z$ に垂直な平面上の直交する単位ベクトル $\vec{e}_x$，$\vec{e}_y$ を使って，偏光テンソルを定義する．

プラス偏光テンソルは,

$$\vec{e}_{+}=\vec{e}_x\otimes\vec{e}_x-\vec{e}_y\otimes\vec{e}_y=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad ①$$

クロス偏光テンソルは,

$$\vec{e}_{+}=\vec{e}_x\otimes\vec{e}_y+\vec{e}_y\otimes\vec{e}_x=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad ②$$

式（9.2）と式（9.21）から,

$$h^{TT}_{xx}=-h^{TT}_{yy}=A_{+}\exp(ik_{\sigma}x^{\sigma}) \qquad ③$$

$$h^{TT}_{xy}=h^{TT}_{yx}=A_{\times}\exp(ik_{\sigma}x^{\sigma})$$

where　$\vec{k}\to(\omega/c,0,0,-\omega/c)$，$k_{\sigma}x^{\sigma}=\omega(t-z/c)$

$$A_{+}=A_{xx}=-A_{yy}\,,\quad A_{\times}=A_{xy}=-A_{yx}$$

上式は偏光テンソルを使えば一般的に書ける．

$$h_{ij}=A_{ij}\exp(ik_{\sigma}x^{\sigma})\vec{e}_{P\,ij} \qquad ④$$

式（9.28c）も偏光テンソルを使えば一般的に書ける．

$$\frac{d^2}{dt^2}\xi^{i}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}h^{TT}_{ij\ ,00}\xi^{j}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}A_{ij}\exp(ik_{\sigma}x^{\sigma})\vec{e}_{P\,ij}\xi^{j} \qquad (9.28d)$$

上式は式（9.28a）と（9.28b）の一般化である．

上式の解（２粒子間の距離）は,

$$\xi^{i}=\xi^{i}(0)+\frac{1}{2}A_{ij}\exp(ik_{\sigma}x^{\sigma})\vec{e}_{P\,ij}\xi^{j}(0) \qquad (9.28e)$$

プラス偏光（$A_{+}\neq 0$，$A_{\times}=0$）の場合,

式（9.28d）は，①式を使って,

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\xi^1\\\xi^2\end{pmatrix}=\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\frac{A_{+}}{2}\exp(ik_{\sigma}x^{\sigma})&0\\0&-\frac{A_{+}}{2}\exp(ik_{\sigma}x^{\sigma})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\\xi^2\end{pmatrix} \qquad ⑤$$

この方程式の解は,

$$\begin{pmatrix}\xi^1\\\xi^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{A_{+}}{2}\exp(ik_{\sigma}x^{\sigma})&0\\0&1-\frac{A_{+}}{2}\exp(ik_{\sigma}x^{\sigma})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1(0)\\\xi^2(0)\end{pmatrix} \qquad ⑥$$

$\xi^1(0)$, $\xi^2(0)$ は，$t=0$ ではなく，重力波到達前の連結ベクトルの成分であり,

円状の２粒子間のその初期値を次式とする．

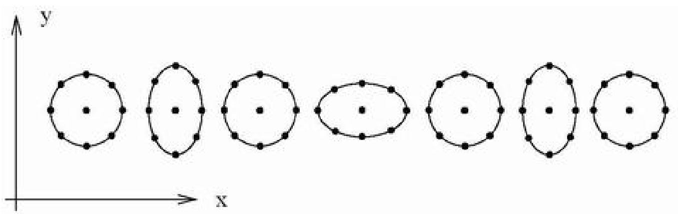
$$\left(\xi^1(0),\ \xi^2(0)\right)=\left(\varepsilon\cos\theta,\ \varepsilon\sin\theta\right)\quad \text{where}\quad \varepsilon=\text{最初の円の直径}\qquad ⑦$$

これを使って，$z=0$ 面の２粒子間の連結ベクトルの成分を次式となる．

$$\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\dfrac{A_+}{2}\cos\omega t & 0\\ 0 & 1-\dfrac{A_+}{2}\cos\omega t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\cos\theta\\ \varepsilon\sin\theta\end{pmatrix}\qquad ⑧$$

ε の係数の計算結果

$(+2\pi n)$	$\theta=0^\circ$	$\theta=45^\circ$	$\theta=90^\circ$	$\theta=135^\circ$
$\omega t=0$	$1+\dfrac{A_+}{2}$	1	$1-\dfrac{A_+}{2}$	1
$\omega t=\dfrac{\pi}{2}$	1	1	1	1
$\omega t=\pi$	$1-\dfrac{A_+}{2}$	1	$1+\dfrac{A_+}{2}$	1
$\omega t=\dfrac{3}{2}\pi$	1	1	1	1



クロス偏光（$A_+\neq 0$，$A_\times=0$）の場合，

式（9.28d）は，②式を使って，

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}=\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}0 & \dfrac{A_\times}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma)\\ \dfrac{A_\times}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}\qquad ⑨$$

この方程式の解は，

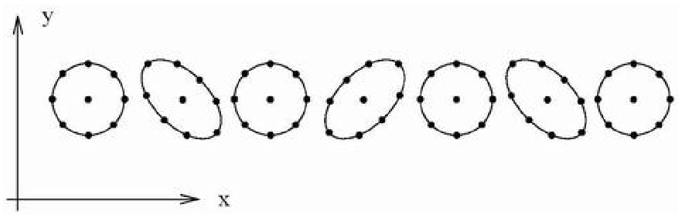
$$\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{A_\times}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma)\\ \dfrac{A_\times}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1(0)\\ \xi^2(0)\end{pmatrix}\qquad ⑩$$

$\varepsilon=$ 最初の円の直径を使って，

$$\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{A_\times}{2}\cos\omega t\\ \dfrac{A_\times}{2}\cos\omega t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\cos\theta\\ \varepsilon\sin\theta\end{pmatrix}\qquad ⑪$$

ε の係数の計算結果

$(+2\pi n)$	$\theta=0^\circ$	$\theta=45^\circ$	$\theta=90^\circ$	$\theta=135^\circ$
$\omega t=0$	1	$1+\dfrac{A_\times}{2}$	1	$1-\dfrac{A_\times}{2}$
$\omega t=\dfrac{\pi}{2}$	1	1	1	1
$\omega t=\pi$	1	$1-\dfrac{A_\times}{2}$	1	$1+\dfrac{A_\times}{2}$
$\omega t=\dfrac{3}{2}\pi$	1	1	1	1



＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 12 の解

$$\frac{d^2}{dt^2}\xi^i=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}h^{TT}_{ij\ ,00}\xi^j=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}A_{ij}\exp(ik_\sigma x^\sigma)\vec{e}_{Pij}\xi^j\qquad (9.28\text{d})$$

$$\xi^i=\xi^i(0)+\frac{1}{2}A_{ij}\exp(ik_\sigma x^\sigma)\vec{e}_{Pij}\xi^j(0)\qquad (9.28\text{e})$$

$$\frac{d^2}{c^2 d\tau^2}\xi^i = \frac{d^2}{c^2 dt^2}\xi^i = -R^i{}_{0j0}\xi^j \tag{9.29}$$

上式に$i=3,\ j=1$または$i=3,\ j=2$を代入してもξ^3は定数である．

よって，y-z 平面，z-x 平面のテスト粒子は動かない．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 13 の解

クロス偏光テンソルを 45 度回転させると，

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^T (\vec{e}_+) \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{e}_\times)$$

プラス偏光テンソルと同じになる．したがって，

$$h^{TT}_{x'y'} = h^{TT}_{xx},\quad h^{TT}_{x'x'} = -h^{TT}_{xy}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 14 の解

(a)　式（8.12）と式（9.21）から，

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これを線要素に書くと，

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (1+h_+)dx^2 + (1-h_+)dy^2 + dz^2 \tag{9.149}$$

(b)　練習問題 11 の⑧式に$\theta = 45^\circ$を代入する．

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{A_+}{2}\cos\omega t & 0 \\ 0 & 1-\frac{A_+}{2}\cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon/\sqrt{2} \\ \varepsilon/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

粒子間距離は，

$$\left(\xi^1\right)^2 + \left(\xi^2\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{A_+}{2}\cos\omega t\right)^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{A_+}{2}\cos\omega t\right)^2\varepsilon^2$$

$$= \left(1+\frac{A_+{}^2}{2}\cos^2\omega t\right)\varepsilon^2 \approx \varepsilon^2$$

(c)　式（8.12）と式（9.21）から，

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これを線要素として書くと，

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + 2h_\times dxdy + dy^2 + dz^2 \tag{9.150}$$

(d)　　練習問題 11 の⑪式に$\theta = 0^\circ$を代入する．

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{A_\times}{2}\cos\omega t \\ \frac{A_\times}{2}\cos\omega t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

粒子間距離は，

$$\left(\xi^1\right)^2 + \left(\xi^2\right)^2 = \varepsilon^2 + \frac{A_\times{}^2}{4}\cos^2\omega t\varepsilon^2 \approx \varepsilon^2$$

(e)　練習問題 11 よりプラス偏光の解は，

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{A_+}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \\ 0 & 1-\frac{A_+}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^1(0) \\ \xi^2(0) \end{pmatrix} \quad ⑥$$

これを 45 度回転させると，

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1+\frac{A_+}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \\ 0 & 1-\frac{A_+}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\frac{A_+}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) & 0 \\ 0 & 1-\frac{A_+}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{A_\times}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ \frac{A_\times}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) & 1 \end{pmatrix}$$

これは，クロス偏光の解

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{A_\times}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ \frac{A_\times}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1(0) \\ \xi^2(0) \end{pmatrix} \qquad ⑩$$

と同じである．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 15 の解

円偏光（$A_+ = A_\times = A_R = A_L \neq 0$）の場合，

右円偏光テンソルは，

$$\vec{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_+ + i\vec{e}_\times) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ⑫$$

左円偏光テンソルは，

$$\vec{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_+ - i\vec{e}_\times) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ⑬$$

右円偏光の場合，

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \frac{A_R}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) & i\frac{A_R}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ i\frac{A_R}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) & -\frac{A_R}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \qquad ⑭$$

この方程式の解は，

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{A_R}{2}\cos\omega t & \frac{A_R}{2}\sin\omega t \\ \frac{A_R}{2}\sin\omega t & 1-\frac{A_R}{2}\cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon\cos\theta \\ \varepsilon\sin\theta \end{pmatrix} \qquad ⑮$$

左円偏光の場合，

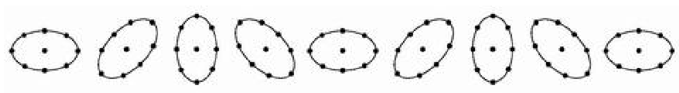
$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} -\frac{A_R}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) & i\frac{A_R}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ i\frac{A_R}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) & \frac{A_R}{2}\exp(ik_\sigma x^\sigma) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \qquad ⑯$$

この方程式の解は，

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{A_R}{2}\cos\omega t & \frac{A_R}{2}\sin\omega t \\ \frac{A_R}{2}\sin\omega t & 1+\frac{A_R}{2}\cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon\cos\theta \\ \varepsilon\sin\theta \end{pmatrix} \qquad ⑰$$

右円偏光の ε の係数の計算結果

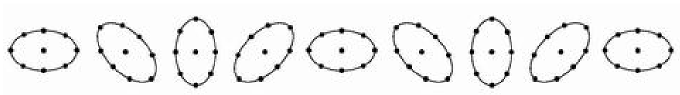
$(+2\pi n)$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 135^\circ$
$\omega t = 0$	$1+\frac{A_L}{2}$	1	$1-\frac{A_L}{2}$	1
$\omega t = \frac{\pi}{2}$	1	$1+\frac{A_L}{2}$	1	$1-\frac{A_L}{2}$
$\omega t = \pi$	$1-\frac{A_L}{2}$	1	$1+\frac{A_L}{2}$	1
$\omega t = \frac{3}{2}\pi$	1	$1-\frac{A_L}{2}$	1	$1+\frac{A_L}{2}$



【注意】MTW phone book によれば，right-handed mode において，楕円は反時計回りである．

左円偏光の ε の係数の計算結果

$(+2\pi n)$	$\theta=0^\circ$	$\theta=45^\circ$	$\theta=90^\circ$	$\theta=135^\circ$
$\omega t=0$	$1+\frac{A_R}{2}$	1	$1-\frac{A_R}{2}$	1
$\omega t=\frac{\pi}{2}$	1	$1-\frac{A_R}{2}$	1	$1+\frac{A_R}{2}$
$\omega t=\pi$	$1-\frac{A_R}{2}$	1	$1+\frac{A_R}{2}$	1
$\omega t=\frac{3}{2}\pi$	1	$1+\frac{A_R}{2}$	1	$1-\frac{A_R}{2}$



【別解】

プラス偏光テンソルじしんを回転させる．

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}^T(\vec{e}_+)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2} & 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\\ 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

（①式と②式をつかって）

$$=(\vec{e}_+\cos\theta+\vec{e}_\times\sin\theta)$$

$$=(\vec{e}_+ + i\vec{e}_\times)\exp i\theta$$

$$=\sqrt{2}(\vec{e}_R)\exp i\theta$$

上式は，right-handed mode で楕円が反時計回りすることを意味する．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 16 の解

$B^{\mu\nu}$ を仮定し，45 度回転すると，

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4}\\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}^T(B^{\mu\nu})\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4}\\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{xx} & iB_{xy}\\ iB_{xy} & -B_{xx}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-iB_{xy} & B_{xx}\\ B_{xx} & iB_{xy}\end{pmatrix}$$

$A^{\mu\nu}$ は $C\times$ 上式と仮定すると，

$$(A^{\mu\nu})^*B_{\mu\nu}=C\begin{pmatrix}iB_{xy} & B_{xx}\\ B_{xx} & -iB_{xy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{xx} & -iB_{xy}\\ -iB_{xy} & -B_{xx}\end{pmatrix}=0$$

where　$B_{\mu\nu}$ は添字を下げているの虚数の符号を反転

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

【Reference】

Misner, Thorne, & Wheeler「GRAVITATION」p952-p954（FREEMAN）
いわゆる MTW phone book
Petros Souvatzis “The linearized theory of gravitational radiation and the detection of gravitational waves”
Carl Philip Dettmann “General Relativity”
Sean M. Carroll “Lecture_notes_on_General_Relativity”
佐藤真希「超弦理論的効果による背景重力波の円偏光」p29-p33

（9.33）～（9.38）

練習問題 17
　式（9.33）～（9.36）の座標 (ct,x,y,z) から，式（9.37）の局所慣性系への変換を見つけよ．これを用いて，式（9.38）を確かめよ．

$$m x_{1,0,0} = -k(x_1 - x_2 + l_0) - \nu (x_1 - x_2)_{,0} \tag{9.33}$$

$$m x_{2,0,0} = -k(x_2 - x_1 - l_0) - \nu (x_2 - x_1)_{,0} \tag{9.34}$$

$$\xi = x_2 - x_1 - l_0 ,\quad \omega_0{}^2 = 2k/m ,\quad \gamma = \nu / m \tag{9.35}$$

$$\xi_{,0,0} + 2\gamma \xi_{,0} + \omega_0{}^2 \xi = 0 \tag{9.36}$$

$$m x^{j'}{}_{,0',0'} = F^{j'} \tag{9.37}$$

$$m x^{j}{}_{,0,0} = F^{j} + O(|h_{\mu\nu}|^2) \tag{9.38}$$

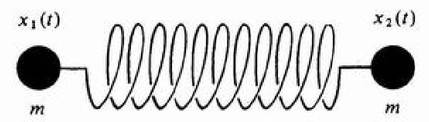


図 9.2　ばねでつながれた二つの同じ質量を使った重力波の検出装置

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.39）

練習問題 18
　式（9.39）を証明せよ．

$$\begin{aligned} l(t) &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \left[1 + h_{xx}^{TT}(t)\right]^{1/2} dx \\ &= \left[x_2(t) - x_1(t)\right]\left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t)\right] + O(|h_{\mu\nu}|^2) \end{aligned} \tag{9.39}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 19

式（9.40）と（9.41）の和を用いて，ばねの重心は波が通り過ぎても静止したままでいることを示せ．

$$mx_{1,0,0} = -k(l_0 - l) - \nu(l_0 - l)_{,0} \tag{9.40}$$

$$mx_{2,0,0} = -k(l - l_0) - \nu(l - l_0)_{,0} \tag{9.41}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.42）～（9.45）

練習問題 20

式（9.43）から（9.44）を導け．次に式（9.45）を証明せよ．

$$\xi = l - l_0 \tag{9.42}$$

$$\xi = x_2 - x_1 - l_0 + \frac{1}{2}h_{xx}^{TT}(x_2 - x_1) + O(|h_{\mu\nu}|^2) \tag{9.43}$$

$$x_2 - x_1 = l_0 + \xi - \frac{1}{2}h_{xx}^{TT}l_0 + O(|h_{\mu\nu}|^2) \tag{9.44}$$

◆

$$\xi_{,0,0} + 2\gamma\xi_{,0} + \omega_0{}^2\xi = \frac{1}{2}l_0 h_{xx}^{TT}{}_{,00} \tag{9.45}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.42）

練習問題 21

２つの質量を結ぶ線に対して任意の方向に進み，任意の楕円偏光（練習問題 15）をもつ平面波に対して式（9.45）を一般化せよ.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 22

式 (9.45) の検出器の重心での測地線の観点から，測地線偏差の方程式 (6.87) を考察せよ．式（9.42）で定義したベクトル ξ は重心から質量の１つへの連結ベクトルの２倍であることを示せ．重心で測った潮汐力から，直接，式 (9.45) が導かれることを示せ.

◆ $$\nabla_V \nabla_V \xi^\alpha = R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} V^\mu V^\nu \xi^\beta \qquad (6.87)$$

（）

練習問題 23

　式（9.48）と（9.49）を導き，$t=0$ とした式（9.45）で与えられる初期条件に対する式（9.46）の一般解を求めよ．

$$h_{xx}^{TT} = A\cos\Omega t \quad (9.46)$$

$$\xi = R\cos(\Omega t + \phi) \quad (9.47)$$

$$R = \frac{1}{2} l_0 \Omega^2 A / [(\omega_0 - \Omega)^2 + 4\Omega^2 \gamma^2]^{1/2} \quad (9.48)$$

$$\tan\phi = 2\gamma\Omega / [(\omega_0{}^2 - \Omega^2) \quad (9.49)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

2011.06.10
9　重力波　9.6　練習問題

（9.53）

練習問題 24

　式（9.53）を証明せよ．

$$\langle E \rangle = \frac{1}{8} m R^2 (\omega_0{}^2 + \Omega^2) \quad (9.53)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.56）

練習問題 25

与えられた Q の定義から式（9.56）を導け．

$$Q = \omega_0 / 2\gamma \qquad (9.56)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 26

(a)　＋の偏光をもった平面彼のメトリック，式（9.58）を使って x 軸方向に運動している光子の座標速度（TT 座標系で）の 2 乗が

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{1+h_+}$$

で与えられることを示せ．これは 1 とは等しくない．そのことは相対論を破るのであろうか．その理由も答えよ．

(b)　実験家が図 9.1 の粒子の円の中心にいて，x 軸上の座標 $x = L$ のところの円周上にある粒子に向かって光子を送り出す．そして，その光子は円周上の粒子のところで反射され，実験家のいる場所へ戻されるものとする．さらに，その実験は短い時間で終るので，実験をしている間に h_+ はほとんど変化しないとする．h_+ の 1 次のオーダーの範囲で，実験家が光子を放出した時間と戻ってきた光子を受け取った時間の間の固有時間が $(2+h_+)L$ であることを示せ．

(c)　このことから実験家と粒子の間の固有距離が $(1+h_+/2)L$ であることがわかる，と実験家がいうとしよう．これは実験家の実感を正しく説明しているだろうか．もし，実験家が自分と粒子の位置の間を標準的なもの差しを使うといった別の測り方をしたとき，同じ値が得られるであろうか．その理由も答えよ．

(d)　実験家が同時に y 軸上で $y = L$ のところにある粒子を使った同じ実験をしたとすると，光子は $(2-h_+)L$ という固有時間が経過したときにもどってくることを示せ．

(e)　この二つの往復時間の差は $2h_+L$ で，波の振幅を測定するのに使用できる．この結果は TT ゲージを使用していることに依存するのだろうか．別の言い方をすると，別の座標系を使用しても，同じ答を得られるのだろうか．

練習問題 27

　(a)波が x- z 平面で z 軸と角度 θ をなして伝播する場合に，その平面波 h_+ の中を x 軸に沿って運動するビームの往復時間の変化の割合を与える，3 項で表される往復時間関係式（9･63）を導け．

　(b)　L が重力波の波長に比べて小さい極限で，往復時間の微分が $t+\delta L$ の微分に等しいことを示せ．ここで $\delta L = L\cos^2\theta h(t)$ は，L の固有距離の変化である．また，$\cos^2\theta$ というファクターが出てくる理由を説明せよ．

　(c)　(a)の３項表現で，重力波も x 軸に沿って伝播している場合 $\theta = \pm\pi/2$ の極限を調べよ．重力波と平行に移動する光に何が起るであろうか．

（9.66）～（9.71）

練習問題 28

　(a)　式（9.68）を用いて式（9.66）でやったように $\bar{h}_{\mu\nu}$ をつくり，波の位相一定の面が，$A_{\mu\nu}$ に対しては外向きに，$Z_{\mu\nu}$ に対しては内向きに動くことを示せ．

　(b)　式（9.69）～（9.71）で省略した計算を行え．

$$\bar{h}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}(x^i)\exp(-i\Omega t) \tag{9.66}$$

$$(\nabla^2 + \Omega^2)B_{\mu\nu} = -16\pi S_{\mu\nu} \tag{9.67}$$

$$B_{\mu\nu} = \frac{A_{\mu\nu}}{r}e^{i\Omega r} + \frac{Z_{\mu\nu}}{r}e^{-i\Omega r} \tag{9.68}$$

$$\int \Omega^2 B_{\mu\nu} d^3x \le \Omega^2 |B_{\mu\nu}|_{\max} 4\pi\varepsilon^3/3 \tag{9.69}$$

$$\int \nabla^2 B_{\mu\nu} d^3x = \oint n\cdot\nabla B_{\mu\nu} dS \tag{9.70}$$

$$\oint n\cdot\nabla B_{\mu\nu} dS = 4\pi\varepsilon^2\left(\frac{d}{dr}B_{\mu\nu}\right)_{r=\varepsilon} \approx -4\pi A_{\mu\nu} \tag{9.71}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.67）～（9.74），（9.151）～（9.162）

練習問題 29

源の外の真空領域（すなわち，そこで$S_{\mu\nu}=0$）での式（9.67）は，変数分離法によって解くことができる．$\bar{h}_{\mu\nu}$が$\sum_{lm} A^{lm}_{\mu\nu} f_l(r) Y_{lm}(\theta,\phi)/\sqrt{r}$の形の解をもつと仮定する．ここで$Y_{lm}$は球面調和関数である．

(a)　$f_l(r)$は次の方程式を満たすことを示せ．

$$f_l''+\frac{1}{r}f_l'+\left[\Omega^2-\frac{(l+1/2)^2}{r^2}\right]f_l=0$$

(b)　最も一般的な球対称な解は式（9.68）で与えられることを示せ．

(c)　変数$S=\Omega r$を代入して，f_lが次の方程式を満たすことを示せ．

$$s^2\frac{d^2 f_l}{ds^2}+s\frac{df_l}{ds}+\left[s^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]f_l=0 \qquad (9.151)$$

この式はベッセル方程式として知られており，その解は次数$l+1/2$のベッセル関数とよばれる．その関数の性質は物理学のほとんどの教科書で説明されている．

(d)　式（9.151）への代入によって，関数$f_l/\sqrt{s}$が次の球面ベッセル関数と球面ノイマン関数の線形結合であることを示せ．

$$j_l(s)=(-1)^l s^l\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right)^l\left(\frac{\sin s}{s}\right) \qquad (9.152)$$

$$n_l(s)=(-1)^{l+1} s^l\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right)^l\left(\frac{\cos s}{s}\right) \qquad (9.153)$$

(e)　式（9.152）と（9.153）を用いて，$s>>1$対するj_lとn_lは次のようにふるまうことを示せ．

$$j_l(s)\sim\frac{1}{s}\sin\left(s-\frac{l\pi}{2}\right) \qquad (9.154)$$

$$n_l(s)\sim-\frac{1}{s}\cos\left(s-\frac{l\pi}{2}\right) \qquad (9.155)$$

(f)　同様に$s<<1$に対するふるまいは次のように与えられることを示せ．

$$j_l(s)\sim\frac{s^l}{(2l+1)!!} \qquad (9.156)$$

$$n_l(s)\sim-\frac{(2l-1)!!}{s^{l+1}} \qquad (9.157)$$

ここで，mがたとえば奇数の場合

$$(m)!!=m(m-2)(m-4)\cdots 3\cdot 1 \qquad (9.158)$$

(g)　(e)から任意のlとmに対する式（9.67）の外向きの波の解は次のようになることを示せ．

$$(\bar{h}_{\mu\nu})_{lm}=A^{lm}_{\mu\nu}h^{(1)}_l(\Omega r)e^{-i\Omega t}Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (9.159)$$

ここで$h^{(1)}_l(\Omega r)$は次の第一種の球面ハンケル関数とよばれるものである．

$$h^{(1)}_l(\Omega r)=j_l(\Omega r)+in_l(\Omega r) \qquad (9.160)$$

(h)　積分を行う前に式 (9.67) に$j_l(\Omega r)Y^*_{lm}(\theta,\phi)$を掛けて，式 (9.69) ～ (9.74) の計算をやり直せ．そのようにして積分されたとき，式（9.67）の左辺は次のようになることを示せ．

$$\varepsilon^2\left(j_l(\Omega\varepsilon)\frac{d}{dr}B_{\mu\nu}(\varepsilon)-B_{\mu\nu}(\varepsilon)\frac{d}{dr}j_l(\Omega\varepsilon)\right)$$

$\Omega\varepsilon<<1$のとき，これは［$r=\varepsilon$は源の外と仮定するから，上の式（9.159）と式（9.156）～（9.157）を用いて］単に$iA^{lm}_{\mu\nu}/\Omega$となることを示せ．同様にして式（9.67）の右辺は同じ近似で$-16\pi\Omega^l\int T_{\mu\nu}r^l Y^*_{lm}(\theta,\phi)d^3x/(2l+1)!!$となることを示せ．

(i)　次に解は式（9.159）で

$$A^{lm}_{\mu\nu}=16\pi i\Omega^{l+1}J^{lm}_{\mu\nu}/(2l+1)!! \qquad (9.161)$$

としたものになることを示せ．ここで

$$J^{lm}_{\mu\nu}=\int T_{\mu\nu}r^l Y^*_{lm}(\theta,\phi)d^3x \qquad (9.162)$$

(j)　$l=0$として，式（9.73）と（9.74）を導け．

(k)　あるlに対して$J_{\mu\nu}^{lm} \neq 0$ならば，近似$\Omega\varepsilon << 1$によって無視した式（9.161）の中の項は，$l+1$に対する式（9.161）の寄与の最も大きい項と同じオーダーになることを示せ．特に式（9.72）で$j_{\mu\nu} \neq 0$なら式（9.74）よりも精度のいい解を求めるためには，$l > 0$の項ばかりでなく式（9.69）のような式（9.74）で無視した項も考慮に入れなければならない．

$$(\nabla^2 + \Omega^2) B_{\mu\nu} = -16\pi S_{\mu\nu} \tag{9.67}$$

$$B_{\mu\nu} = \frac{A_{\mu\nu}}{r} e^{i\Omega r} + \frac{Z_{\mu\nu}}{r} e^{-i\Omega r} \tag{9.68}$$

$$\int \Omega^2 B_{\mu\nu} d^3x \leq \Omega^2 |B_{\mu\nu}|_{\max} 4\pi\varepsilon^3/3 \tag{9.69}$$

$$\int \nabla^2 B_{\mu\nu} d^3x = \oint n \cdot \nabla B_{\mu\nu} dS \tag{9.70}$$

$$\oint n \cdot \nabla B_{\mu\nu} dS = 4\pi\varepsilon^3 \left(\frac{d}{dr} B_{\mu\nu} \right)_{r=\varepsilon} \approx -4\pi A_{\mu\nu} \tag{9.71}$$

$$J_{\mu\nu} = \int S_{\mu\nu} d^3x \tag{9.72}$$

$$A_{\mu\nu} = 4J_{\mu\nu} \tag{9.73}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = 4J_{\mu\nu} e^{i\Omega(r-t)}/r \tag{9.74}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.82a）

練習問題 30

質量が$\{m_{(A)}, A = 1, \cdots, N\}$でその位置が$\{x_{(A)}^i\}$であるような$N$個の離散的な点粒子の集合に対して式（9.82a）を書き直せ．

$$I^{lm} = \int T^{00} x^l x^m d^3x \tag{9.82a}$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

（9.87）

練習問題 31

次の質量分布に対する 4 重極テンソル I_{jk} とそのトレースフリーテンソル Ɨ_{jk} ［式（9.87）］を計算せよ．

(a)　密度 $\rho(r,t)$ の球状の星．式（9.82）で座標原点を星の中心にとる．

(b)　(a)と同じ星．ただし，座標原点を任意の点にとる．

(c)　一様な密度 ρ で x, y, z 軸に向いた長さそれぞれ a, b, c の主軸をもつ楕円体.

(d)　(c)の楕円体．ただし z 軸のまわりに角速度 ω で回転しているとする．

(e)　点$(a, 0, 0)$，$(0, a, 0)$，$(-a, 0, 0)$，$(0,-a, 0)$にある質量 m の 4 つの質点.

(f)　(e)の 4 つの質点．ただしそのすべてが半径 a の円を角速度 ω で z 軸のまわりに反時計回りに動いているとする．

(g)　質量をもたないばねによって結びつけられている二つの質量 m の質点. おのおのの質点は距離 l_0 離れた平衡の位置のまわりに角速度 ω，振幅 A で全体の重心を固定したまま振動しているものとする．

(h)　ばね定数 k, 平衡での長さ l_0 のばねで結びつけられている等しくない質量 m，M の二つの質点．ばねは振幅 $2A$（全体としてのばねののび），その自然振動数で（全体の重心を固定したまま）振動している．

$$\text{Ɨ}_{jk} = I_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{jk} I^l{}_l \qquad (9.87)$$

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

練習問題 32

この問題で球面波に対して TT ゲージを適用する

(a)　式（9.83）を TT ゲージに変換するために，B^α を x^μ のゆっくり変化する関数として，ベクトル $\xi^\alpha = B^\alpha\left(x^\mu\right)\exp(i\Omega(r-t))/r$ で生成されるゲージ変換を用いる．オーダー $1/r$ までの一般の変換則を見つけよ．

(b)　新しい $\bar{h}_{\alpha\beta}$ がオーダー $1/r$ で次の 3 つの条件を満たすことを要求する． $\bar{h}_{0\mu} = 0$，$\bar{h}^\alpha{}_\alpha = 0$，$\bar{h}_{\mu j} n^j = 0$，ここで $n^j \equiv x^j / r$ は動径方向の単位ベクトルである．この要求とさらにオーダー $1/r$ で $\Box\xi^\alpha = 0$ を満たすように B^α を見つけることができることを示せ．

(c)　TT ゲージで式（9.84）～（9.87）が成り立つことを示せ．

(d)　式（9.103）を R で展開し，r^{-1} の項を落とすことで，式（9.104）で消去できなかった $\bar{h}_{0\mu}$ の高次の項が v^2 のオーダーのゲージ項であること，つまり式（9.103）において $\bar{h}_{00}$ では時間の 2 階微分までで，$\bar{h}_{0j}$ では時間の 1 階微分までであることを示せ．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 33

(a)　n^j を３次元ユークリッド空間の単位ベクトルとする．$P^j{}_k = \delta^j{}_k - n^j n_k$ が n^j に直交する射影テンソルとなることを示せ．すなわち，任意の V^j に対して　(i)　$P^j{}_k V^k$ が n^j に直交すること，(ii)　$P^j{}_k P^k{}_l V^l = P^j{}_k V^k$ を示す．

(b)　式（9.84）〜（9.86）の TT ゲージ $\bar{h}^{TT}_{ij}$ は次の式によって式（9.83）のもとの $\bar{h}_{kl}$ と関係していることを示せ．

$$\bar{h}^{TT}_{ij} = P^k{}_i P^l{}_j \bar{h}_{kl} - \frac{1}{2} P_{ij} \left(P^{kl} \bar{h}_{kl} \right) \qquad (9.163)$$

ここでは n^j は z 方向を指している．

++++++++++++++++++++++++++++++++

()

練習問題 34

Ɨ_{ik} がトレースフリー，すなわち $\text{Ɨ}^l{}_l = 0$ であることを示せ．

++++++++++++++++++++++++++++++++

()

練習問題 35

練習問題 31 の系に対して，x，y，z 軸に沿ったトランスバース - トレースフリー 4 重極輻射場，式（9.85）〜（9.86）あるいは式（9.163）を計算せよ．式（9.91）を導いたときのように，x 軸と y 軸上で計算するとき，添字を適当に変化させることを忘れないようにせよ．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 36

式（9.163）を用いて，あるいは式（9.85）〜（9.86）で座標軸を回転させることにより，式（9.88）の簡単な振動子から x 軸に対して角度 θ 方向に放射される輻射の振幅と偏光を表す楕円の向きを計算せよ．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 37
　式（9.93）の ω と 2ω の項は質的に違っている．2ω の項は振動子の振幅 A のみによっており，ω の項は A と質量の間隔 l_0 の両方によっている．質量は l_0 の距離動くわけではないのに，なぜ l_0 が含まれるのか？その答は輻射の原因が応力であり，応力はばねによって，l_0 の距離を伝達されるからである．これを見るには，応力が大きな距離にわたって運ばれないような系について似たような計算をしてみればよい．質量の２つのペアを考えよう．おのおののペアは質量 m と $M >> m$ の二つの粒子からなり，各ペアの中の質量は自然振動数 ω をもつ短いばねで結びつけられているとする．ペアの重心はお互いに関して静止している．２つのばねは同じ振幅で，振動の中心は $l_0 >> A$ だけ離れ，おのおのの質量 m を振幅 A で正弦振動させている．その振動は位相がずれているとする．練習問題 31(h)の計算を用いて，この系の輻射場は式（9.93）で，ω の項を含んでいないものとなることを示せ．この系と式（9.93）の系の違いは，質量 m の運動を維持する応力が何に起因するかによると考えることができる．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 38
　連星の式（9.98）～（9.99）に対して，練習問題 36 と同じことを計算せよ．ただし線形偏光の向きではなく，楕円偏光の楕円の向きを見つける．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 36

質量 m と M の２つの球状の星が x - y 面で楕円軌道を描いてお互いのまわりを回っている．その軌道は全エネルギー E と角運動量 L をもつとする．

(a)　ニュートン重力を用いて重心のまわりの両方の星の軌道の式を求めよ．軌道周期 P，最短距離 a，離心率 e を E と L の関数として表せ．

(b)　この系の Ɨ_{kj} を計算せよ．

(c)　式（9.106）から，x 軸と z 軸に沿った TT 輻射場を計算せよ．$m=M$ で円軌道のとき，その結果が式（9.98）～（9.99）になることを示せ．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 40

式（9.101）から球対称な運動は重力波を出さないことを示せ．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 41
式（9.114）から本文中で示唆された方法で式（9.115）を導け.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 42
(a)　式（9.116）を導け.
(b)　式（9.107）と（9.116）を重ね合せ，R が小さいと仮定することにより式（9.117），（9.118）を導け.
(c)　本文に示された方法で式（9.120）を導け.

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 43

重力波に対して平均化したストレス - エネルギーテンソルを次のように定義する．

$$T_{\alpha\beta} = \left\langle\!\left\langle \bar{h}^{TT}_{\mu\nu,\alpha} \bar{h}^{TT\mu\nu}{}_{,\beta} \right\rangle\!\right\rangle / 32\pi \tag{9.151}$$

（ここで≪　≫は 1 周期にわたる時間と，すべての方向に 1 波長にわたる空間の両方の平均操作を表す．）すると式（9.122）の流束 F は，その波の T^{0z} 成分となることを示せ．より詳しい議論から，もしこの平均が適当に定義されるなら，式（9. 164）は実際に任意の波束のストレス - エネルギーテンソルと見なすことが示される．これはアイサクソン（Isaacson）ストレス - エネルギーとよばれる．詳しいことは Misner ら（1973）を見よ．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 44

(a)　式（9.123）から式（9.125）を導け．

(b)　式（9.125）から式（9.127）を正当化せよ．

(c)　練習問題 33(b)を用いて式（9.122）から式（9.127）を導け．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 45

(a)　式（9.128）の積分を考える．この積分を次の方法で行う．

(i)対称性の観点から$\int n^j n^k \sin\theta d\theta d\phi$は，$\delta^{jk}$に比例しなければならないことを示せ．

(ii)　$j = k = z$の場合を計算することによって，その比例定数を決めよ．

(b)　式（9.129）に対して同じ方法を適用せよ．まず積分がδ^{ij}にしかよらないことを議論し，与えられた右辺のテンソルがその添字の任意の２つを交換しても値が変らないという対称性をもつδ^{ij}だけからつくられる唯一のテンソルであることを示せ．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 46

式（9.124）と$Ɨ_{ij}$が対称であることから式（9.130），（9.131）を導け．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 47

(a)粒子の角運動量は p_ϕ である．これから $x^i=$ 一定の面を横切る連続的な系の角運動量流束は $T_{i\phi}$ であることを示せ．このことと練習問題 43 を用いて源から放出された重力波の角運動量の z 成分［これは式（9.164）の $T_{r\phi}$ を大きな半径の球面にわたって積分したものである］が次のように与えられることを示せ．

$$F_j=-\frac{1}{5}\left(\ddot{I}_{xl}\dddot{I}_y{}^l-\ddot{I}_{yl}\dddot{I}_x{}^l\right) \tag{9.152}$$

(b)　$\bar{h}^{TT}_{\mu\nu}$ が $\cos(\Omega t-m\phi)$ のように書けるなら，放出されるエネルギーと角運動量の比は Ω/m となることを示せ．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 48

式（9.135）を計算せよ．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋

()

練習問題 49

練習問題 39 の任意の連星系に対して次の問に答えよ．

(a)　1 周期にわたる平均のエネルギー損失率が次のようになることを示せ．

$$\langle dE/dt\rangle = -\frac{32}{5}\frac{\mu^2(m+M)^3}{a^5(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right) \qquad (9.166)$$

また練習問題 47(a)から次式を示せ．

$$\langle dL/dt\rangle = -\frac{32}{5}\frac{\mu^2(m+M)^{5/2}}{a^{7/2}(1-e^2)^2}\left(1+\frac{7}{8}e^2\right) \qquad (9.167)$$

ここで $\mu = \mu M/(m+M)$ は換算質量である．

(b)　次式を示せ．

$$\langle da/dt\rangle = -\frac{64}{5}\frac{\mu(m+M)^2}{a^3(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right) \qquad (9.168)$$

$$\langle de/dt\rangle = -\frac{304}{15}\frac{\mu(m+M)^2 e}{a^4(1-e^2)^{5/2}}\left(1+\frac{121}{304}e^2\right) \qquad (9.169)$$

$$\langle dP/dt\rangle = -\frac{192\pi}{5}\frac{\mu(m+M)^{3/2}}{a^{5/2}(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right) \qquad (9.170)$$

(c)　式（9.144）を確かめよ．［たとえ(a)ができなくても，(b)と(c)は行え．］

これらの式は Peters （1964）によって最初に導かれた．

＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋